

# CONCEPTION DES MACHINES PRINCIPES ET APPLICATIONS

## 3 Dimensionnement

GEORGES SPINNLER

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

**Vous pouvez consulter notre catalogue général sur notre serveur Internet**

**<http://ppur.epfl.ch>**

Volume 3

ISBN 2-88074-303-6

© 1997, Presses polytechniques et universitaires romandes,  
CH – 1015 Lausanne

Tous droits réservés.

Reproduction, même partielle, sous quelque forme ou sur quelque support que ce soit, interdite sans l'accord écrit de l'éditeur.

# TABLE DES MATIÈRES

## Volume 3: DIMENSIONNEMENT

CHAPITRE 19	ÉCHAUFFEMENT .....	1
19.1	Introduction .....	1
19.2	Bilan thermique .....	2
19.3	Transmission de chaleur et refroidissement .....	4
19.4	Température .....	11
19.5	Echauffement de surfaces glissantes .....	18
19.6	Dimensionnement thermique .....	32
19.7	Dilatation .....	49
19.8	Conclusions principales .....	64
CHAPITRE 20	ENTRAÎNEMENT .....	67
20.1	Introduction .....	67
20.2	Puissance d'entraînement .....	68
20.3	Moteurs .....	70
20.4	Dimensionnement des moteurs .....	87
20.5	Vitesse des moteurs et transmission .....	99
20.6	Positionnement .....	118
20.7	Véhicules .....	135
20.8	Conclusions principales .....	144
CHAPITRE 21	STABILITÉ .....	147
21.1	Introduction .....	147
21.2	Instabilité de position .....	147
21.3	Instabilité de forme .....	150
21.4	Instabilités thermiques .....	159
21.5	Auto-excitation de vibrations .....	167
21.6	Conclusions principales .....	169
CHAPITRE 22	ÉTANCHÉITÉ .....	171
22.1	Introduction .....	171
22.2	Fuites .....	172
22.3	Étanchéité statique .....	174
22.4	Étanchéité dynamique .....	188
22.5	Conclusions principales .....	205

CHAPITRE 23	RÉSISTANCE ET CHOIX DES MATÉRIAUX .....	207
23.1	Introduction .....	207
23.2	Processus de rupture .....	208
23.3	Résistance statique .....	209
23.4	Résistance des matériaux non homogènes .....	218
23.5	Fatigue .....	225
23.6	Fluage .....	239
23.7	Choix des matériaux .....	241
23.8	Conclusions principales .....	268
CHAPITRE 24	DIMENSIONNEMENT ET SÉCURITÉ STRUCTURALE .....	269
24.1	Introduction .....	269
24.2	Principes généraux .....	270
24.3	Contraintes effectives .....	276
24.4	Facteur de sécurité à la résistance .....	294
24.5	Prédimensionnement .....	302
24.6	Vérification .....	311
24.7	Taille et proportion .....	332
24.8	Conclusions principales .....	346
CHAPITRE 25	DIMENSIONNEMENT À LA VITESSE ET AUX DÉFORMATIONS .....	349
25.1	Introduction .....	349
25.2	Efforts d'inertie .....	350
25.3	Précision de transmission du mouvement .....	356
25.4	Vibration des mécanismes .....	369
25.5	Vitesse critique .....	382
25.6	Echauffement et usure .....	387
25.7	Déformations statiques .....	398
25.8	Modélisation dynamique .....	400
25.9	Conclusions principales .....	407
CHAPITRE 26	ARCHITECTURE .....	409
26.1	Introduction .....	409
26.2	Principes généraux .....	409
26.3	Distribution des fonctions .....	411
26.4	Choix des organes .....	422
26.5	Conception et situation des organes .....	426
26.6	Similitudes .....	449
26.7	Sûreté .....	469
26.8	Aspects économiques .....	482
26.9	Conclusions principales .....	485
CHAPITRE 27	CONCLUSIONS GÉNÉRALES .....	487
27.1	Performances limites .....	487
27.2	Directives générales de conception .....	489
27.3	Perspectives .....	501

BIBLIOGRAPHIE .....	503
INDEX .....	509
LISTE DES SYMBOLES .....	519
REMERCIEMENTS AUX ÉDITEURS .....	527

### **Volume 1: STATIQUE**

CHAPITRE 1	INTRODUCTION
CHAPITRE 2	FROTTEMENT
CHAPITRE 3	DÉTÉRIORATION DES SURFACES FONCTIONNELLES
CHAPITRE 4	DISSIPATION D'ÉNERGIE
CHAPITRE 5	EFFORTS STATIQUES
CHAPITRE 6	DÉFORMATIONS ET RIGIDITÉ
CHAPITRE 7	PRÉCONTRAINTÉ
CHAPITRE 8	DISTRIBUTION DES EFFORTS
CHAPITRE 9	LIAISONS, MOBILITÉ
CHAPITRE 10	MÉCANISMES
CHAPITRE 11	AMPLIFICATION

### **Volume 2: DYNAMIQUE**

CHAPITRE 12	ÉNERGIE
CHAPITRE 13	MODÈLES DYNAMIQUES
CHAPITRE 14	MOUVEMENT DES GROUPES
CHAPITRE 15	PRÉCISION DES MOUVEMENTS
CHAPITRE 16	EFFORTS D'INERTIE
CHAPITRE 17	SOLLICITATION DES STRUCTURES
CHAPITRE 18	VIBRATIONS

# ÉCHAUFFEMENT

## 19.1 INTRODUCTION

L'énergie dissipée par frottement, effet Joule ou courants de Foucault, est dégradée en chaleur qui chauffe les pièces. On distingue :

- l'échauffement local à la surface des pièces en frottement ;
- l'échauffement d'ensemble des mécanismes et des machines.

On appelle ***échauffement*** l'écart entre la température d'un élément et la température ambiante ; il s'exprime en Kelvin. La température se mesure en °C.

L'échauffement local par frottement est dangereux parce qu'il peut, s'il est trop intense, rompre les films lubrifiants. L'échauffement global dégrade les graisses et les huiles, il diminue fortement leur viscosité. Ces phénomènes compromettent le graissage et peuvent aussi conduire au grippage si l'épaisseur des films lubrifiants devient insuffisante.

La dilatation thermique des pièces modifie la géométrie, notamment les jeux et les entraxes. Il peut en résulter des surcharges et des serrages dangereux. D'intenses flux de chaleur à travers des parois épaisses déforment les pièces et provoquent des contraintes thermiques.

L'échauffement altère aussi les caractéristiques mécaniques des matériaux, leur résistance baisse et leur module d'élasticité diminue ; les polymères se ramollissent et fluent. Ces phénomènes nécessitent de limiter la température et le flux de chaleur et de dimensionner les organes en conséquence.

Ce chapitre a pour but d'attirer l'attention sur les problèmes thermiques et de proposer des solutions ; les calculs restent élémentaires. Le lecteur consultera des ouvrages spécialisés pour l'étude des aspects purement thermiques, par exemple [19.1, 19.2].

Le chapitre est articulé comme suit :

- Section 19.2 Modèles de calcul et bilan thermique.
- Section 19.3 Présentation des mécanismes de transmission et d'évacuation de chaleur.
- Section 19.4 Calcul de la température intérieure des carters et des solides avec sources de chaleur internes.
- Section 19.5 Température à la surface des pièces frottantes et distribution de la chaleur.
- Section 19.6 Limitation des performances, vitesse et puissance, des organes de machines. Amélioration du refroidissement, dimensionnement thermique.

- Section 19.7 Dilatation thermique et ses effets, notion de contrainte thermique.
- Section 19.8 Conclusions principales.

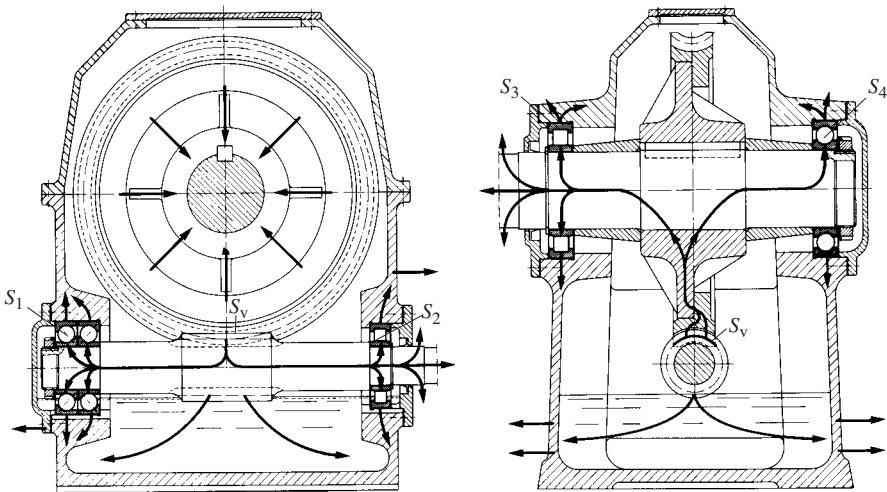
## 19.2 BILAN THERMIQUE

Les sources de chaleur rencontrées dans les machines sont :

- le frottement à la surface des pièces glissant l'une sur l'autre ;
- l'agitation d'huile et d'air ;
- le frottement interne des matériaux soumis à des contraintes variables ;
- l'effet Joule ;
- les courants de Foucault ;
- les fluides chauds circulant dans les machines.

Considérons, par exemple, un réducteur à vis sans fin (fig. 19.1). Les sources de chaleur, par frottement, sont  $S_v$  au contact entre la vis et la couronne dentée ;  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  et  $S_4$  dans les roulements et les joints d'étanchéité. Un peu d'énergie est encore dissipée par ventilation et par barbotage (§ 10.5.2). Une partie de la chaleur est transmise au carter et aux arbres par conduction, le reste est transporté par l'huile. Le carter cède à son tour la chaleur par conduction au support du réducteur ainsi qu'au milieu ambiant par rayonnement et par convection. En vertu du second principe de la thermodynamique, la chaleur est toujours transmise d'une source chaude vers une source froide. Par conséquent, les organes intérieurs sont plus chauds que le carter et ce dernier est plus chaud que le milieu réfrigérant.

L'examen de la figure 19.1 suggère de schématiser le système par trois domaines (fig. 19.2) :



**Fig. 19.1** Flux de chaleur dans un réducteur à vis sans fin.

- L'organe de machine, supposé dénué de toute inertie thermique, est parcouru par le flux d'énergie électromécanique. Les phénomènes de dégradation d'énergie y dégagent de la chaleur avec les puissances  $\dot{Q}_i^+$  égales aux puissances  $P_{pi}$  des pertes.
- Le système thermique est composé seulement des capacités thermiques  $C_j$  et ne comporte aucune source de chaleur. De la chaleur est transmise d'une capacité (pièce) à l'autre, toujours dans le sens d'une capacité chaude vers une capacité plus froide.
- L'environnement reçoit du système thermique de la chaleur avec les puissances  $\dot{Q}_k$ . Ces flux peuvent s'inverser si l'environnement est plus chaud que la machine.

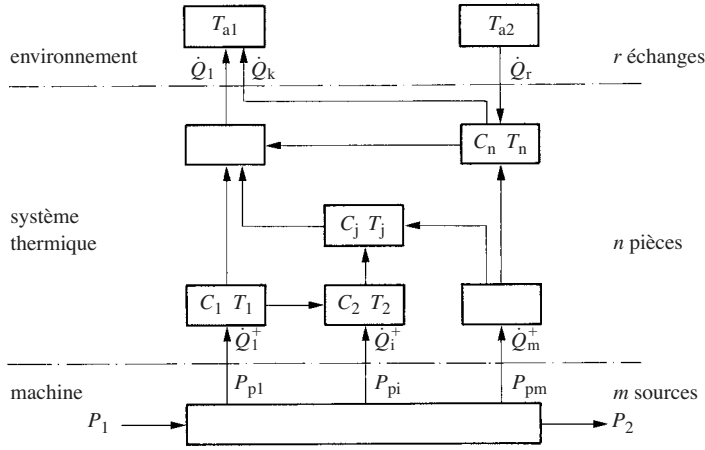


Fig. 19.2 Schéma des flux de puissance.

L'étude thermique a pour but d'étudier l'évolution de la température des pièces au cours du temps et de calculer leur température de régime permanent. L'analyse détaillée de la propagation de la chaleur sort du cadre de cet ouvrage, le lecteur intéressé consultera, par exemple, [19.1, 19.2]. On se contente d'une étude élémentaire, mais néanmoins suffisante pour expliquer la plupart des problèmes thermiques rencontrés.

Le système thermique :

- reçoit du système électromécanique la puissance thermique

$$\dot{Q}^+ = P_p = \sum_{i=1}^m P_{pi} \quad (19.1)$$

- échange avec l'environnement la puissance thermique

$$\dot{Q} = \sum_{k=1}^r \dot{Q}_k \quad (19.2)$$



Une pièce de masse  $m_j$ , dont la chaleur massique du matériau est  $c_j$ , possède la capacité thermique

$$C_j = m_j c_j$$

La différence entre la chaleur reçue et la chaleur cédée à l'ambiance est stockée dans les capacités thermiques. Le bilan thermique global étendu à tout le système thermique s'exprime par l'équation suivante :

$$P_p - \dot{Q} = \sum_{j=1}^n C_j \frac{dT_j}{dt} \quad (19.3)$$

On simplifie le calcul en remarquant que les températures des pièces sont assez voisines et qu'elles évoluent à peu près en parallèle. En supposant que toutes les pièces, respectivement toutes les capacités thermiques, aient la même température  $T$ , on obtient

$$P_p - \dot{Q} = C \frac{dT}{dt} \quad (19.4)$$

avec la capacité thermique totale

$$C = \sum_{j=1}^n m_j c_j \quad (19.5)$$

L'équation différentielle du premier ordre (19.4) régit l'évolution de la température des pièces.

On présente maintenant brièvement les moyens de refroidissement, puis on verra comment calculer la température des organes de machines.

## 19.3 TRANSMISSION DE CHALEUR ET REFROIDISSEMENT

### 19.3.1 Conduction

Une plaque d'épaisseur  $e$  et de surface  $A$  (fig. 19.3) est faite en un matériau dont le coefficient de conductibilité thermique est  $k$ . Les faces de la plaque ont une température uniforme  $T_1$  et  $T_2$ . La puissance thermique traversant la plaque est donnée par la loi de Fourier :

$$\dot{Q} = \frac{k}{e} A (T_1 - T_2) \quad (19.6)$$

Le rapport  $k/e$  a la signification d'un *coefficient de transmission de chaleur* (§ 19.3.2).

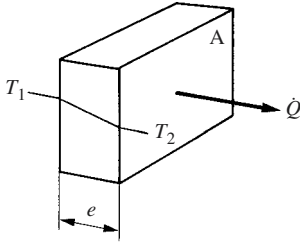


Fig. 19.3 Transmission de chaleur à travers une plaque.

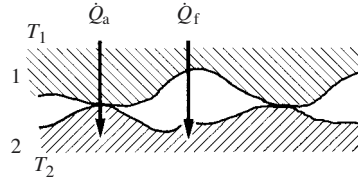


Fig. 19.4 Transmission de chaleur par contact.

La puissance thermique traversant la paroi d'un cylindre, de l'intérieur vers l'extérieur, vaut

$$Q = \frac{2\pi k L}{\ln \frac{d_e}{d_i}} (T_e - T_i) \quad (19.7)$$

avec :

- $d_e$  diamètre extérieur
- $d_i$  diamètre intérieur
- $k$  coefficient de conductibilité thermique
- $L$  longueur du cylindre
- $T_e$  température de la surface extérieure
- $T_i$  température de la surface intérieure

Pour un cylindre à paroi mince,  $d_i \geq 0,9 d_e$ , on peut se contenter d'appliquer la formule (19.6).

La chaleur transmise entre deux pièces qui se touchent passe par deux voies (fig. 19.4) : conduction par les aspérités des surfaces en contact et conduction à travers le fluide se trouvant entre les surfaces. Soit

$$\dot{Q} = \dot{Q}_a + \dot{Q}_f \quad (19.8)$$

On observe que la transmission s'améliore lorsqu'on augmente la pression apparente de serrage car, d'une part, les aspérités s'écrasent en accroissant la surface de conduction solide, d'autre part les pièces se rapprochent. Von Kiss [19.3] a vérifié expérimentalement que le coefficient de transmission de chaleur peut s'exprimer comme suit :

$$h = a \frac{k}{k_0} \left( \frac{HB_0}{HB} \frac{p}{p_0} \right)^\beta + \frac{k_f}{b(R_{a1} + R_{a2})} \quad (19.9)$$

avec :

$$\frac{p}{p_0} = 1 \text{ N/mm}^2 \quad \text{pression de contact apparente [N/mm}^2\text{]}$$

$$k = \frac{2 k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$
$$k_0 = 54,7 \text{ W/m K}$$
$$k_f$$
$$HB = \frac{2 HB_1 HB_2}{HB_1 + HB_2}$$
$$HB_0 = 155$$
$$R_{a1}, R_{a2}$$

coefficient de conductibilité thermique réduit des matériaux [W/m K]

coefficient de conductibilité thermique du fluide intermédiaire [W/m K]

dureté Brinell réduite

rugosités arithmétiques moyennes [m]

Les autres paramètres dépendent de l'état des surfaces :

Etat de surface	<i>a</i>		<i>b</i>	<i>β</i>
surface rectifiée, qualité N 4	1720	W/(m <sup>2</sup> K)	0,6	0,75
surface usinée, qualité N 6	2600	W/(m <sup>2</sup> K)	0,6	0,75
surface fine, qualité N 8	1600	W/(m <sup>2</sup> K)	0,6	0,5
surface grossière, qualité N 12	500	W/(m <sup>2</sup> K)	0,3	0,3

La transmission de chaleur est d'autant meilleure que les surfaces sont plus lisses et plus fortement serrées. On l'améliore en badigeonnant les surfaces avec de la graisse avant le montage ; il existe des pâtes particulièrement bonnes conductrices de la chaleur, qui s'utilisent en électronique pour le montage des transistors de puissance sur des radiateurs. Dans le cas des métaux, la puissance transmise par les aspérités est du même ordre de grandeur qu'à travers l'air. En revanche, cette dernière voie prédomine avec les polymères.

Le coefficient de conductibilité thermique des polymères utilisés en construction mécanique est environ 200 fois plus petit que celui de l'acier. C'est pourquoi l'échauffement de pièces en polymère est nettement plus grand que celui des pièces métalliques. De plus, comme leur résistance mécanique diminue vite à des températures déjà relativement basses (60 à 100°C), on conçoit qu'il faut calculer soigneusement l'échauffement des organes en polymère et prendre des mesures pour bien les refroidir. C'est pourquoi les coussinets en PTFE ou en polyamide sont toujours très minces.

19.3.2 Convection et rayonnement

Puissance thermique transmise

Un corps (1) dont la température de surface est *T<sub>s</sub>* baigne dans de l'air à la température *T<sub>a</sub>* (fig. 19.5a) ; à proximité se trouve encore un corps (2) ayant une température *T<sub>r</sub>*. Un élément de surface *dA* du premier corps échange de la chaleur par convection avec l'air ambiant. Désignant par *h<sub>c</sub>* le coefficient de transmission de chaleur par convection, la puissance échangée vaut

$$d\dot{Q}_c = h_c(T_s - T_a)dA$$

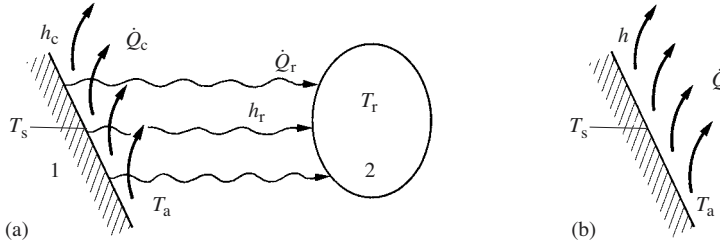
L'élément de surface échange aussi de la chaleur avec (2) par rayonnement,

$$d\dot{Q}_r = h_r(T_s - T_r)dA$$

où  $h_r$  est le coefficient de transmission de chaleur par rayonnement. Il dépend de la matière des solides, de la couleur et de l'état de leur surface, de leur température absolue et de l'orientation relative des surfaces. La puissance thermique totale sortant par l'élément de surface considéré vaut finalement

$$d\dot{Q} = d\dot{Q}_c + d\dot{Q}_r = [h_c(T_s - T_a) + h_r(T_s - T_r)]dA \quad (19.10)$$

Si le corps (2) est plus chaud que (1), ce dernier reçoit de la chaleur par rayonnement.



**Fig. 19.5** Transmission de chaleur: (a) convection et rayonnement; (b) modèle.

Les objets entourant une machine ont habituellement la même température que l'air ambiant. On peut poser  $T_r = T_a$  et réunir les coefficients de transmission de chaleur en un coefficient global (fig. 19.5b):

$$h = h_c + h_r \quad (19.11)$$

La valeur de  $h$  se détermine empiriquement ou se calcule à l'aide de la théorie du transfert de chaleur. L'expression (19.10) s'écrit alors plus simplement

$$d\dot{Q} = h(T_s - T_a)dA$$

Avec les températures habituelles, la part du rayonnement est de l'ordre de 10% à 20% de l'échange global.

La puissance thermique transférée au fluide par toute la surface s'obtient par intégration:

$$\dot{Q} = \int_A h(T_s - T_a)dA \quad (19.12)$$

$h$  et  $T_s$  dépendent de l'élément de surface considéré. On simplifie le calcul en faisant les hypothèses suivantes :

- le coefficient de transmission de chaleur  $h$  est constant et égal à une valeur empirique moyenne ;
- la température de toute la surface de refroidissement est égale à la température de son point le plus chaud,  $T_{s \max}$ .

On définit une surface de refroidissement équivalente  $A_e$  qui transmet, avec les deux hypothèses précédentes, la même puissance que le système réel ; cette surface est estimée de cas en cas. Par exemple, on admet très souvent que la chaleur transmise par conduction à la structure porteuse est nulle et que cette surface de contact est morte.

La puissance thermique de refroidissement devient alors

$$\dot{Q} = h A_e (T_{s \max} - T_a) \quad (19.13)$$

La valeur du coefficient de transmission de chaleur  $h$  dépend de l'agitation de l'air.

### Convection naturelle

On observe que l'air monte le long d'une surface chaude en créant des mouvements convectifs qui emportent la chaleur (fig. 19.5). Ces mouvements sont d'autant plus intenses que l'écart entre la température de la surface et celle de l'air est plus grand. Des essais permettent d'écrire le coefficient de transmission de chaleur en convection naturelle sous la forme

$$h = \psi (T_s - T_a)^p \quad (19.14)$$

où  $p = 1/4$  à  $1/3$  selon la disposition et l'orientation de la surface et  $\psi$  est un coefficient qui dépend de la géométrie et des caractéristiques du fluide. Dans l'air calme d'un local, on admet  $h = 15$  à  $20 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  pour un échauffement de  $40 \text{ K}$ .

La puissance échangée par convection naturelle vaut

$$\dot{Q} = \psi (T_s - T_a)^{1+p} A \quad (19.15)$$

### Convection forcée

Une surface est souvent exposée à un courant d'air de vitesse  $v$  donnée. C'est par exemple le cas d'une boîte à essieu d'un wagon en marche, ou d'une pièce exposée à l'air pulsé par un ventilateur. La valeur du coefficient de transmission de chaleur est conditionnée par le nombre de Reynolds de l'écoulement. On trouve souvent dans la littérature la formule

$$h = 7 + 12 \sqrt{v} \quad \left[ \text{W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \right] \quad v \text{ [m/s]} \quad (19.16)$$

valable pour la vitesse d'air  $v$  comprise entre 1 et 6 m/s.

La puissance de refroidissement augmente plus vite en convection naturelle avec l'écart de température, mais le calcul et l'expérience montrent que le refroidissement est beaucoup moins efficace qu'en convection forcée (fig. 19.6).

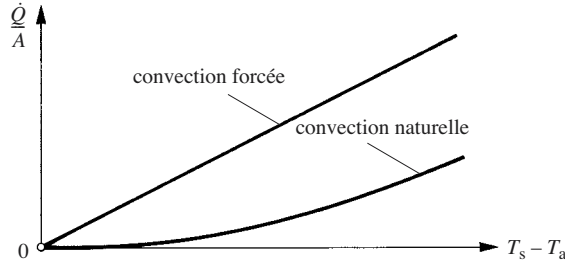


Fig. 19.6 Comparaison des échanges thermiques.

### 19.3.3 Echangeur de chaleur

On recourt à un échangeur de chaleur spécial dès que la puissance dissipée dépasse la capacité de refroidissement par la seule surface extérieure de l'organe à l'air ambiant. Ce cas se rencontre dans les gros paliers, les réducteurs puissants, les machines thermiques. On fait circuler l'huile à travers un échangeur de chaleur en profitant de la pompe de graissage ou parfois au moyen d'une pompe spéciale; l'échangeur est refroidi à l'air ou à l'eau (fig. 19.7). Le cas échéant, on prévoit un régulateur de température de l'huile fraîche.

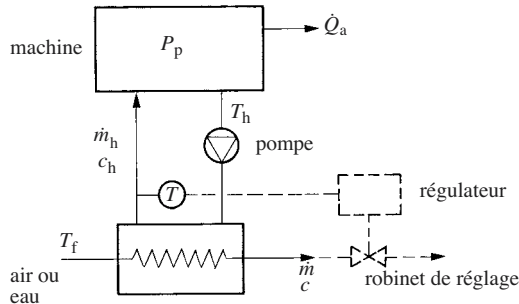


Fig. 19.7 Schéma d'un circuit de réfrigération extérieur.

Le débit-masse d'huile étant  $\dot{m}_h$  et sa chaleur massique  $c_h$ , le **débit de capacité thermique** d'huile est par définition

$$\dot{C}_h = \dot{m}_h c_h \quad (19.17)$$

On a, de même, le débit de capacité thermique du fluide réfrigérant

$$\dot{C} = \dot{m} c \quad (19.18)$$

On démontre que la puissance évacuée par l'échangeur de chaleur se calcule par

$$\dot{Q}_h = \varepsilon \dot{C}_{\min} (T_h - T_f) \quad (19.19)$$

avec:

$\dot{C}_{\min}$  débit de capacité thermique le plus petit de  $\dot{C}_h$  ou de  $\dot{C}_f$   
 $T_h$  température de l'huile à la sortie de la machine  
 $T_f$  température d'alimentation du fluide réfrigérant  
 $\varepsilon$  efficacité de l'échangeur.

Comprise entre 0 et 1, la valeur de l'efficacité dépend de la construction de l'échangeur, de la nature des fluides et de leur débit; elle se situe généralement vers 0,8. Son calcul sort du cadre de cet ouvrage [19.1, 19.2].

La puissance  $\dot{Q}_a$  (19.13) cédée à l'air s'ajoute à celle évacuée par l'échangeur de chaleur, alors

$$\dot{Q} = \dot{Q}_h + \dot{Q}_a = \varepsilon \dot{C}_{\min} (T_h - T_f) + h A_e (T_{s \max} - T_a) \quad (19.20)$$

Le système est tributaire du bon fonctionnement de la pompe à huile. L'installation est plus sûre et plus fiable en disposant un serpentin de refroidissement directement dans le bain d'huile (fig. 19.8). Dans ce cas, le débit minimal de capacité thermique intervenant dans (19.20) est celui du réfrigérant car, comme la température du bain est pratiquement uniforme, c'est formellement comme si le débit d'huile était infini. Il faut prendre garde à ne jamais faire plonger un tuyau de refroidissement dans l'huile par dessus la surface, car l'humidité de l'air peut condenser sur la surface froide du tuyau et l'eau pollue progressivement l'huile (fig. 19.9).

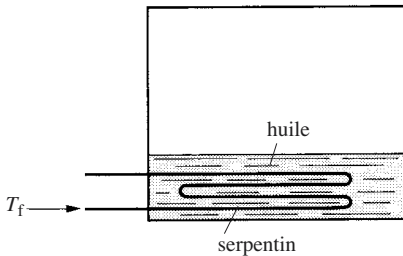


Fig. 19.8 Serpentin de refroidissement.

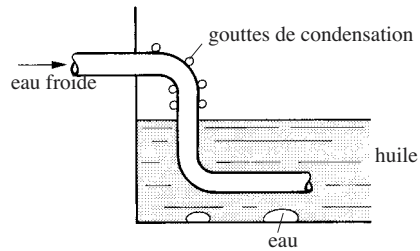
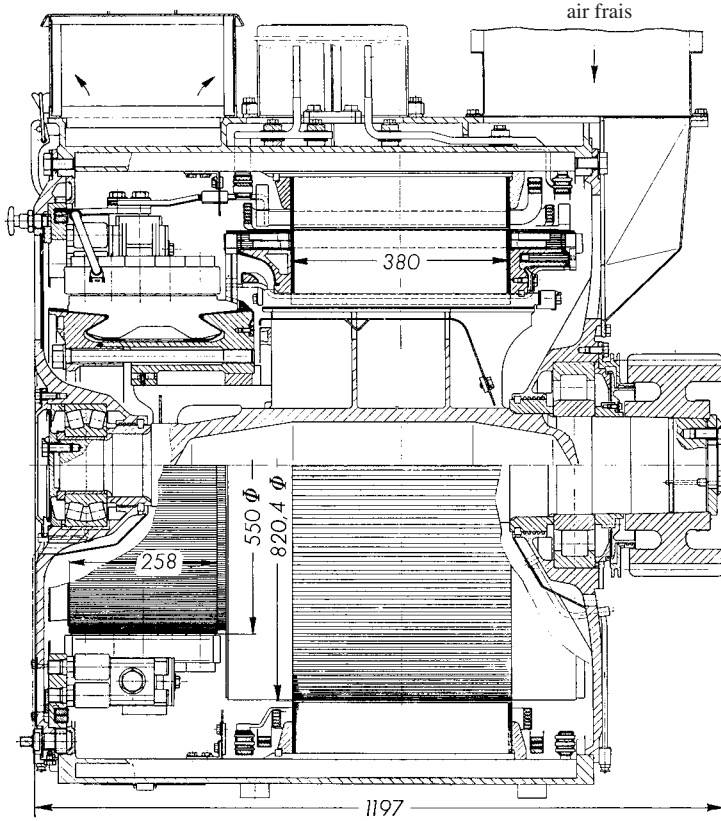


Fig. 19.9 Montage défectueux d'un serpentin de refroidissement.

On utilise parfois un ventilateur pour forcer l'air à travers les machines, notamment dans les machines électriques (fig. 19.10). Dans les turboalternateurs de moyenne puissance, on remplace l'air par un circuit fermé d'hydrogène sous pression. En effet la chaleur spécifique et la conductivité thermique élevées de ce gaz offrent de grands coefficients de transmission de chaleur et, à perte de charge égale, ce gaz emporte plus de chaleur. Les très gros turboalternateurs sont refroidis par de l'eau qui parcourt directement les conducteurs du bobinage exécuté sous forme de tuyaux en cuivre.



**Fig. 19.10** Moteur de traction monophasé des locomotives Re 4/4<sup>II</sup> des chemins de fer fédéraux suisses, 955 kW, 1160 t/min, avec ses canaux de circulation forcée d'air.

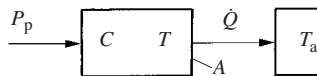
## 19.4 TEMPÉRATURE

### 19.4.1 Système élémentaire

#### Equation différentielle

Considérons un solide de surface  $A$  présentant une température uniforme  $T$  refroidi uniquement par l'air ambiant (fig. 19.11). La puissance de refroidissement vaut

$$\dot{Q} = hA(T - T_a)$$



**Fig. 19.11** Modèle thermique élémentaire.



En introduisant cette expression dans (19.4), on obtient l'équation différentielle

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = T_a + \frac{1}{hA} P_p \quad (19.21)$$

avec la *constante de temps thermique*

$$\tau = \frac{C}{hA} \quad (19.22)$$

### Régime permanent

Le système est en équilibre thermique lorsque la température en chacun de ses points est constante, c'est le régime permanent. Alors  $dT/dt = 0$  et l'équation (19.21) fournit immédiatement la température de régime permanent du solide

$$T_\infty = T_a + \frac{1}{hA} P_p \quad (19.23)$$

L'indice  $\infty$  signifie que la température est atteinte après un temps infiniment long, à la fin du régime transitoire. On a l'échauffement permanent

$$\Delta T_\infty = T_\infty - T_a = \frac{1}{hA} P_p \quad (19.24)$$

### Réponse indicielle au chauffage

Le système se trouve à la température initiale  $T_0$ . A l'instant  $t = 0$ , la puissance du chauffage devient  $P_p$ . Compte tenu de (19.23), on écrit (19.21) sous la forme :

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = T_\infty$$

La solution

$$T = T_0 + (T_\infty - T_0) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (19.25)$$

est représentée à la figure 19.12. En cas de démarrage à froid,  $T_0 = T_a$  et

$$T = T_a + (T_\infty - T_a) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (19.26)$$

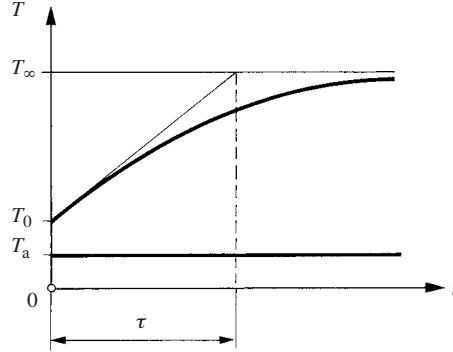


Fig. 19.12 Echauffement lors d'un saut indicel de puissance.

### Refroidissement sans chauffage

Si  $P_p = 0$ ,  $T_\infty = T_a$ . En portant cette valeur dans (19.25), il vient

$$T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (19.27)$$

A l'arrêt, les tourbillons d'air provoqués par la marche et la pulsion d'air par les ventilateurs attelés (machines électriques) cessent. Le coefficient de transmission de chaleur est moins bon, par conséquent la constante de temps thermique à l'arrêt est plus longue qu'en marche.

### Marche intermittente régulière

Étudions une marche intermittente régulière (fig. 19.13). Pendant le temps de marche  $t_m$ , le système reçoit la puissance  $P_p$ , sa constante de temps est  $\tau_m$ ; il est arrêté pendant  $t_a$  avec une constante de temps  $\tau_a$ . Après quelques cycles, la température oscille régulièrement entre  $T_{\min}$  et  $T_{\max}$ . A l'échauffement (1), on part de  $T_{\min}$  pour aboutir à  $T_{\max}$ . L'application de (19.25) donne:

$$T_{\max} = T_{\min} + (T_\infty - T_{\min}) \left( 1 - e^{-\frac{t_m}{\tau_m}} \right)$$

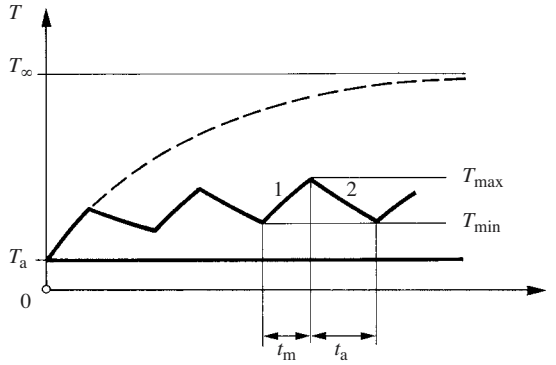
De même, au refroidissement (2), on part de  $T_{\max}$  pour aboutir à la température  $T_{\min}$  à la fin de la période de refroidissement  $t_a$ . Par (19.27), on a

$$T_{\min} = T_a + (T_{\max} - T_a)e^{-\frac{t_a}{\tau_a}} \quad (19.28)$$

Les températures  $T_{\min}$  et  $T_{\max}$  sont inconnues, mais on peut les déterminer en résolvant le système formé par les deux dernières équations. Tous calculs faits, il vient:

$$T_{\max} = T_a + \frac{1 - e^{-\frac{t_m}{\tau_m}}}{1 - e^{-\left(\frac{t_m}{\tau_m} + \frac{t_a}{\tau_a}\right)}} (T_{\infty} - T_a) \quad (19.29)$$

$T_{\min}$  se calcule ensuite par (19.28). On reconnaît que le numérateur représente l'échauffement à la fin de la première injection d'énergie.



**Fig. 19.13** Marche intermittente régulière.

#### Remarque

Il n'est pas toujours nécessaire de calculer le coefficient de transmission de chaleur et la surface de refroidissement d'un objet pour déterminer sa constante de temps thermique. En effet, tirons le produit  $hA$  de (19.23) et introduisons-le dans l'expression (19.22) de la constante de temps. Il vient

$$\tau = C \frac{T_{\infty} - T_a}{P_p} \quad (19.30)$$

La capacité thermique s'estime à partir de la masse;  $T_{\infty}$  et  $T_a$  se mesurent. Si la puissance dissipée  $P_p$  est inconnue, on peut faire une expérience en installant un chauffage électrique de puissance  $P_e$  dans la machine pendant qu'elle fonctionne, afin de profiter des mêmes conditions de refroidissement. La température passant de  $T_{\infty}$  à  $T_{\infty e}$ , on obtient

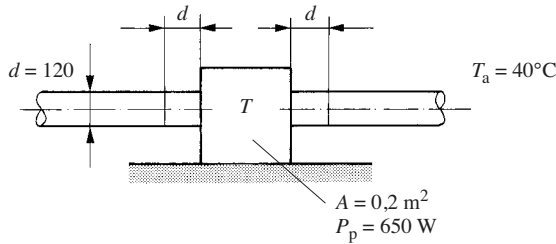
$$\tau = C \frac{T_{\infty e} - T_{\infty}}{P_e} \quad (19.31)$$

On lit dans les formules qu'à puissance égale, la constante de temps est d'autant plus courte que l'échauffement permanent est plus petit.

**Application numérique : refroidissement d'un palier**

Un palier hydrodynamique (fig. 19.14) dissipe 650 W. Sa surface extérieure est  $0,2 \text{ m}^2$ , on néglige la conduction de chaleur vers la structure porteuse. L'arbre est chaud dans le palier, sa température se rapproche de la température ambiante en s'éloignant du palier. On admet que la température de la surface de l'arbre est égale à celle du palier sur une longueur égale au diamètre de l'arbre. La surface équivalente de refroidissement est alors

$$A_e = 0,2 + 2\pi 0,12^2 = 0,29 \text{ m}^2$$

**Fig. 19.14** Palier.

La température de surface du palier en régime permanent s'obtient par (19.23). En admettant un coefficient de transmission de chaleur  $h = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ , avec une température ambiante de  $40^\circ\text{C}$ , on a

$$T_\infty = 40 + \frac{1}{20 \times 0,29} \times 650 = 152^\circ\text{C}$$

Cette température ne devrait pas excéder  $70^\circ\text{C}$  pour que le graissage fonctionne correctement. On est donc obligé de prévoir un refroidissement auxiliaire par circulation d'huile. Le refroidissement naturel évacuera

$$\dot{Q}_a = 20 \times 0,29(70 - 40) = 174 \text{ W}$$

et le circuit d'huile doit être dimensionné pour enlever

$$\dot{Q}_h = 650 - 174 = 476 \text{ W}$$

**19.4.2 Température intérieure**

La température des organes intérieurs d'un mécanisme est naturellement plus élevée que celle du carter. En régime permanent, elle résulte d'une somme de sauts de température dans les pièces le long du parcours de la chaleur et entre le carter et l'air ambiant (fig. 19.1). Soit, pour la pièce  $j$ ,

$$T_{j\infty} = T_a + \Delta T_{1\infty} + \Delta T_{2\infty} + \dots \quad (19.32)$$

Les écarts de température se calculent avantageusement par la méthode des résistances thermiques [19.2]. Afin de mettre la température intérieure facilement en relation avec l'échauffement du carter, on peut écrire, en régime permanent seulement, que l'échauffement d'un organe est proportionnel à l'échauffement de surface du carter :

$$T_{j\infty} - T_a = \xi_j (T_{s\infty} - T_a)$$

où  $\xi_j$  est le *facteur d'échauffement intérieur* de la pièce considérée. Avec la température de surface du carter donnée par (19.23), on obtient la température d'une pièce intérieure :

$$T_{j\infty} = T_a + \xi_j \frac{1}{hA} P_p \quad (19.33)$$

Du point de vue constructif, on diminue l'échauffement intérieur en utilisant des matériaux bons conducteurs de la chaleur, en prévoyant de larges sections de conduction de chaleur, en serrant fortement les pièces l'une contre l'autre et en arrosant abondamment les surfaces glissantes sources de chaleur avec de l'huile.

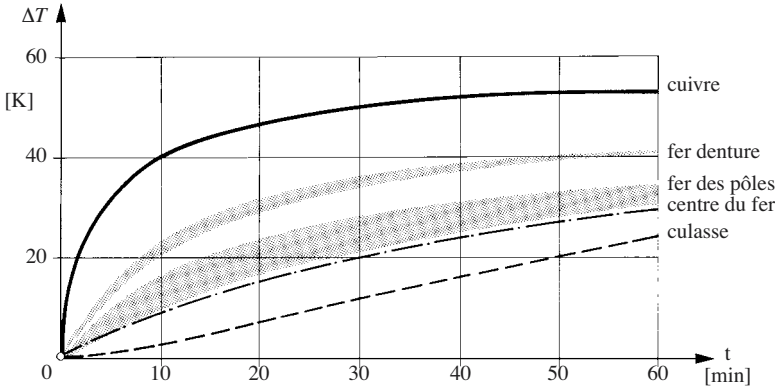


Fig. 19.15 Réponse indicielle à 220 MW d'un turboalternateur.

L'évolution transitoire de la température d'un organe de machine est plus compliquée que ce que nous venons de voir parce que la chaleur, en partant de la source, se propage progressivement dans le corps des pièces et d'une pièce à l'autre. Dans le cas le plus simple, l'échauffement peut se décrire par une somme de termes variant exponentiellement :

$$T = T_a + \Delta T_{1\infty} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + \Delta T_{2\infty} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) + \dots \quad (19.34)$$

La figure 19.15 illustre l'évolution de l'échauffement des pièces du rotor d'un turboalternateur (220 MW) refroidi à l'intérieur par une circulation d'hydrogène. Les pièces les plus massives ont la plus grande constante de temps.

### 19.4.3 Echauffement avec source de chaleur volumique

On rencontre des organes où la chaleur naît au sein de leur volume, par exemple les bobinages électriques (effet Joule) ou les amortisseurs de vibration en caoutchouc. Considérons un amortisseur situé entre une plaque de base et la machine (fig. 19.16). On a la puissance dégagée par unité de volume

$$P_{pv} = \frac{P_p}{V} = \frac{P_p}{A e} \quad (19.35)$$

avec :

$P_p$	puissance vibratoire dissipée en chaleur
$V$	volume de l'amortisseur
$A$	surface d'appui de l'amortisseur
$e$	épaisseur de l'amortisseur

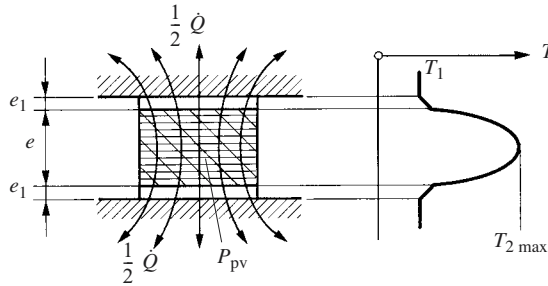


Fig. 19.16 Distribution de chaleur et de température dans un amortisseur en caoutchouc.

Supposons que la chaleur ne s'évacue que par conduction à travers les plaques de base en acier, la déperdition à l'air étant négligeable. La distribution de température est linéaire dans les plaques et parabolique dans le caoutchouc où se trouve la source de chaleur. L'échauffement le plus grand se trouve au centre du caoutchouc et vaut

$$T_{2 \max} - T_1 = \frac{e e_1 P_{pv}}{2 k_1} + \frac{e^2 P_{pv}}{8 k_2} \quad (19.36)$$

avec :

$k_1$	coefficient de conductivité thermique de l'acier
$k_2$	coefficient de conductivité thermique du caoutchouc
$e_1$	épaisseur des plaques de fixation

En introduisant la puissance volumique (19.35), il vient

$$T_{2\max} - T_1 = \frac{P_p}{2A} \left( \frac{e_1}{k_1} + \frac{e}{4k_2} \right) \quad (19.37)$$

La chaleur dégagée par de fortes vibrations peut échauffer un amortisseur au point de le détruire. On a intérêt à utiliser des amortisseurs à grande surface d'appui  $A$ . Les accouplements élastiques en caoutchouc posent les mêmes problèmes.

## 19.5 ÉCHAUFFEMENT DE SURFACES GLISSANTES

### 19.5.1 Température de surface

On a étudié jusqu'ici l'échauffement du corps des organes de machines. On se préoccupe maintenant de l'échauffement local des surfaces de frottement et de la distribution de la chaleur immédiatement sous la surface des pièces.

La chaleur de frottement naît à l'extrémité des aspérités en contact. Elle est ensuite transmise au corps des pièces par conduction (fig. 19.17). Il s'établit un champ de température dans les pièces et dans les aspérités. Appelons  $T'_{s1}$  et  $T'_{s2}$  les températures de surface des aspérités; on admet qu'elles sont égales au point de contact, donc

$$T'_{s1} = T'_{s2} \quad (19.38)$$

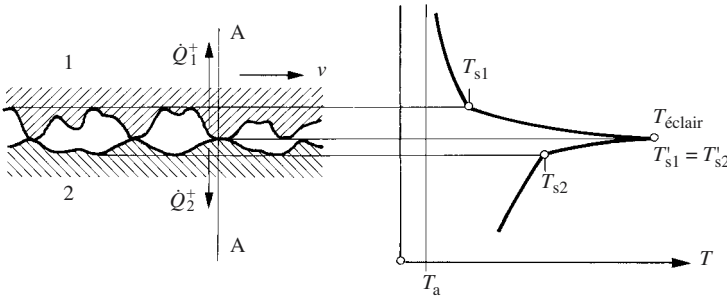


Fig. 19.17 Distribution de température au contact de deux solides en frottement.

La figure 19.17 montre le profil de température dans un plan A-A, la température commune de contact est la plus élevée. Le contact des aspérités est fugitif au cours du mouvement, comme l'est l'échauffement des aspérités, c'est pourquoi on appelle **température-éclair** la plus haute température de surface atteinte au cours du frottement.

Le gradient de température dans les aspérités est intense à cause de la petite section qu'elles offrent à la transmission de la chaleur. En outre, vu la brièveté des contacts d'aspérité, il est extrêmement difficile de mesurer la température-éclair effective. Les mesures donnent plutôt la température de surface à la base des aspérités, c'est-à-dire les valeurs  $T_{s1}$  et  $T_{s2}$  de la figure 19.17.

Les calculs d'échauffement de surface développés ci-après reposent sur l'hypothèse que

$$T_{s1} \approx T_{s2} \quad (19.39)$$

Il faut se souvenir que cette égalité suppose que la chute de température est pareille dans les aspérités des deux surfaces et qu'elle ne donne pas la température-éclair à l'extrémité des aspérités. Cette dernière est en effet beaucoup plus élevée lors du mouvement, elle peut atteindre le point de fusion de l'un ou même des deux matériaux conjugués et entraîner le soudage des pièces lors du grippage (§ 3.5.1). Cette constatation est à la base du dimensionnement au grippage des organes de machines.

### 19.5.2 Echauffement d'un corps semi-infini

Considérons un solide s'étendant à l'infini à partir d'une surface plane (fig. 19.18a). Les axes  $x$  et  $y$  d'un repère orthonormé sont situés dans le plan de la surface, l'axe  $z$  est dirigé vers l'intérieur du solide. Supposons que la température soit uniforme dans tout plan parallèle à la surface et ne dépende que de la coordonnée  $z$  et du temps,  $T(z, t)$ , (fig. 19.18b). On a l'équation bien connue de conduction de la chaleur dans le solide, sans source de chaleur interne :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (19.40)$$

avec la *diffusivité thermique* du matériau

$$a = \frac{k}{\rho c} \quad [\text{m}^2/\text{s}] \quad (19.41)$$

avec :

$k$  coefficient de conductivité thermique  
 $\rho$  masse volumique  
 $c$  chaleur massique

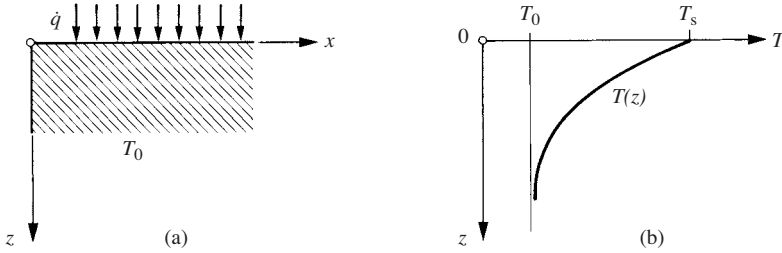


Fig. 19.18 Propagation de chaleur dans un corps semi-infini : (a) flux de chaleur ; (b) température.

Le corps a tout d'abord partout la température  $T_0$ . A l'instant  $t = 0$ , sa surface est exposée à un flux de chaleur uniforme  $\dot{q}$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]. La résolution de l'équation différentielle (19.40) avec ces conditions initiales donne la distribution de la température

$$T = T_0 + \left[ \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}b} e^{-\frac{z^2}{4at}} - \frac{z}{k} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right] \dot{q} \quad (19.42)$$



$b$  représente le *coefficient de pénétration de la chaleur*; c'est une caractéristique du matériau qui vaut

$$b = \sqrt{k \rho c} \quad \left[ \text{W} \sqrt{\text{s}} / (\text{m}^2 \text{ K}) \right] \quad (19.43)$$

et la *fonction d'erreur de Gauss* est

$$\text{erf} \frac{z}{2\sqrt{at}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{at}}} e^{-\eta^2} d\eta \quad (19.44)$$

sa valeur numérique se trouve dans des tables.

La température de surface s'obtient en faisant  $z = 0$  dans (19.42) et  $\text{erf}(0) = 0$

$$T_s = T_0 + \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi} b} \dot{q} \quad (19.45)$$

On calcule aisément que l'échauffement  $(T - T_0)$  est égal à 5% de l'échauffement de surface  $(T_s - T_0)$  à la profondeur

$$z_5 = 2,35\sqrt{at} \quad (19.46)$$

et l'échauffement n'est que 1% en un point situé à la distance

$$z_1 = 3,21\sqrt{at} \quad (19.47)$$

sous la surface. Pour de l'acier,  $a = 16,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , la profondeur est alors

$$\begin{aligned} \bullet \text{ échauffement 5\%} & \quad z_5 = 9,5\sqrt{t} \quad \left[ \text{mm} \right] \\ \bullet \text{ échauffement 1\%} & \quad z_1 = 12,9\sqrt{t} \quad \left[ \text{mm} \right] \end{aligned}$$

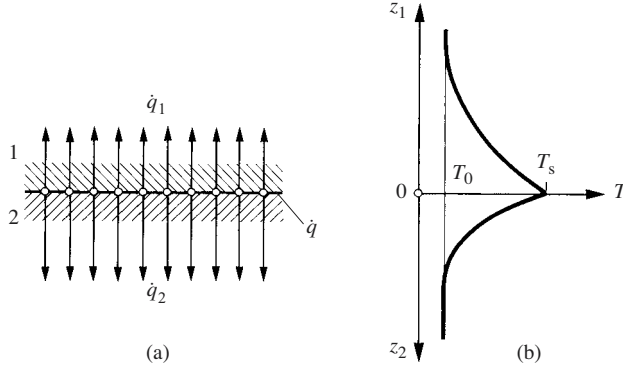
Ces résultats montrent qu'une pièce épaisse de plus de 15 mm se comporte comme un solide semi-infini si le flux de chaleur est appliqué pendant 1 seconde. Si le flux de chaleur ne dure que 0,01 s, une pièce de 2 mm d'épaisseur équivaut déjà à un corps semi-infini pour lequel on peut calculer l'échauffement de la surface avec la formule (19.45), c'est le cas notamment des engrenages.

### 19.5.3 Frottement permanent de deux corps semi-infinis

On rencontre des organes de machine où une surface frotte constamment contre une autre. C'est par exemple le cas des plateaux d'un limiteur de couple qui patine longtemps contre les garnitures.

Le frottement engendre le *flux de production de chaleur*

$$\dot{q} = \mu p v \quad (19.48)$$



**Fig. 19.19** Répartition de la chaleur: (a) flux de chaleur; (b) température.

avec:

$\mu$	coefficient de frottement
$p$	pression apparente de contact
$v$	vitesse de glissement

Ce flux se répartit entre les corps (1) et (2) (fig. 19.19a)

$$\dot{q} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \quad (19.49)$$

Supposons que les deux solides aient la même température  $T_0$  avant le début du frottement, l'échauffement de leur surface résulte immédiatement de (19.45):

$$\left. \begin{aligned} T_{s1} - T_0 &= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi} b_1} \dot{q}_1 \\ T_{s2} - T_0 &= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi} b_2} \dot{q}_2 \end{aligned} \right\} \quad (19.50)$$

Comme expliqué au paragraphe 19.5.1, on admet que les deux surfaces ont approximativement la même température  $T_s = T_{s1} \approx T_{s2}$ . En égalant les deux expressions ci-dessus, on trouve le rapport des flux de chaleur

$$\Phi = \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (19.51)$$

Avec (19.49), le flux de chaleur pénétrant dans chaque corps vaut

$$\dot{q}_1 = \frac{b_1}{b_1 + b_2} \dot{q} \quad \dot{q}_2 = \frac{b_2}{b_1 + b_2} \dot{q} \quad (19.52)$$

On obtient enfin l'échauffement des surfaces en portant ces expressions dans (19.50):

$$T_s - T_0 = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}(b_1 + b_2)} \dot{q} \quad (19.53)$$

### 19.5.4 Échauffement des embrayages et des freins

#### Flux de chaleur

La puissance de frottement diminue du début à la fin d'un processus d'embrayage (fig. 19.20) parce que le glissement est le plus intense au début. La situation est analogue dans un frein de ralentissement puisque la vitesse diminue progressivement. La température des surfaces de frottement croît, passe par un maximum, puis décroît.

La quantité d'énergie  $W_p$  est dissipée pendant le temps de glissement  $t_1$  dans la surface de glissement.  $t_1$  est soit la durée de patinage  $t_E$  d'un embrayage soit le temps de serrage d'un frein, habituellement le temps d'arrêt  $t_a$ . Admettons une distribution uniforme sur la surface totale de frottement  $A_t$ . Le flux de puissance-chaleur moyen généré vaut

$$\bar{q} = \frac{W_p}{A_t t_1}$$

Pour  $n$  disques frottants sur deux faces d'aire  $A_1$ , on a

$$A_t = 2n A_1$$

La distribution du flux sur les disques rodés est uniforme parce que le produit  $pr$ , et donc  $pv$ , est constant (§ 8.7.6). Le flux est légèrement supérieur sur le rayon extérieur des disques neufs.

#### Processus unique

On distingue plusieurs cas, selon la valeur du *nombre de Fourier*:

$$Fo = \frac{at_1}{\ell^2} \quad (19.54)$$

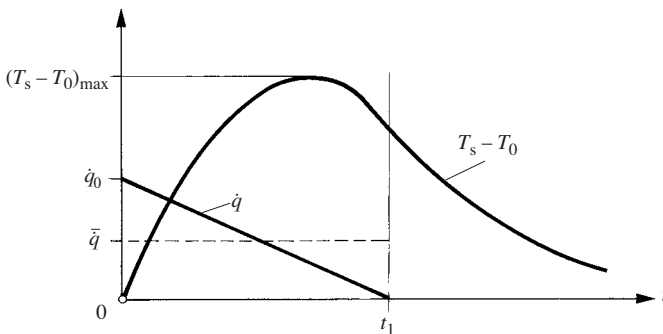
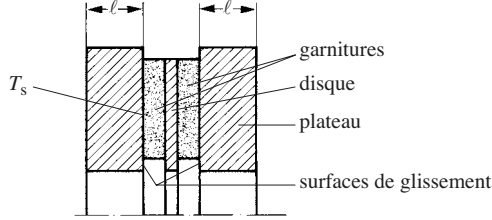


Fig. 19.20 Charge thermique et échauffement d'un embrayage.

avec:

- $a$  diffusivité thermique du matériau
- $t_1$  durée de synchronisation ou de freinage
- $\ell$  épaisseur des pièces depuis la source de chaleur jusqu'à la surface de refroidissement (fig. 19.21)



**Fig. 19.21** Schéma d'un embrayage monodisque.

Pour un processus d'embrayage ou de freinage unique, l'échauffement maximal vaut [19.4]:

- Deux corps semi-infinis,  $Fo \leq 0,5$ :

$$(T_s - T_0)_{\max} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{t_1}}{b_1 + b_2} \bar{q} \quad (19.55)$$

- Embrayage monodisque avec deux garnitures isolantes (fig. 19.21),  $Fo \leq 1,132$ :

$$(T_s - T_0)_{\max} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{t_1}}{b} \bar{q} \quad (19.56)$$

$b$  est le coefficient de pénétration de la chaleur du matériau des plateaux.

- Embrayage monodisque avec garnitures isolantes (fig. 19.21),  $Fo \geq 1,132$ . Les plateaux sont assez minces pour qu'on puisse admettre qu'ils s'échauffent uniformément, ou alors le glissement dure longtemps;

$$(T_s - T_0)_{\max} = \frac{t_1 \bar{q}}{\rho c \ell} \quad (19.57)$$

Dans les embrayages multidisques, chaque disque intérieur du paquet de disques reçoit de la chaleur sur ses deux faces. La chaleur d'une surface de glissement n'échauffe toujours que la demi-épaisseur d'un disque. C'est pourquoi on calcule le nombre de Fourier avec la moitié de l'épaisseur  $e$  d'un disque en introduisant  $\ell = e/2$  dans (19.54). L'échauffement maximal d'un disque est égal à la moitié de la valeur donnée par la formule (19.56) lorsque  $Fo \leq 1,132$  parce que la puissance de frottement est répartie sur deux faces; il est égal à la valeur (19.57) lorsque la valeur  $Fo$  est supérieure.

La chaleur dégagée sur les disques est transmise par conduction à la surface de réfrigération. Ce sont donc les disques situés au milieu du paquet qui chauffent le plus.

Après la synchronisation, l'embrayage se refroidit. On distingue deux cas :

- la chaleur ne sort de l'embrayage que par sa surface extérieure apparente tant que les éléments sont serrés ;
- la chaleur peut encore s'évacuer par les surfaces de frottement lorsque l'embrayage est déclenché, pour autant qu'un fluide (habituellement de l'huile) soit injecté ; la constante de temps est alors plus courte que dans le premier cas.

### Enclenchements intermittents

Un processus d'embrayage débute souvent avant que l'organe ne soit complètement refroidi. En cas de marche intermittente régulière, on calcule l'échauffement maximal par la formule (19.29). Il convient d'étudier séparément l'évolution de la température des surfaces frottantes et l'échauffement global de l'embrayage ou du frein.

Compte tenu de la construction, la température des surfaces de glissement varie relativement fortement tandis que la température d'ensemble ne fluctue que très peu à cause de la grande constante de temps de tout l'organe.

### Application numérique

Un embrayage multidisque fonctionne à sec dans l'air. Les disques sont alternativement en acier et en bronze fritté. On cherche la température maximale des disques et celle du corps de l'embrayage.

- Travail dissipé pendant la synchronisation:  $W_p = 2150 \text{ J}$
- Durée d'un cycle:  $24 \text{ s}$
- Durée de synchronisation:  $t_s = 1,14 \text{ s}$
- Durée de l'état enclenché:  $t_e = 14 \text{ s}$
- Durée de l'état déclenché:  $t_d = 10 \text{ s}$
- Surface de réfrigération extérieure:  $A = 0,046 \text{ m}^2$
- Nombre de disques:  $n = 4$
- Surface de frottement:  $A_f = 19,6 \text{ cm}^2$
- Epaisseur des disques:  $e = 2,3 \text{ mm}$
- Température de l'air ambiant:  $T_a = 30^\circ\text{C}$

#### Température de l'embrayage

Compte tenu de la rotation, on estime le coefficient de transmission de chaleur,  $h = 28 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ .

Puissance-chaleur moyenne pendant la synchronisation :

$$\bar{P}_p = W_p / t_s = 2150 / 1,14 = 1886 \text{ W}.$$

Echauffement en régime permanent, selon (19.24):

$$\Delta T_\infty = \frac{1886}{28 \times 0,046} = 1464 \text{ K}$$

Calculons la constante de temps thermique de l'embrayage. Avec la masse de l'embrayage,  $m = 4,8 \text{ kg}$ , et la chaleur massique de l'acier,  $c = 460 \text{ J/(kg K)}$ , on a par (19.5) et (19.22):

$$\tau = \frac{4,8 \times 460}{28 \times 0,046} = 1607 \text{ s}$$

Cette constante de temps est valable pendant que l'élément secondaire tourne et aussi lorsqu'il est arrêté parce que l'élément primaire est toujours en mouvement. L'application de (19.29) donne

$$T_{\max} = 30 + 1464 \frac{1 - e^{-1,14/1607}}{1 - e^{-24/1607}} = 30 + 70,0 = 100^\circ\text{C}$$

La température minimale vaut par (19.28):

$$T_{\min} = 30 + 70 e^{-22,86/1607} = 30 + 69 = 99^\circ\text{C}$$

La température du corps de l'embrayage varie très peu à cause de sa forte inertie thermique. On calcule par la formule (19.25) que le premier processus d'embrayage n'échauffe l'organe que de 1,038 K; on se rend compte de l'effet massif de la répétition cyclique des opérations.

#### *Température au cœur de l'embrayage*

On estime que la chute de température entre la région centrale du paquet de disques et la surface extérieure est de l'ordre de 5 K. La température centrale est donc  $105^\circ\text{C}$ .

#### *Température des disques*

Valeur des caractéristiques des matériaux:

	Acier	Bronze fritté	
produit $\rho c$	$3,75 \times 10^6$	$3,35 \times 10^6$	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
conductibilité thermique $k$	45	60	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
diffusivité (19.41) $a$	$12 \times 10^{-6}$	$18 \times 10^{-6}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$

Le flux de puissance-chaleur moyen vaut

$$\bar{q} = \frac{W_p}{2n A_l t_s} = \frac{2150}{2 \times 4 \times 19,6 \times 1,14} = 12,0 \text{ W/cm}^2$$

Le nombre de Fourier (19.54) se calcule avec la demi-épaisseur des disques,  $\ell = 0,00115 \text{ m}$ . Il vaut 10,34 pour les disques en acier et 15,5 pour ceux en bronze. Comme  $Fo > 1,132$ , l'échauffement se calcule par la formule (19.57); on trouve alors  $(T_s - T_0)_{\max} = 24,3 \text{ K}$  pour l'acier et  $27,2 \text{ K}$  pour le bronze.

On estime que la constante de temps thermique des disques en acier est de l'ordre de 20 s lorsqu'ils sont serrés et 60 s lorsque l'embrayage est déclenché, car la transmission de chaleur entre les disques est alors moins bonne; pour le bronze on a respectivement 18 s et 54 s. L'échauffement maximal en régime intermittent permanent doit se calculer en tenant compte du fait que la constante de temps dépend de l'état de l'embrayage. Sur la base de (19.29) on peut écrire

$$(T_s - T_0)_{\max} = \frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{t_e}{\tau_e} + \frac{t_d}{\tau_d}\right)}} (T_s - T_0)_{\max 1}$$

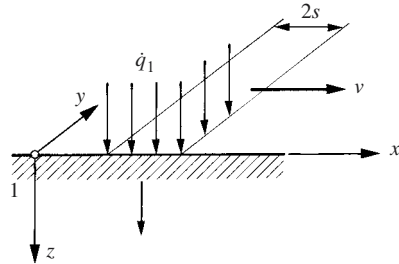
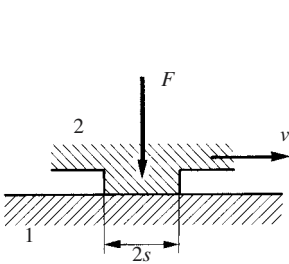
avec :

$t_e$	durée de l'état enclenché
$t_d$	durée de l'état déclenché
$\tau_e$	constante de temps thermique dans l'état enclenché
$\tau_d$	constante de temps thermique dans l'état déclenché
$(T_s - T_0)_{\max 1}$	échauffement lors de la première synchronisation

On trouve un échauffement maximal de 41,9 K des disques en acier et de 44 K pour le bronze. Les disques en bronze sont les plus chauds, ils atteignent une température théorique de 149° C.

### 19.5.5 Source de chaleur mobile sur une surface

De nombreux organes de machines voient les zones de frottement se déplacer à la surface des pièces : cames et suiveurs, balais sur des bagues de contact, freins à sabot ou à disque, engrenages. Le bref passage d'une source de chaleur sur une pièce ne lui permet naturellement pas d'atteindre la température de régime permanent calculée ci-dessus.



**Fig. 19.22** Déplacement d'un contact rectangulaire. **Fig. 19.23** Déplacement d'une source de chaleur.

Une pièce (2) frotte sur une autre (1) (fig. 19.22) avec une vitesse de glissement  $v$ . La surface de contact constitue une source de chaleur mobile à la surface du corps (1) (fig. 19.23). Le flux de chaleur engendré (19.48) est donc distribué sur la surface comme la pression.

Un élément de la surface (1) s'échauffe au passage de la source de chaleur, puis se refroidit à nouveau. Il est évident que l'échauffement sera moins important si le passage est bref. L'étude conduit à des intégrales qui ne peuvent pas se calculer analytiquement, mais on peut trouver des solutions approchées suffisamment précises pour la pratique. Elles dépendent de la vitesse de glissement vis-à-vis de la vitesse de propagation de l'onde thermique dans le solide présentant la plus grande surface de glissement, en l'occurrence le corps (1). Définissons le **chiffre de vitesse** ou **nombre de Péclet**

$$Pe = \frac{s v}{4 a_1} \quad (19.58)$$

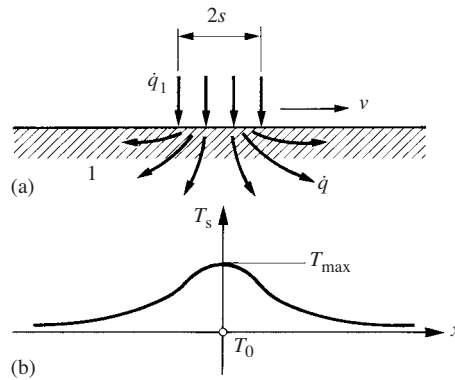
où  $s$  est la demi-largeur de la bande de contact (fig. 19.23) et  $a_1$  la diffusivité thermique du matériau du solide (1). On distingue quatre domaines de vitesse.

### Basse vitesse, $Pe \leq 0,1$

La vitesse de déplacement dans ce domaine est

$$v \leq 0,4 \frac{a_1}{s}$$

Par exemple, pour de l'acier,  $a_1 = 16 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $v \leq 0,64 \times 10^3 \text{ m/s}$  si  $2s = 20 \text{ mm}$ ,  $v \leq 0,064 \text{ m/s}$  si  $2s = 0,2 \text{ mm}$ . On voit que ce domaine de vitesse est très lent, il ne présente pratiquement pas d'intérêt en mécanique, car la production de chaleur est alors très faible.



**Fig. 19.24** Déplacement lent d'une source de chaleur uniforme: (a) flux de chaleur; (b) profil de température.

La chaleur se propage de part et d'autre de la surface de contact (fig. 19.24), elle chauffe le corps à l'avant de la pièce en mouvement. On admet, avec une approximation suffisante, que l'échauffement est symétrique par rapport à l'axe central de la source; la répartition de la chaleur entre les deux corps et l'échauffement de surface peuvent se calculer par (19.52) et (19.53) comme si la source de chaleur était immobile.

### Vitesse intermédiaire, $0,1 < Pe \leq 5$

On doit calculer par une méthode numérique, car il n'existe pas de solution simple approchée.

### Vitesse rapide, $5 < Pe \leq 100$ (contact hertzien)

Pour de l'acier, la vitesse est comprise entre 0,032 et 0,64 m/s si  $2s = 20 \text{ mm}$  ou entre 3,2 et 64 m/s si  $2s = 0,2 \text{ mm}$ . C'est un domaine de vitesse technique intéressant qui a été étudié par Blok [19.5] et par Archard [19.6]. Voici la démarche de ce calcul.

La répartition de pression d'un contact hertzien est elliptique, mais on peut faire un calcul analytique de l'échauffement en approchant l'ellipse par une parabole. Blok



suppose encore que le déplacement de la source de chaleur est assez rapide pour que l'échauffement soit nul devant la source et que toute la chaleur s'écoule sous la source, perpendiculairement à la surface du corps considéré comme étant semi-infini.

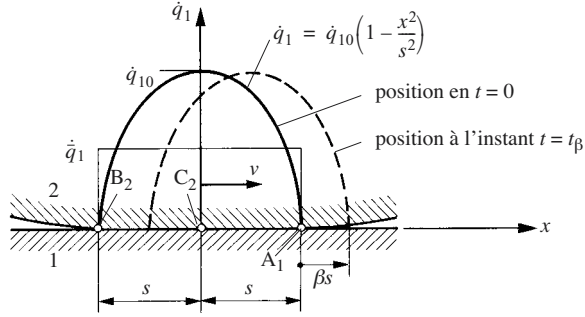


Fig. 19.25 Déplacement d'une source de chaleur.

A l'instant  $t = 0$ , la source de chaleur (fig. 19.25) se trouve dans une certaine position. Le point  $A_1$  et toute la surface de (1) devant ce point se trouvent à la température initiale  $T_0$  du corps (1).

La source de chaleur avance maintenant d'une quantité  $\beta s$ , référée à la demi-largeur de la bande de contact par le nombre relatif  $\beta$ , pendant le temps

$$t_\beta = \frac{\beta s}{v}$$

Un élément de surface entourant le point  $A_1$  reçoit un flux de chaleur croissant jusqu'à ce que le point central  $C_2$  de la source de chaleur coïncide avec  $A_1$ , c'est-à-dire pour  $0 < \beta \leq 1$ . L'apport de chaleur diminue ensuite lorsque la zone  $B_2$ - $C_2$  passe sur  $A_1$ . La température  $T_{1\beta}$  du point  $A_1$  à l'instant  $t_\beta$ , lorsque la source s'est déplacée de la distance  $\beta s$ , résulte d'un bilan thermique. Tous calculs faits, on trouve

$$T_{1\beta} = T_0 + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \frac{\dot{q}_{10}}{\rho_1 c_1 v} \sqrt{\frac{s v}{4 a_1}} (5\beta - 2\beta^2) \sqrt{\beta} \quad (19.59)$$

La température évolue avec l'avance relative  $\beta$ , elle est maximale lorsque  $\beta = 1,5$ , c'est-à-dire en un point situé à mi-distance entre le milieu de la bande et le point de contact arrière  $B_2$  (fig. 19.26). La température maximale s'obtient pour cette valeur; après introduction du flux de chaleur moyen, on trouve

$$T_{1\max} = T_0 + C \frac{\bar{q}_1}{b_1} \sqrt{\frac{2s}{v}} \quad (19.60)$$

où  $b_1$  est le coefficient de pénétration de chaleur (19.43) du matériau (1). La quantité  $2s/v$  est le temps de passage de la source de chaleur sur un point de la surface. La

courbe de température  $T_{1\beta}$  se déplace avec la source de chaleur, c'est pourquoi on lui donne le nom de **température instantanée** (*flash temperature*) qu'il ne faut pas confondre avec la température-éclair à la pointe des aspérités (fig. 19.17).

Une intégration numérique donne  $C = 1,11$  pour une distribution elliptique,  $C = 1,17$  pour une distribution parabolique et  $C = 1,13$  lorsque la distribution de chaleur est uniforme.

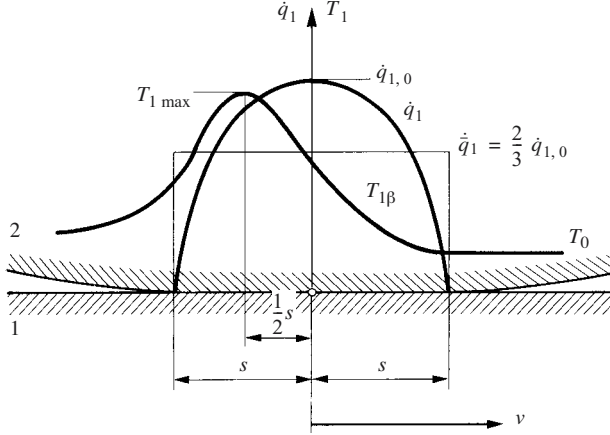


Fig. 19.26 Température de la surface du corps (1) de la figure 19.25.

Le flux de chaleur de frottement se répartit entre les pièces (1) et (2),

$$\bar{q} = \mu \bar{p} v = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 \quad (19.61)$$

En régime permanent de température, la chaleur  $\bar{q}_2$  pénètre toujours dans la pièce mobile (2) par la même surface. Par conséquent, l'intégrale de ce flux sur la surface de frottement correspond à la chaleur que cette pièce peut céder à l'ambiance. Si la pièce était isolée, on aurait  $\bar{q}_2 = 0$  et  $\bar{q}_1 = \bar{q}$ . On ne peut déterminer la température de surface et la répartition du flux de chaleur qu'en calculant l'échauffement global des pièces.

En remarquant que le flux de chaleur est proportionnel à la vitesse, la formule (19.60) montre que l'échauffement est proportionnel à  $\sqrt{v}$ .

### Vitesse très élevée, $Pe > 100$

La vitesse de propagation de la chaleur est négligeable vis-à-vis de la vitesse de la source de chaleur. Alors

$$\frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2} \approx \frac{b_1}{b_2} \frac{A_1}{A_2} \quad (19.62)$$

$A_1$  et  $A_2$  sont les aires de frottement, dites surfaces cinématiques (§ 3.2.2), des pièces durant un cycle de fonctionnement.

**Exemple 1 : collecteur de machine électrique**

Deux charbons frottent sur le collecteur en cuivre d’une machine électrique (fig. 19.27). On a l’aire des charbons,  $A_1 = 2s\ell$  et l’aire du collecteur frottant en un tour,  $A_2 = \pi d\ell$ . En outre:  $s = 25\text{ mm}$ ;  $d = 150\text{ mm}$ ;  $b_1 = 2952\text{ W s}^{0.5}/(\text{m}^2\text{ K})$  et  $b_2 = 35\,630\text{ W s}^{0.5}/(\text{m}^2\text{ K})$ ;  $a_2 = 107 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ;  $v = 12\text{ m/s}$ .

Le chiffre de vitesse (19.58) vaut 351. Cette valeur très élevée conduit à appliquer la formule (19.62) qui donne

$$\bar{q}_1 = 0,0088 \bar{q}_2$$

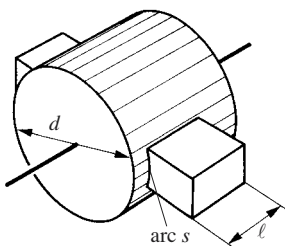


Fig. 19.27 Collecteur d’une machine électrique.

La plus grande partie de la chaleur de frottement s’écoule vers le collecteur. Mais il ne faudrait pas croire que les charbons seront froids car, s’il est vrai qu’ils reçoivent peu de chaleur, ils sont petits et donc mal refroidis.

**Exemple 2 : frein à disque**

Un frein à disque doit dissiper  $Q = 100\text{ kJ}$ . Ses caractéristiques sont:

- Surface de contact des deux plaquettes,  $A_1$   $24 \times 10^{-4}\text{ m}^2$
- Volume des plaquettes,  $V_1$   $14 \times 10^{-6}\text{ m}^3$
- Surfaces de frottement du disque,  $A_2$   $400 \times 10^{-4}\text{ m}^2$
- Volume du disque,  $V_2$   $100 \times 10^{-6}\text{ m}^3$

Les constantes physiques des matériaux sont:

	Garniture	Acier	
• masse volumique, $\rho$	2000	7860	$\text{Kg m}^{-3}$
• chaleur massique, $c$	790	500	$\text{J Kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$
• coefficient de pénétration, $b$	1000	13 000	$\text{W s}^{0.5}\text{ m}^{-2}\text{ K}^{-1}$

On admet que la chaleur est entièrement stockée dans les pièces, car le freinage est bref par rapport à leur constante de temps thermique. Une étude préliminaire montre que le frein fonctionne en régime de vitesse très rapide.

La chaleur se répartit comme les flux selon (19.62), car elle prend naissance dans une surface de contact commune pendant le même temps. Avec  $Q = Q_1 + Q_2$ , on trouve

$$Q_1 = \frac{b_1 A_1}{b_1 A_1 + b_2 A_2} Q \quad Q_2 = \frac{b_2 A_2}{b_1 A_1 + b_2 A_2} Q$$

On a les échauffements

$$\Delta T_1 = \frac{Q_1}{V_1 \rho_1 c_1} \quad \Delta T_2 = \frac{Q_2}{V_2 \rho_2 c_2}$$

Le matériau de la garniture se trouve normalement sur les plaquettes et le disque est en acier. Le calcul donne :

$$\begin{aligned} Q_1 &= 4,59 \times 10^{-3} Q & Q_2 &= 0,995 Q \\ \Delta T_1 &= 0,21 \times 10^{-3} Q & \Delta T_2 &= 2,53 \times 10^{-3} Q \\ \Delta T_1 &= 21 \text{ K} & \Delta T_2 &= 253 \text{ K} \end{aligned}$$

Permutons les matériaux, les plaquettes en acier et un disque en acier revêtu de garniture. On trouve :

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0,438 Q & Q_2 &= 0,562 Q \\ \Delta T_1 &= 7,96 \times 10^{-3} Q & \Delta T_2 &= 3,56 \times 10^{-3} Q \\ \Delta T_1 &= 796 \text{ K} & \Delta T_2 &= 356 \text{ K} \end{aligned}$$

On voit qu'il est nettement plus favorable de mettre les garnitures sur les plaquettes de serrage et de faire le disque en acier. L'échauffement des plaquettes serait intolérable si elles étaient en acier.

### 19.5.6 Roulement avec glissement

Lorsque deux pièces roulent et glissent l'une sur l'autre, comme dans le cas des engrenages, la source de chaleur se déplace à la surface des deux corps. Soit  $v_1$  la vitesse de la source de chaleur sur la surface (1) et  $v_2$  la vitesse sur la surface (2). En appliquant deux fois l'expression (19.60), on a

$$\left. \begin{aligned} T_{1\max} &= T_{01} + C \frac{\bar{q}_1}{b_1} \sqrt{\frac{2s}{v_1}} \\ T_{2\max} &= T_{02} + C \frac{\bar{q}_2}{b_2} \sqrt{\frac{2s}{v_2}} \end{aligned} \right\} \quad (19.63)$$

Admettons que les températures du corps des pièces soient égales ( $T_{01} = T_{02}$ ) et que les températures de surface soient aussi égales, on obtient le rapport des flux de chaleur

$$\Phi = \frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2} = \frac{b_1}{b_2} \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} \quad (19.64)$$

Compte tenu du bilan thermique (19.61),

$$\bar{q}_1 = \frac{\Phi}{1 + \Phi} \bar{q} \quad \bar{q}_2 = \frac{1}{1 + \Phi} \bar{q} \quad (19.65)$$

En portant dans (19.63) et en supposant  $T_{01} \approx T_{02} = T_0$ , on trouve enfin la température de surface instantanée, valable pour les deux corps,

$$T_{\max} = T_0 + C \frac{1}{b_1 \sqrt{v_1} + b_2 \sqrt{v_2}} \sqrt{2s \bar{q}} \quad (19.66)$$

On remarque que la puissance de la source de chaleur est proportionnelle à la vitesse de glissement, car

$$\bar{q} = \mu \bar{p} |v_1 - v_2| \quad (19.67)$$

Ces formules sont à la base du calcul de la température de surface des engrenages en vue de déterminer les limites de grippage (§ 19.6.5).

## 19.6 DIMENSIONNEMENT THERMIQUE

### 19.6.1 Température limite

La température des matériaux influence beaucoup leurs caractéristiques physiques et mécaniques :

- l'acier se déforme, flue et même fond à température élevée, tandis qu'il devient fragile à basse température ;
- certains polymères se ramollissent vers 100°C déjà ;
- la viscosité de l'huile diminue très fortement lorsque la température s'élève ;
- les propriétés diélectriques des isolants s'altèrent à température élevée, les isolants peuvent brûler.

L'altération des matériaux peut les rendre inaptes à remplir leur fonction et provoquer ensuite une avarie. Il existe toujours une *température limite*,  $T_{\lim}$ , à ne jamais dépasser, mais il est prudent de ménager une marge de sécurité  $\Delta T_s$ . On appelle *température admissible*, la valeur

$$T_{\text{adm}} = T_{\lim} - \Delta T_s \quad (19.68)$$

L'aptitude au service d'un organe de machine du point de vue thermique s'exprime par l'inégalité

$$T \leq T_{\text{adm}} \quad (19.69)$$

Il résulte de ces considérations que *la puissance d'une machine, sa vitesse ou sa durée de fonctionnement sont limitées par la température de ses organes*. Le dimen-

sionnement thermique d'une machine consiste à calculer la température de ses pièces critiques et à vérifier que la relation de sécurité (19.69) est satisfaite. Une *pièce critique* est celle pour laquelle, en son point le plus chaud, l'écart de température  $T_{\text{adm}} - T$  est le plus petit et positif ou  $T - T_{\text{adm}}$  le plus grand.

### 19.6.2 Puissance limite en régime permanent

La température de régime permanent d'un organe de machine est donnée par la formule (19.33). La condition de bon fonctionnement d'une pièce critique s'écrit :

$$T_a + \frac{\zeta}{hA} P_p \leq T_{\text{adm}} \quad (19.70)$$

avec :

$A$	aire de la surface de refroidissement
$P_p$	puissance des pertes
$T_a$	température ambiante
$T_{\text{adm}}$	température admissible
$h$	coefficient de transmission de chaleur
$\zeta$	facteur d'échauffement intérieur

Le diagramme 19.28 représente cette relation. Il existe une charge thermique maximale admissible qui se tire de l'inéquation ci-dessus :

$$P_p \leq P_{\text{adm}} = \frac{hA}{\zeta} (T_{\text{adm}} - T_a) \quad (19.71)$$

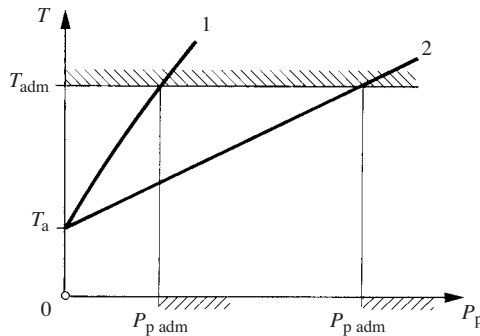


Fig. 19.28 Température et charge limites : courbe (1), convection naturelle ; droite (2), convection forcée.

Comme la perte est en relation avec la puissance de sortie d'un organe, on constate que l'échauffement limite finalement la puissance fournie. La perte s'exprime en principe de deux manières et la puissance limite se calcule comme suit.

Le rendement  $\eta$  d'un moteur ou d'un organe de transmission étant donné (§ 10.5.4), exprimons la production de chaleur à partir de sa puissance de sortie  $P$  :

$$P_p = \frac{1 - \eta}{\eta} P$$

Introduisons dans (19.70) et tirons-en la puissance de sortie

$$P \leq P_{\text{adm}} = \frac{\eta}{1 - \eta} \frac{hA}{\xi} (T_{\text{adm}} - T_a) \quad (19.72)$$

La perte peut aussi s'exprimer par un binôme (§ 10.5.2),

$$P_p = Q_{f0} \dot{q} + \lambda P \quad (19.73)$$

avec :

- $P$  puissance à la sortie
- $Q_{f0}$  effort de frottement constant réduit à l'élément de sortie (roulements, joints d'étanchéité, guidages)
- $\dot{q}$  vitesse de l'élément de sortie
- $\lambda$  fraction de la puissance utile perdue et dissipée en chaleur

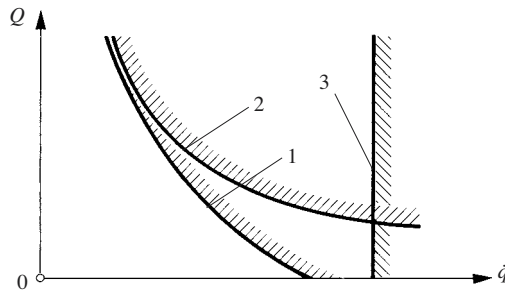
Avec (19.70), on obtient

$$P \leq P_{\text{adm}} = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{hA}{\xi} (T_{\text{adm}} - T_a) - Q_{f0} \dot{q} \right] \quad (19.74)$$

La puissance étant exprimée par  $P = Q\dot{q}$ , la limite thermique se représente dans un diagramme effort-vitesse (fig. 19.29) :

- courbe (1), il existe une perte constante (19.74);
- hyperbole (2), les pertes sont toutes proportionnelles à la puissance transmise (19.72);
- droite (3), l'effort de sortie du mécanisme est nul, les pertes croissent uniquement avec la vitesse.

On verra au paragraphe 19.6.4 comment repousser la puissance limite.



**Fig. 19.29** Représentation d'une limite thermique dans le diagramme effort-vitesse.

### 19.6.3 Puissance limite en régime temporaire

Examinons l'évolution de la température de la pièce critique d'un système selon la puissance thermique qui lui est apportée. Supposons que la température initiale soit toujours sensiblement égale à la température ambiante, le système est froid.

En introduisant l'échauffement permanent donné par (19.33) dans l'expression (19.26), on trouve l'évolution de la température intérieure

$$T = T_a + \xi \frac{P_p}{hA} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (19.75)$$

Selon l'intensité des pertes, on distingue trois cas (fig. 19.30).

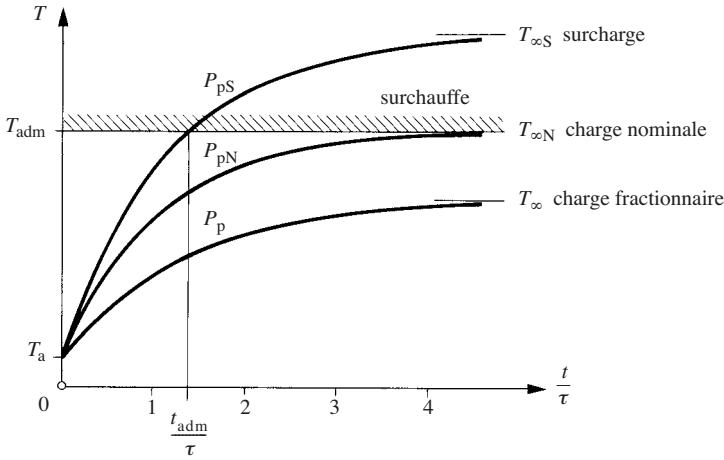


Fig. 19.30 Température en fonction du temps relatif et de la charge thermique.

#### Charge nominale

On appelle *charge thermique nominale*  $\dot{Q}_N^+ = P_{pN}$  celle pour laquelle la température en régime permanent est égale à la température admissible. On la tire de l'équation (19.70),

$$P_{pN} = \frac{hA}{\xi} (T_{adm} - T_a) \quad (19.76)$$

La machine peut fonctionner indéfiniment sans que la température admissible soit dépassée.

#### Charge fractionnaire

La puissance de perte est inférieure à la perte nominale,  $P_p < P_{pN}$ . L'échauffement est aussi plus petit et la machine peut fonctionner indéfiniment.



### Surcharge

La charge thermique  $P_{pS}$  est supérieure à la charge nominale. Par conséquent, la température de régime permanent  $T_{\infty S}$  dépasse la température admissible. Il convient de limiter la durée de fonctionnement afin d'éviter toute surchauffe nuisible.

On définit le *facteur de surcharge thermique*

$$p_Q = \frac{\dot{Q}_S^+}{\dot{Q}_N^+} = \frac{P_{pS}}{P_{pN}} > 1 \quad (19.77)$$

L'échauffement permanent est proportionnel à la perte, alors

$$T_{\infty S} - T_a = (T_{\infty N} - T_a) \frac{P_{pS}}{P_{pN}} = (T_{adm} - T_a) p_Q$$

La température en surcharge atteint la valeur admissible à l'instant  $t_{adm}$ . Avec (19.26), on peut écrire

$$T = T_a + (T_{adm} - T_a) p_Q \left( 1 - e^{-\frac{t_{adm}}{\tau}} \right) = T_{adm}$$

Cette équation fournit la surcharge acceptable pour une durée de fonctionnement voulue  $t_{adm}$ . On trouve

$$p_Q = \frac{1}{1 - e^{-\frac{t_{adm}}{\tau}}} \quad (19.78)$$

Cette relation fournit la durée de fonctionnement admissible avec une surcharge constante jusqu'à ce que la température admissible de la pièce critique soit atteinte:

$$\frac{t_{adm}}{\tau} = \ln \frac{p_Q}{p_Q - 1} \quad (19.79)$$

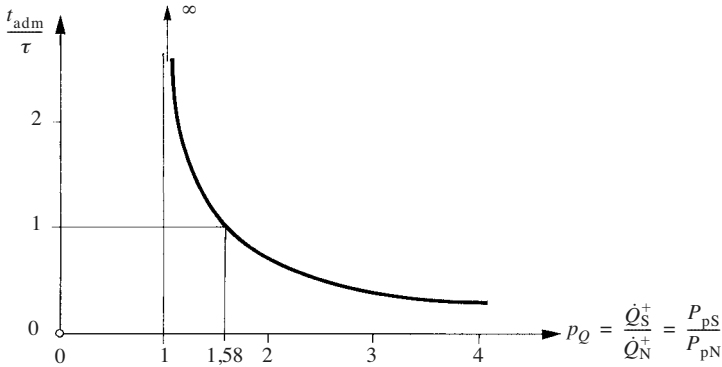
Cette fonction est représentée à la figure 19.31.

Le fonctionnement limité dans le temps pour une raison thermique, en surcharge constante, est appelé *régime temporaire*.

On peut aussi concevoir que la température initiale du système ne soit pas la température ambiante. La durée de marche admissible est plus longue si le système est plus froid que l'ambiance, elle est au contraire plus courte si le système est déjà chaud.

### Exemple numérique

La puissance nominale d'un réducteur est 800 W, sa constante de temps thermique est de l'ordre de 9 minutes. Il doit pouvoir fonctionner en régime temporaire



**Fig. 19.31** Durée de service relative et surcharge thermique temporaire.

pendant 12 minutes. La formule (19.78) donne un facteur de surcharge thermique limite valant 1,358. En admettant que la perte soit proportionnelle à la puissance transmise, on a

$$p_Q = \frac{P_{pS}}{P_{pN}} = \frac{P_S}{P_N}$$

Cette relation fournit la puissance transmissible pendant 12 minutes,  $P_S = 1,358 \times 800 = 1086 \text{ W}$ .

Cette surcharge paraît acceptable du point de vue de la résistance mécanique.

#### 19.6.4 Accroissement de la puissance utile

On a vu que des considérations thermiques limitent la puissance des machines ou leur durée d'utilisation. En nous basant sur (19.72), examinons les mesures à prendre pour accroître la puissance utile à la sortie d'un organe de transmission ou fournie par un moteur électrique.

##### Température admissible

On a intérêt à pouvoir laisser fonctionner les pièces à des températures élevées sans qu'elles ne soient endommagées. On utilise, par exemple, des huiles visqueuses à froid et stables ne se décomposant pas à la chaleur, des polymères pour engrenages et pour paliers lisses dont les caractéristiques mécaniques diminuent peu avec la température, des isolants électriques résistant à haute température.

##### Température ambiante

La puissance utile diminue lorsque la température ambiante s'élève, elle est même nulle lorsque la température ambiante est égale à la température admissible. On ne peut naturellement pas influencer les conditions climatiques, mais il faut veiller à ne pas installer des organes très chargés thermiquement à proximité de fortes sources de chaleur et à ventiler abondamment les locaux.

### Surface de refroidissement

Il est avantageux d'augmenter la surface d'échange de chaleur au moyen d'ailettes de refroidissement (fig. 19.32). Mais la température d'une ailette diminue depuis son pied jusqu'à son extrémité en se rapprochant de la température de l'air (fig. 19.33). La chaleur réellement échangée est donc inférieure à celle qui serait transmise si la température de l'ailette était uniformément égale à celle qui règne à son pied. On démontre la relation

$$\frac{\dot{Q}_{\text{réel}}}{\dot{Q}_{\text{idéal}}} = \frac{\psi}{\frac{\ell}{e}} \tanh \frac{1}{\psi} \frac{\ell}{e} \quad (19.80)$$

avec le paramètre

$$\psi = \sqrt{\frac{k}{2he}}$$

où :

- $k$  coefficient de conductibilité thermique du matériau de l'ailette
- $h$  coefficient de transmission de chaleur entre la surface et l'air
- $e$  épaisseur de l'ailette

On constate qu'il est inutile de faire les ailettes trop longues, en pratique  $\ell = (6 \dots 10)e$ . En outre, il faut les écarter suffisamment pour que l'air de refroidissement puisse circuler facilement entre elles. La géométrie et la disposition les plus favorables des ailettes de refroidissement d'organes très chargés s'étudient expérimentalement, par exemple pour les moteurs à explosion refroidis à l'air.

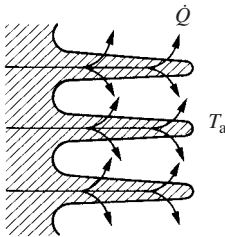


Fig. 19.32 Ailettes de refroidissement.

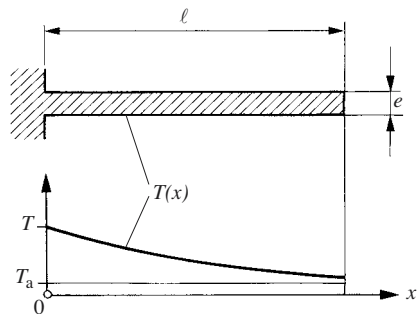


Fig. 19.33 Température le long d'une ailette.

### Coefficient de transmission de chaleur

On a vu (fig. 19.6) tout l'intérêt de forcer les mouvements convectifs sur les surfaces de refroidissement et de transmettre la chaleur en régime très turbulent. Il suffit

de souffler vigoureusement sur les surfaces par un ventilateur. Soit le ventilateur est entraîné directement par la machine, soit on installe un ventilateur auxiliaire; mais cette dernière solution est moins fiable. Remarquons que le coefficient de transmission de chaleur diminue avec l'altitude, car la densité de l'air est moindre. Relevons encore l'importance de nettoyer les machines et de ne pas les laisser se recouvrir de poussière ou de déchets qui les isolent thermiquement.

### **Conduction**

On peut favoriser le refroidissement d'un organe en améliorant la conduction de la chaleur vers le bâti. Ce dernier joue alors le rôle d'une ailette de refroidissement. Pour cela, il faut que les surfaces assemblées soient lisses et dépourvues de zones creuses. Il est avantageux, avant montage, d'enduire les surfaces de graisse spéciale bonne conductrice de la chaleur.

### **Transmission interne de la chaleur**

Il s'agit de faciliter le passage de la chaleur entre les sources et les surfaces de refroidissement afin d'abaisser la température des pièces délicates ( $\zeta$  peu supérieur à l'unité). A cet égard, la ventilation intérieure des carters et le brouillard d'huile qui y règne sont favorables. Il faut agiter le bain d'huile, arroser abondamment les pièces chaudes (engrenage, roulements), faire barboter les vis sans fin dans l'huile; utiliser des métaux bons conducteurs de la chaleur, augmenter la section des pièces et raccourcir le cheminement de la chaleur afin de réduire la résistance thermique.

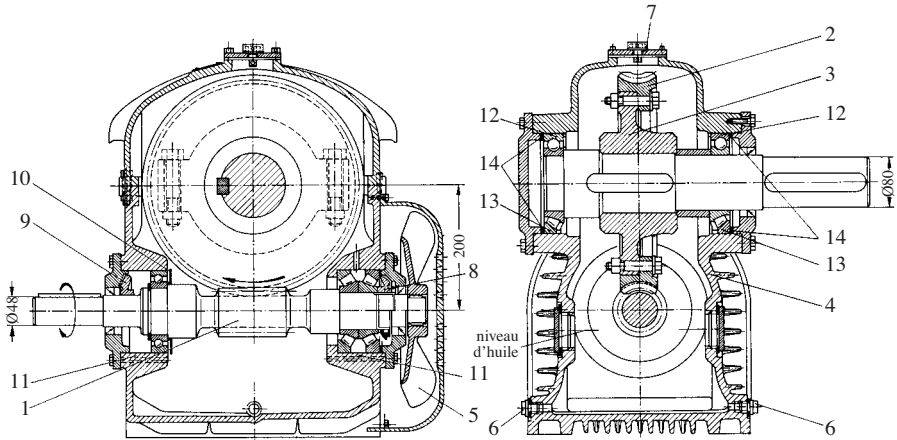
### **Rendement**

On a toujours intérêt à diminuer les pertes, donc à améliorer le rendement, pour réduire la production de chaleur. Si le rendement passe, par exemple, de 96% à 97%, la puissance transmissible s'accroît de 35%. On agira principalement sur la lubrification pour diminuer le frottement et on utilisera avantageusement des mécanismes présentant peu de glissement; par exemple des engrenages plutôt qu'une vis sans fin, une pompe hydraulique à débit variable plutôt qu'une pompe à débit constant associée à une soupape de décharge. Le souci d'améliorer le rendement procède, dans ce contexte, plus de la préoccupation d'accroître la puissance transmissible que d'économiser l'énergie.

### **Refroidissement auxiliaire**

Lorsque toutes les mesures proposées sont insuffisantes pour maintenir la température dans les limites acceptables, on prévoit un dispositif de refroidissement auxiliaire selon le paragraphe 19.3.3. L'air soufflé par un ventilateur s'apparente aussi à un tel système.

Le réducteur à vis sans fin représenté à la figure 19.34 illustre l'application de plusieurs des mesures proposées. Le fond du carter (4) est muni d'ailettes de refroidissement, un ventilateur (5) porté par l'arbre de la vis sans fin souffle de l'air entre les ailettes, l'air est guidé par un capot en tôle. La vis sans fin est refroidie directement en trempant dans le bain d'huile.



**Fig. 19.34** Réducteur à vis sans fin avec refroidissement forcé (Flender). Puissance nominale 24,5 kW,  $n_1 = 1500$  t/min,  $i = 20$ . (1) vis sans fin; (2) roue dentée; (3) moyeu; (4) carter avec ailettes de refroidissement; (5) ventilateur; (6) bouchon de vidange; (7) remplissage d'huile; (8) et (9) diverses étanchéités; (10) disque chasse-gouttes; (11) retour d'huile; (12) roulements à billes ou (13) roulements à galets coniques; (14) rondelles de réglage de la position axiale de la roue.

### 19.6.5 Transmission à engrenage

#### Température du carter

La force normale de denture d'engrenages est limitée par la résistance des dents à la flexion et la résistance à la pression superficielle. Le calcul d'avant-projet du module d'engrenages cylindriques se fait par les formules suivantes [19.7, 19.8], valables pour l'angle de pression  $\alpha = 20^\circ$ , selon le critère de dimensionnement:

- Critère de résistance à la flexion

$$m_F = 2,1 \sqrt[3]{\frac{M_1}{\psi_m z_1 \sigma_{F adm}}} \quad (19.81)$$

avec:

$M_1$  couple au pignon  
 $\psi_m = b/m$  largeur relative de la denture  
 $z_1$  nombre de dents du pignon  
 $\sigma_{F adm}$  contrainte admissible de flexion

- Critère de résistance à la pression superficielle

$$m_H = 2,317 \sqrt[3]{\frac{M_1}{\psi_m z_1^2} \frac{1+u}{u} \frac{Z_E^2}{\sigma_{H adm}^2}} \quad (19.82)$$

avec:

$u = z_2/z_1$  rapport d'engrenage, négatif avec une denture intérieure  
 $\sigma_{H adm}$  pression superficielle admissible

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}} \quad \text{coefficient de matériau}$$

$\mu_{1,2}$  coefficients de Poisson du pignon et de la roue  
 $E_{1,2}$  modules d'élasticité du pignon et de la roue

Les résistances admissibles des matériaux intervenant dans ces formules sont en relation avec les résistances limites des matériaux. Dans le domaine de la limite de fatigue, on a :

$$\sigma_{F \text{ adm}} = \frac{Y_{ST} \sigma_{F \text{ lim}}}{S_F}$$

avec :

$\sigma_{F \text{ lim}}$  limite de fatigue du matériau à la rupture de l'engrenage d'essai avec une probabilité de rupture de 1%  
 $Y_{ST}$  facteur de concentration de contrainte de l'engrenage d'essai, selon les normes,  $Y_{ST} = 2,1$   
 $S_F$  facteur de sécurité à la rupture

et pour la pression superficielle,

$$\sigma_{H \text{ adm}} = \frac{\sigma_{H \text{ lim}}}{S_H}$$

avec :

$\sigma_{H \text{ lim}}$  pression limite d'endurance pour au moins  $5 \times 10^7$  cycles et une probabilité de détérioration de 1%  
 $S_H$  facteur de sécurité à la pression hertzienne

Dans un engrenage intermédiaire, et dans les engrenages avec inversion du sens de marche, les dents sont sollicitées en flexion alternée; il faut donc multiplier encore  $\sigma_{F \text{ lim}}$  par 0,7.

La taille d'un engrenage est déterminée par le module le plus grand,  $m_F$  ou  $m_H$ . Il s'avère que la résistance à la rupture de flexion détermine la taille des engrenages en acier cimentés et trempés. A couple et nombre de dents égaux, ils sont nettement plus petits qu'avec un acier non traité. Cet aspect sera étudié plus en détail au paragraphe 26.6.3.

En comparant divers réducteurs, on trouve que la surface extérieure des carters évolue avec le module selon la fonction

$$A = a m^{1,8} \quad (19.83)$$

où  $a$  est un coefficient qui dépend de la construction.

Par ailleurs, la puissance dissipée dans le réducteur est

$$P_p = \frac{1 - \eta}{\eta} \omega_2 M_2$$

et la température de son carter vaut alors

$$T_\infty = T_a + \frac{P_p}{h A} = T_a + \frac{1 - \eta}{\eta} \frac{1}{h a m^{1.8}} \omega_2 M_2 \quad (19.84)$$

Exprimons le couple au pignon en fonction du couple de sortie :

$$M_1 = \frac{M_2}{\eta |i|}$$

Introduisons ce couple dans les expressions (19.81) et (19.82) de calcul des modules, puis substituons dans (19.84). On obtient une formule de la forme

$$T_\infty = T_a + a_1 \omega_2 M_2^{0.4} \quad (19.85)$$

où  $a_1$  est un coefficient qui dépend notamment du critère de dimensionnement déterminant. La température de régime permanent est représentée à la figure 19.35 en fonction du couple appliqué au pignon. On admet que le rendement est indépendant de la nuance d'acier et de son traitement de surface. Du fait de leur plus petite taille, les transmissions en acier cémenté et trempé chauffent beaucoup plus que celles en acier non traité. On distingue trois domaines :

- Pour de faibles couples, domaine I, la chaleur dégagée peut s'évacuer naturellement à l'air. On préfère alors durcir les dentures afin de diminuer la taille et la masse de la transmission.
- Dans la gamme des couples très élevés, domaine III, on équipe les transmissions de refroidissement auxiliaires ; généralement par réfrigération de l'huile de graissage, même si l'acier n'est pas traité.
- Dans le domaine intermédiaire II, les engrenages non traités peuvent encore se refroidir naturellement, tandis que les engrenages à dentures cémentées et trempées doivent posséder un refroidissement forcé. Dans certaines applications, on joue la carte de la sécurité en préférant construire un gros réducteur en acier non traité afin de ne pas être tributaire d'un système de refroidissement ; mais un traitement de surface est tout de même préférable pour maîtriser l'usure, même si la capacité de résistance de l'acier reste partiellement inexploitée.

La délimitation exacte des trois domaines dépend évidemment de la vitesse du pignon, de la résistance des matériaux et de la construction de la transmission.

Les réducteurs épicycloïdaux sont beaucoup plus compacts et ceux dont la raison  $i_0$  est négative ont un meilleur rendement que les engrenages ordinaires. Cette amélioration du rendement compense la réduction de taille. En revanche, les réducteurs à raison positive ont un moins bon rendement ; il faut les éviter pour les transmissions de puissance [19.9].

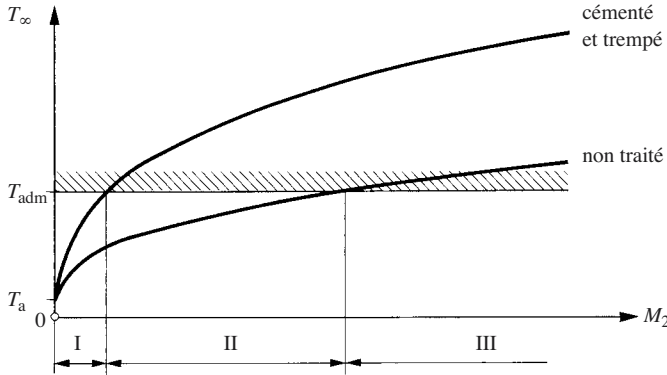


Fig. 19.35 Échauffement d'un engrenage en fonction du couple de sortie à vitesse constante.

La figure 26.24 et le tableau 26.25 comparent l'encombrement de réducteurs selon leur construction et selon le traitement de leur denture. Dans le cas (a), avec un pignon en acier amélioré, la surface de refroidissement exposée à l'air est de  $36 \text{ m}^2$ . En admettant un rendement global de 98%, un coefficient de transmission de chaleur de  $20 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  et un échauffement du carter de  $35 \text{ K}$ , on calcule par la formule (19.72) une puissance limite de  $1235 \text{ kW}$ . C'est exactement la puissance de dimensionnement de ce réducteur. Dans le cas (c), la surface de refroidissement n'est plus que  $12,3 \text{ m}^2$  et la puissance limite en refroidissement naturel vaut  $422 \text{ kW}$ . On ne peut alors transmettre la puissance nominale de  $1240 \text{ kW}$  qu'en recourant à un refroidissement de l'huile à travers un échangeur de chaleur.

Cette discussion montre que les considérations thermiques jouent un rôle très important pour la conception d'une transmission à engrenage.

### Grippage

Il arrive que des engrenages très chargés ayant des vitesses périphériques supérieures à  $4 \text{ m/s}$  présentent parfois des traces de grippage provoquées par l'adhérence des surfaces avec arrachement de matière (fig. 19.36). Blok [19.10] a expliqué le grippage par une rupture brutale du film d'huile lorsque la température dépasse localement une certaine température critique caractéristique de l'huile de graissage utilisée (§ 3.5.1).

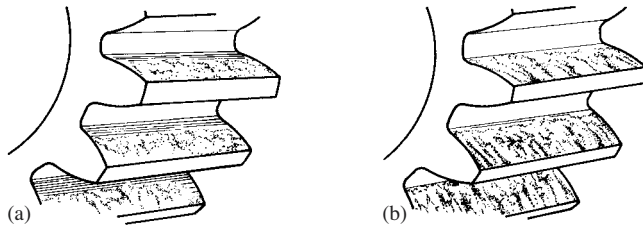


Fig. 19.36 Traces de grippage sur une denture: (a) début; (b) stade avancé.

Sans entrer dans les détails, la condition de non-grippage peut s'écrire sous la forme suivante:



$$T_i = T_{he} + B \mu_m \left( \frac{F_{nt}''}{b} \right)^{0,75} X_G \sqrt{\omega_1} < T_{i \text{ lim}} \quad (19.86)$$

avec :

$T_i$	température moyenne du film d'huile
$T_{he}$	température de l'huile, voisine de la température du corps des dents
$B$	coefficient dépendant du rapport de conduite et de l'angle d'hélice
$\mu_m$	coefficient de frottement moyen le long du profil
$F_{nt}''$	force de contact apparente corrigée
$b$	largeur de la denture
$X_G$	facteur de géométrie dans lequel interviennent les rayons de courbure des profils en contact en tête d'une dent du pignon
$\omega_1$	vitesse du pignon
$T_{i \text{ lim}}$	température moyenne critique du lubrifiant déterminée par des essais de grippage

Les valeurs numériques se trouvent dans les normes et dans la littérature spécialisée. On agit principalement sur la charge spécifique  $F_{nt}''/b$  et sur le choix de l'huile pour prévenir le grippage. Il existe des huiles avec des additifs extrêmes pressions spécialement développés à cet effet. Le facteur de sécurité au grippage est défini par

$$S_G = \frac{T_{i \text{ lim}}}{T_i} \quad (19.87)$$

où les températures sont introduites en °C .

### 19.6.6 Réducteurs à vis sans fin

Il existe un intense glissement entre une vis sans fin et les dents de la roue. C'est pourquoi les pertes de ce type de réducteur sont plus fortes que dans les engrenages cylindriques ou coniques. Il faut donc toujours vérifier les réducteurs à vis sans fin à l'échauffement. Les calculs thermiques font appel à plusieurs coefficients empiriques qui dépendent de la construction du réducteur, notamment de la position de la vis. Par exemple, on indique que le coefficient de transmission de chaleur entre le bain d'huile et l'air ambiant est 25% plus grand si la vis se trouve en dessous de la roue et trempe dans l'huile, qu'elle agite énergiquement, que si elle est située au dessus.

Une procédure de calcul bien connue propose de prédimensionner l'entraxe sur la base de considérations d'échauffement avant de faire les vérifications de résistance mécanique des dents et de contrôler la résistance à l'usure.

### 19.6.7 Paliers

#### Paliers lisses en frottement mixte

La chaleur naît dans la zone portante du coussinet; mais l'arbre tournant prend une température uniforme et se comporte comme une source de chaleur introduite dans le coussinet (fig. 19.37). Le couple de frottement est donné par (8.102). On a la puissance perdue

$$P_p = M_f \omega = \mu' F \frac{d}{2} \omega$$

où  $\mu'$  est le coefficient de frottement équivalent qui tient compte de la distribution de pression effective (§ 8.7.4). Introduisons la vitesse périphérique  $v = \omega d/2$  et la pression moyenne de référence par  $F = \bar{p} B d$ . Il vient

$$P_p = \mu' \bar{p} B d v$$

Portons cette valeur dans l'inégalité de sécurité thermique (19.70) qui devient

$$T_a + \frac{\xi}{h A} \mu' B d \bar{p} v \leq T_{adm} \quad (19.88)$$

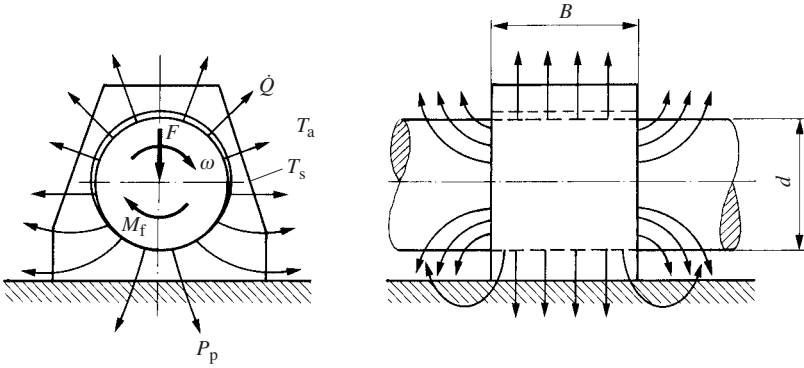


Fig. 19.37 Flux de chaleur d'un palier lisse.

On a pris l'habitude de vérifier les conditions de fonctionnement thermique de ce type de palier en se basant uniquement sur la valeur du produit  $\bar{p} v$ , soit

$$\bar{p} v \leq (\bar{p} v)_{adm} = \frac{h}{\mu' \xi} \frac{A}{B d} (T_{adm} - T_a) \quad (19.89)$$

Le rapport de la surface de refroidissement  $A$  à l'aire projetée  $Bd$  varie relativement peu d'un palier à l'autre. En revanche,  $T_a$  et  $h$  dépendent fortement de l'ambiance et des conditions de fonctionnement. C'est pourquoi on donne, dans certains manuels de construction, par exemple,  $(\bar{p} v)_{adm} = 8$  à  $20$  bar m/s dans les machines hydrauliques,  $120$  bar m/s pour un ancien essieu de chemin de fer. La grande différence provient principalement du meilleur refroidissement du palier d'essieu exposé au vent de la marche du train. On voit que le critère du produit  $\bar{p} v$  est un mauvais critère qu'il ne faudrait plus utiliser sauf, à la rigueur, pour juger un avant-projet par rapport à un palier fonctionnant dans des conditions identiques. La taille du palier étant choisie, il importe de vérifier correctement l'échauffement.

Il faut prendre garde de ne jamais confondre ce produit  $\bar{p}v$ , basé uniquement sur des considérations thermiques, avec la valeur du produit  $\bar{p}v$  relatif à l'usure du coussinet que nous avons présenté au paragraphe 3.6.1. Cette distinction est parfois oubliée, ce qui peut conduire à de sérieux mécomptes.

### Paliers hydrodynamiques

Les paliers et les butées hydrodynamiques sont très sensibles à la température, car la viscosité de l'huile dont dépend leur fonctionnement diminue très vite lorsque la température augmente. C'est pourquoi ces paliers se calculent toujours sur la base d'un bilan thermique. Cette étude sort du cadre de cet ouvrage, voir [19.11], mais on verra au paragraphe 21.4.1 l'influence de la charge et de la vitesse sur l'échauffement.

### Roulements

Le calcul de la température de service des roulements est délicat, car le couple de frottement, le coefficient de transmission de chaleur interne, la surface d'échange de chaleur et la capacité de refroidissement par l'huile sont difficiles à apprécier. Il est le plus souvent inutile de faire un calcul rigoureux et fin, c'est pourquoi on se contente habituellement d'un calcul très approximatif. On mesure la température en service et on peut éventuellement forcer l'arrosage si elle est trop élevée.

A titre indicatif, la température de service de roulements moyennement chargés installés dans une machine sans source de chaleur particulière est de l'ordre de  $40^{\circ}\text{C}$  à  $50^{\circ}\text{C}$ . Dans certains roulements très chargés, on atteint  $90^{\circ}\text{C}$ . On rencontre des températures beaucoup plus élevées si les roulements sont montés à proximité de pièces de machines chaudes; on trouve par exemple  $80$  à  $90^{\circ}\text{C}$  dans les paliers d'un moteur de traction de locomotive, environ  $120^{\circ}\text{C}$  dans un turbocompresseur et  $180^{\circ}\text{C}$  dans les paliers d'une calandre pour matières plastiques.

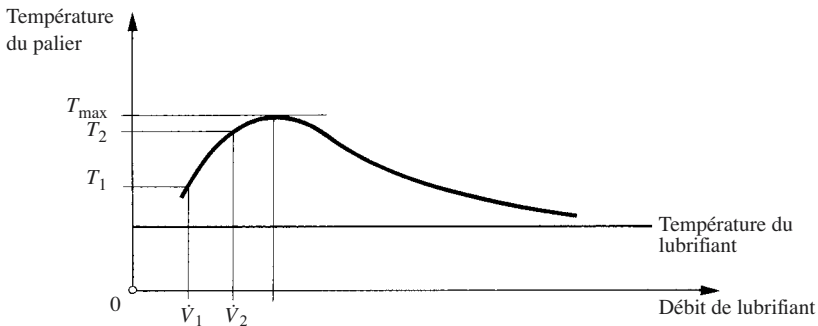


Fig. 19.38 Echauffement d'un roulement selon le débit de lubrifiant.

La quantité de lubrifiant influence la température d'un roulement. Un roulement tournant à vitesse constante et chargé par une force constante reçoit un débit minimal de lubrifiant  $\dot{V}_1$ , sa température est  $T_1$  en régime de lubrification pauvre (fig. 19.38); la dissipation d'énergie se produit pratiquement uniquement par frottement de roulement. Mais quand on augmente le débit d'huile, le régime de lubrification tend à devenir élastohydrodynamique, voire même hydrodynamique si les charges sont faibles. Le frottement dans le lubrifiant augmente et la température croît. Au-delà d'un certain

débit, l'huile concourt au refroidissement par convection; la température des corps roulants et de la cage tendent vers la température de l'huile.

On fabrique des roulements équipés de billes petites, ou fabriquées en matériaux très durs, par exemple en nitrure de silicium (céramique), afin de diminuer la taille des ellipses de contact avec les bagues. Le frottement de glissement est ainsi réduit et la température de service est plus basse; ou, à température égale, la vitesse de fonctionnement peut être plus élevée.

### 19.6.8 Embrayages et freins à friction

La température des garnitures d'embrayages et de freins détermine leur longévité et leur aptitude fonctionnelle. Une température trop élevée augmente considérablement l'usure des garnitures et peut même endommager brutalement l'organe.

On calcule en principe l'échauffement des garnitures à l'aide des formules du paragraphe 19.5.4. Quelques secondes après le début du glissement, on observe l'échauffement progressif du corps des pièces (température  $T_0$ ). Après extinction des transitoires à courtes constantes de temps dans les garnitures, les surfaces de glissement se comportent comme des sources de chaleur dont on étudie la propagation à l'air ambiant ou à l'huile des embrayages humides. Mais les calculs sont difficiles du fait de la forme compliquée des pièces. Pahl et Oedekoven [19.12] ont étudié ce problème par la méthode des éléments finis et ont trouvé des résultats concordant bien avec des mesures de laboratoire. Les formules du paragraphe 19.5.2 donnent des valeurs un peu supérieures.

Les embrayages multidisques (fig. 19.39) sont beaucoup plus compacts que les embrayages monodisques, mais leur refroidissement à l'air est moins énergique. C'est pourquoi on ne les rencontre pas dans les véhicules automobiles où l'énergie dissipée est très grande lors des démarrages en côte ou lors de démarrages répétés dans la circulation urbaine. En revanche, les embrayages multidisques s'utilisent dans les boîtes de vitesses industrielles où ils sont refroidis par l'huile et moins sollicités.

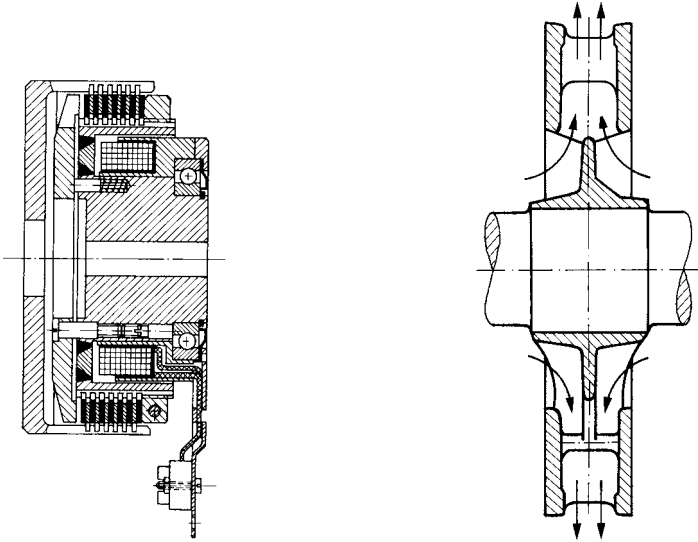
Les freins à disque sont favorables, car ils offrent une grande surface de refroidissement. Du point de vue thermique, il est avantageux de leur donner un grand diamètre et de serrer le disque par une ou plusieurs petites pinces laissant une large surface du disque en contact avec l'air ambiant. Les gros freins ont un disque alvéolé formant un ventilateur (fig. 19.40); l'air aspiré au centre du disque est éjecté à la périphérie et refroidit le disque aussi à l'intérieur, du moins pendant la marche.

De nombreux freins et embrayages sont utilisés par intermittences régulières (fig. 19.41); ils glissent pendant le temps de marche  $t_m$  et jouissent d'une période de repos (arrêt)  $t_a$ . Leur fréquence d'utilisation est

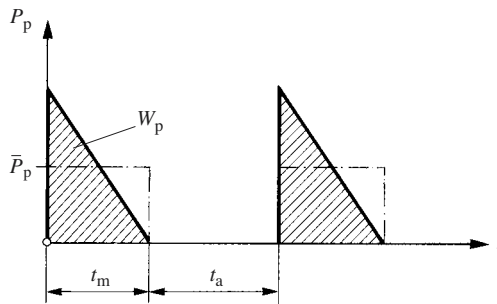
$$f = \frac{1}{t_m + t_a} \quad (19.90)$$

On simplifie en admettant que la constante de temps thermique en marche de l'embrayage est égale à sa constante de temps au repos,  $\tau_m \approx \tau_a = \tau$ .

La durée du glissement est habituellement plus courte que la constante de temps, on admet que l'embrayage reçoit des bouffées de chaleur, avec une puissance moyenne



**Fig. 19.39** Embrayage électromagnétique à lamelles, **Fig. 19.40** Disque autoventilé pour frein à disque. bobine fixe (Binder Magnete GmbH).



**Fig. 19.41** Apport intermittent de chaleur dans un embrayage.

$$\bar{P}_p = \frac{W_p}{t_m}$$

En cas de marche permanente, cette puissance provoquerait l'échauffement tiré de (19.30):

$$T_\infty - T_a = \frac{W_p}{C} \frac{\tau}{t_m} \quad (19.91)$$

La température maximale atteinte par le corps de l'embrayage en régime intermittent périodique est donnée par (19.29). Après substitution des grandeurs ci-dessus, on trouve

$$T_{\max} = T_a + \frac{W_p}{C} \frac{1 - e^{-\frac{t_m}{\tau}}}{\frac{t_m}{\tau}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{f\tau}}} \quad (19.92)$$

On retrouve la température de régime permanent lorsque  $t_a = 0$  ou  $f = 1/t_m$ .

Dans les processus rapides,  $t_m \ll \tau$ . La seconde fraction est voisine de l'unité et

$$T_{\max} \approx T_a + \frac{W_p}{C} \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{f\tau}}} \quad (19.93)$$

La température ne devant pas excéder  $T_{\text{adm}}$ , on obtient une inéquation qui fournit la fréquence limite de travail :

$$f \leq f_{\text{lim}} = \frac{1}{\tau \ln \frac{1}{1 - \frac{W_p}{C(T_{\text{adm}} - T_a)}}} \quad (19.94)$$

La quantité  $C(T_{\text{adm}} - T_a)$  représente l'énergie thermique emmagasinable dans le frein ou l'embrayage. Lorsque le travail de friction  $W_p$  est petit par rapport à cette énergie, on peut développer le logarithme en série puis remplacer la capacité thermique  $C$  par sa valeur tirée de (19.22). On trouve

$$f_{\text{lim}} = \frac{hA(T_{\text{adm}} - T_a)}{W_p} \quad (19.95)$$

Lorsque les surfaces glissent moins longtemps que la constante de temps thermique :

- la fréquence limite est inversement proportionnelle au travail mécanique dissipé ;
- la fréquence limite est proportionnelle à la surface de refroidissement et à l'échauffement admissible ;
- la fréquence limite augmente avec l'amélioration du refroidissement.

On obtient de grandes fréquences de travail avec des organes multidisques refroidis à l'huile.

Les fabricants donnent pour chaque embrayage ou frein la relation entre la fréquence de travail admissible et l'énergie de chaque cycle.

## 19.7 DILATATION

### 19.7.1 Dilatation linéaire

Considérons une tige de longueur  $\ell_0$  à la température de  $0^\circ\text{C}$ . En la portant à la température  $T$ , sa longueur devient

$$\ell = \ell_0(1 + \alpha T) \quad (19.96)$$

où  $\alpha$  est le *coefficient de dilatation thermique* linéaire du matériau, il varie légèrement avec la température; mais en pratique on l'admet constant dans la gamme habituelle des températures.

Supposons que la tige se trouve à la température  $T_1$ , sa longueur est

$$\ell_1 = \ell_0(1 + \alpha T_1)$$

En portant sa température à  $T_2$ , elle prend la longueur

$$\ell_2 = \ell_0(1 + \alpha T_2)$$

ou

$$\ell_2 = \ell_1 \frac{1 + \alpha T_2}{1 + \alpha T_1} \quad (19.97)$$

La dilatation thermique de la tige vaut

$$\Delta\ell = \ell_2 - \ell_1 = \ell_0 \alpha (T_2 - T_1) = \ell_1 \frac{\alpha}{1 + \alpha T_1} (T_2 - T_1) \quad (19.98)$$

Mais  $\alpha$  est petit, par exemple  $\alpha = 23 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  pour de l'aluminium; à  $20^\circ\text{C}$ ,  $\alpha T_1 \ll 1$ , par conséquent

$$\Delta\ell \approx \ell_1 \alpha (T_2 - T_1) \quad (19.99)$$

Le coefficient de dilatation thermique est généralement positif. Il est nul pour un alliage spécial dénommé INVAR, nul ou même légèrement négatif pour de la fibre de carbone ( $\alpha = -0,5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ).

Toutes les dimensions d'un solide obéissent aux lois ci-dessus si la température varie partout de la même quantité.

Les déformations thermiques se comportent différemment des déformations provoquées par les efforts statiques et dynamiques. Tandis que ces dernières s'ajoutent tout le long du cheminement de force, les dilatations thermiques peuvent partiellement se compenser. En outre, les déformations élastiques s'annulent dès la suppression d'un effort; par contre, les déformations thermiques ne s'évanouissent que lentement avec le refroidissement après la disparition des sources de chaleur à cause des inerties thermiques.

Calculons la dilatation d'une poutre quelconque (fig. 19.42) avec les hypothèses suivantes:

- La température est constante dans tout plan perpendiculaire à la fibre neutre. Ainsi, deux sections voisines ne tournent pas l'une par rapport à l'autre du fait de la dilatation thermique.
- La température varie le long de la poutre et n'est fonction que de l'abscisse curviligne  $s$ .

On raisonne comme si seule la fibre neutre se dilatait. En passant d'une température uniforme  $T_0$  à la distribution  $T(s)$ , le déplacement de l'extrémité B par rapport à A vaut

$$\delta = \int_0^s \alpha (T(s) - T_0) ds \quad (19.100)$$

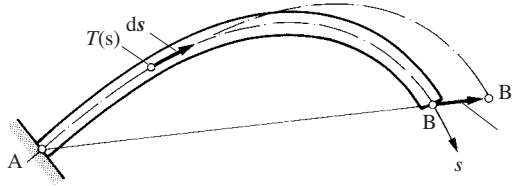


Fig. 19.42 Dilatation d'une poutre.

Lors d'un écart uniforme de température, le point B vient en B' sur la sécante AB, la dilatation thermique vaut simplement

$$\delta = \overline{BB'} = \alpha \overline{AB} (T - T_0) \quad (19.101)$$

La dilatation d'une poutre courbe est égale à la dilatation d'une tige fictive droite de même matériau reliant les extrémités de la poutre. Ce théorème est utile pour étudier la dilatation des tuyauteries et les contraintes thermiques qu'elle provoque.

### 19.7.2 Variation thermique des jeux

La dilatation des pièces modifie les jeux fonctionnels. On considère ici tant l'effet sur le jeu visible que sur le jeu négatif (serrage).

#### Frettage

On sait que l'on peut réaliser une liaison arbre-moyeu très efficace en forçant un moyeu sur l'arbre. A la température ambiante  $T_0$  régnant lors du montage, le diamètre de l'arbre est  $d_i$  et l'alésage du moyeu  $d_e$  (fig. 19.43). La différence

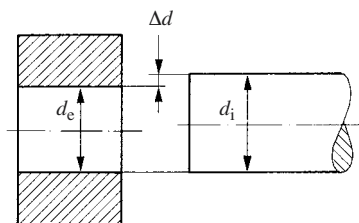
$$\Delta d = d_i - d_e \quad (19.102)$$

est le *serrage diamétral* des pièces; il constitue une précontrainte géométrique (§ 7.3.4). Il est impossible d'effectuer le montage à la presse lorsque le serrage est important, on modifie alors les dimensions des pièces thermiquement afin de permettre leur assemblage. Lorsque les températures s'égalisent, le moyeu se serre sur l'arbre. On dit qu'on a effectué un frettage.

Portons le moyeu à la température  $T_e$  et l'arbre à la température  $T_i$ . Les dilatactions de ces pièces sont

$$\Delta d_e = d_e \alpha_e (T_e - T_0)$$





**Fig. 19.43** Dimensions à la température ambiante des pièces d'un assemblage fretté.

et

$$\Delta d_i = d_i \alpha_i (T_i - T_0)$$

Le montage est possible lorsque

$$\Delta d_e - \Delta d_i > \Delta d$$

On prévoit généralement un petit jeu pour faciliter l'assemblage. En admettant  $d_e \approx d_i = d$ , le diamètre nominal de l'arbre, on a

$$\alpha_e (T_e - T_0) - \alpha_i (T_i - T_0) > \frac{\Delta d}{d} \quad (19.103)$$

Cette relation permet de calculer les températures de frettage. On peut

- chauffer le moyeu ;
- refroidir l'arbre ;
- chauffer le moyeu et refroidir l'arbre.

Le refroidissement de l'arbre est plus difficile à obtenir que le chauffage du moyeu, mais il est indispensable lorsque l'on vise un serrage très important et que l'on ne peut pas trop chauffer le moyeu pour des raisons métallurgiques.

Considérons maintenant un ensemble dont le serrage était  $\Delta d$  à la température d'équilibre  $T_0$ . En le portant uniformément à la température  $T$ , son serrage devient

$$\Delta d_T = \Delta d - d(\alpha_e - \alpha_i)(T - T_0) \quad (19.104)$$

Le serrage diminue si l'ensemble chauffe et que le coefficient de dilatation thermique du moyeu est supérieur à celui de l'arbre. Ce cas se présente avec les moyeux en alliages d'aluminium ou de cuivre montés sur des arbres en acier. Il faut alors dimensionner l'assemblage à la température de service sous peine de voir le couple transmissible devenir insuffisant. Le serrage augmente avec des moyeux en fonte grise.

On monte de manière analogue des roulements pour obtenir une certaine précontrainte.

Les bandages des roues de chemin de fer sont toujours frettés sur le disque de roue. Les freins à sabot échauffent rapidement fortement les bandages. Comme le dis-

que ne chauffe qu'avec beaucoup de retard, il est arrivé que des bandages s'échappent et causent des déraillements. On évite ce genre d'accident en prévoyant un jonc de sécurité (fig. 19.44) ou en installant des freins à disque.

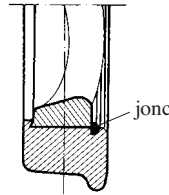


Fig. 19.44 Bandage de roue de chemin de fer.

### Paliers lisses

En chauffant, le coussinet en bronze des paliers lisses se dilate plus que l'arbre, par conséquent le palier voit son jeu augmenter. Mais le carter s'oppose partiellement à la dilatation. Il convient de tenir compte de ce phénomène lors du calcul des paliers.

### Roulements

Le frottement aux contacts des corps roulants avec les bagues et avec la cage produit de la chaleur qui échauffe l'arbre et le logement. D'autres sources de chaleur participent aussi à l'échauffement du carter. En partant de la température de montage  $T_0$  supposée uniforme, l'arbre prend la température  $T_a$  et le carter la température  $T_c$ . L'échauffement de l'arbre et celui du carter valent respectivement

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_a &= T_a - T_0 \\ \Delta T_c &= T_c - T_0 \end{aligned} \right\} \quad (19.105)$$

L'arbre étant normalement plus chaud que le carter, la dilatation de la bague intérieure est plus forte que celle de la bague extérieure. Le jeu d'un roulement à contact radial diminue; il peut même devenir négatif et précontraindre le roulement en abrégant sa longévité.

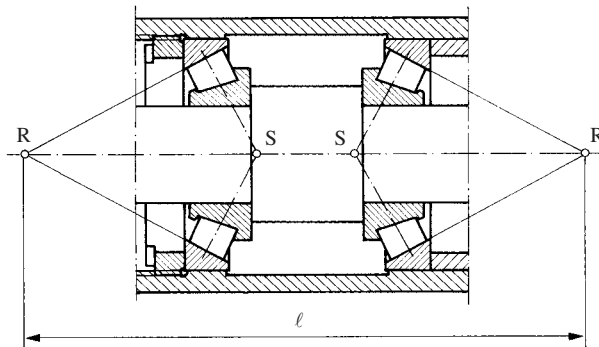


Fig. 19.45 Montage face à face de roulements coniques.

Les roulements à contact oblique sont toujours montés par paire en opposition. Leur jeu axial est influencé par le jeu radial. Considérons le montage face à face, dit aussi en X, de la figure 19.45. La dilatation radiale de la bague extérieure accroît le jeu axial tout comme la dilatation axiale du carter entre les deux roulements. On démontre que la variation du jeu axial est proportionnelle à la distance  $\ell$  qui sépare les sommets R des cônes de roulement, même si l'arbre est en réalité plus court. Soit

$$\Delta j = \ell(\alpha_c \Delta T_c - \alpha_a \Delta T_a) \quad (19.106)$$

où  $\alpha_c$  est le coefficient de dilatation thermique du carter et  $\alpha_a$  celui de l'arbre.  $\Delta j > 0$  correspond à un accroissement du jeu axial. Si le bâti est en fonte ou en acier comme l'arbre, le jeu diminue parce que  $\Delta T_c < \Delta T_a$ . En revanche, selon les températures, on peut observer une augmentation du jeu si le carter est en aluminium puisque le coefficient de dilatation thermique de ce métal est double de celui de l'acier.

Dans le cas de roulements montés dos à dos, dit montage en O (fig. 19.46), les sommets des cônes de roulement se trouvent entre les paliers. La variation du jeu axial vaut alors

$$\Delta j = \ell(\alpha_a \Delta T_a - \alpha_c \Delta T_c) \quad (19.107)$$

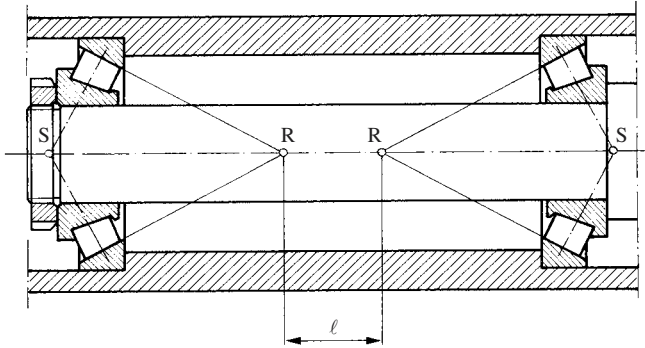


Fig. 19.46 Montage en O, les cônes de roulement ne se coupent pas.

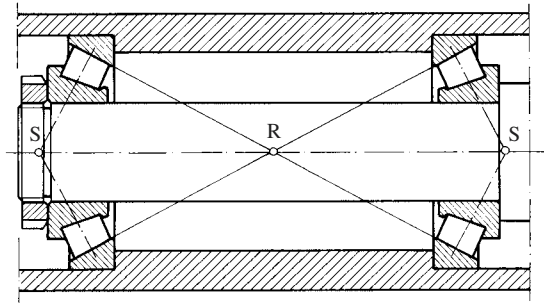
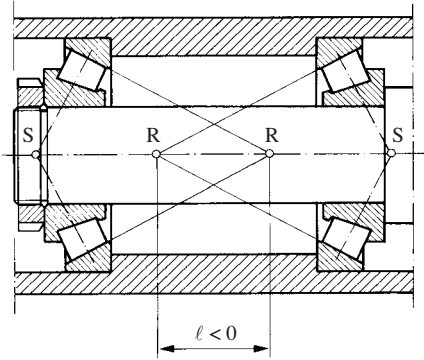
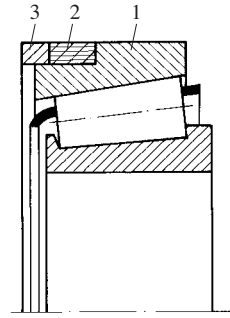


Fig. 19.47 Montage en O, les sommets des cônes de roulement sont confondus.

Lorsque les sommets des deux cônes de roulements sont confondus (fig. 19.47), la variation de température des éléments ne modifie pas le jeu, car l'effet de l'augmentation du diamètre des bagues est rattrapé par l'allongement axial. Enfin, si les cônes de roulement se coupent (fig. 19.48), la distance  $\ell$  est négative et le jeu diminue lorsque l'arbre se dilate plus fortement que le bâti.



**Fig. 19.48** Montage en O avec intersection des cônes de roulement.

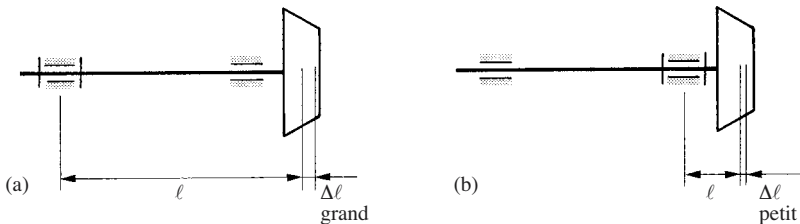


**Fig. 19.49** Roulement à compensation de dilatation thermique.

La société Timken a breveté [19.13] un roulement (fig. 19.49) dans lequel la bague extérieure (1) contient un anneau en élastomère (2) et une bague d'appui (3). Le coefficient de dilatation de l'élastomère étant plusieurs fois supérieur à celui de l'acier ou de l'aluminium, sa dilatation compense la dilatation différentielle de l'arbre et du bâti. La précontrainte est finalement peu ou pas affectée par les variations de température.

### Engrenages coniques

Le portage des dentures d'engrenages coniques ou hypoïdes est très sensible à la position relative du pignon et de la roue. C'est pourquoi les arbres et les paliers doivent être très rigides. La dilatation thermique des arbres doit aussi affecter le moins possible le jeu de denture, on veillera que les paliers fixes des deux arbres se trouvent le plus près possible de l'engrenage (fig. 19.50) afin que la longueur de dilatation  $\ell$  soit courte.



**Fig. 19.50** Disposition du palier fixe d'un pignon conique ou hypoïde: (a) défavorable, grande dilatation; (b) favorable.

### 19.7.3 Contraintes thermiques monoaxiales

#### Efforts et contraintes

Considérons un système fermé (fig. 19.51) dans lequel il n'y a aucune force lorsqu'il se trouve à une température uniforme. Coupons la boucle par un plan  $\pi$  et modifions la distribution de température. Les sections  $\pi'$  et  $\pi''$  s'écartent de la distance  $\delta$  correspondant à la dilatation thermique. Comme la boucle est en réalité fermée, il apparaît une force intérieure qui a tous les caractères d'une précontrainte. En faisant appel à la notion de rigidité intérieure  $k_i$  (§ 7.2.2), la force se calcule facilement :

$$F = k_i \delta \quad (19.108)$$

On l'appelle *force thermique*, elle provoque des *contraintes thermiques* dans le système.

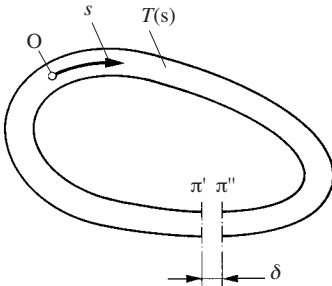


Fig. 19.51 Dilatation thermique intérieure.

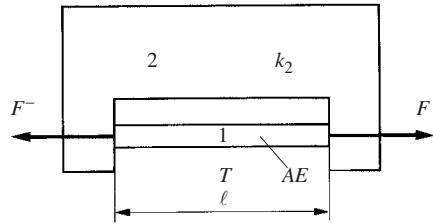


Fig. 19.52 Contrainte thermique.

Examinons, par exemple, un système particulier consistant en une barre (1) insérée dans une pièce (2) (fig. 19.52), on a sa rigidité intérieure

$$k_i = \frac{1}{\frac{\ell}{AE} + \frac{1}{k_2}}$$

Supposons que la force intérieure soit nulle lorsque tout le système se trouve à la température de montage  $T_0$ . Chauffons uniquement la barre (1) jusqu'à la température  $T$ , elle se dilate de la quantité

$$\delta = \ell \alpha (T - T_0)$$

dont il résulte la force thermique

$$F = \frac{\ell}{\frac{\ell}{AE} + \frac{1}{k_2}} \alpha (T - T_0) \quad (19.109)$$

La barre est comprimée en cas d'échauffement et tendue si on la refroidit.

Si la pièce extérieure (2) est beaucoup plus rigide que la barre, on a

$$F \approx AE\alpha(T - T_0) \quad (19.110)$$

et la contrainte thermique dans la barre vaut

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\alpha(T - T_0) \quad (19.111)$$

Ces deux expressions permettent de tirer les conclusions qui suivent relatives à une pièce montée dans un objet très rigide :

- la force thermique exercée par la barre sur ses appuis est indépendante de sa longueur, c'est pourquoi de l'eau qui gèle dans une petite fente est capable de faire éclater un caillou ;
- la contrainte thermique dans une pièce travaillant en traction ou en compression est indépendante de sa section.

Les contraintes thermiques sont fortes et ne doivent jamais être sous-estimées. On atteint, par exemple, la limite élastique d'un élément encastré en Ac 50 ( $R_e = 290 \text{ N/mm}^2$  ;  $E = 200\,000 \text{ N/mm}^2$  ;  $\alpha = 11,5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) pour un échauffement de seulement

$$T - T_0 = \frac{R_e}{E\alpha} = 126 \text{ K}$$

### Diminution des contraintes thermiques

La formule (19.108) montre qu'on peut réduire la force thermique en diminuant la rigidité intérieure du système et la dilatation.

#### *Assouplir*

Contrairement à ce qu'on pense au premier abord face à une rupture par contrainte thermique, il ne faut pas toujours renforcer la pièce endommagée, mais assouplir le système, parfois même en affaiblissant la pièce dangereuse. Les mesures discutées à la section 7.7 concourent à ce but.

Le principe d'assouplissement est toujours largement utilisé en construction de tuyauterie. On installe des U (fig. 19.53) ou des lyres (fig. 19.54) de dilatation dans les longs tronçons de tuyaux rectilignes. On utilise aussi souvent des compensateurs à soufflet beaucoup moins encombrants (fig. 19.55). Il convient de toujours étudier très soigneusement la construction et la position des points d'appuis fixes et glissants. Il faut en particulier toujours fixer une extrémité d'un soufflet et guider le tube à l'autre extrémité sous peine que la poussée hydrostatique écarte le tube latéralement en étirant le soufflet.

#### *Interrompre les boucles de précontrainte*

Cette mesure revient à annuler la rigidité du système. C'est pourquoi on ne fixe habituellement axialement qu'un seul des roulements portant un arbre (fig. 19.56). Parfois l'arbre est même flottant.

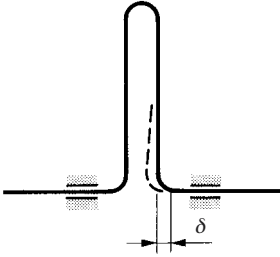


Fig. 19.53 U de dilatation.

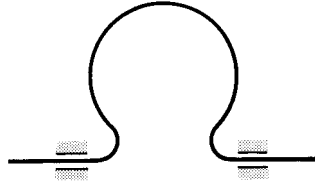


Fig. 19.54 Lyre de dilatation.

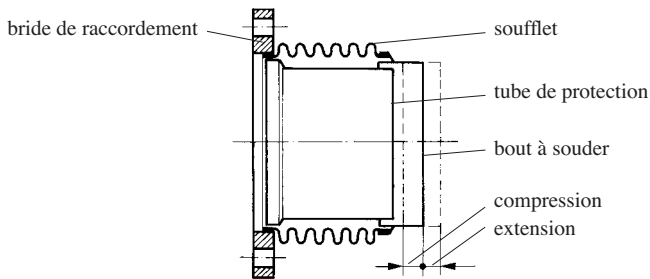


Fig. 19.55 Compensateur axial à soufflet.

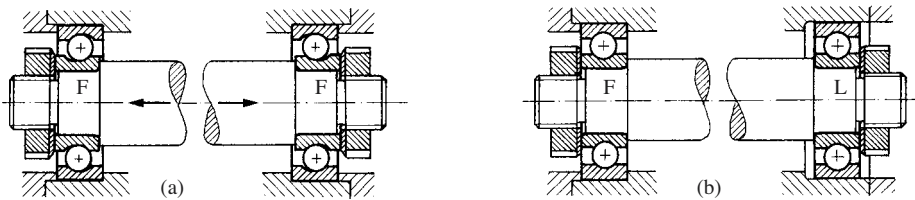


Fig. 19.56 Arbres sur deux roulements à billes: (a) deux paliers fixes, montage hyperstatique; (b) un palier libre axialement.

### Exemple numérique

Deux roulements à billes à contact oblique, type 7210 B, sont montés face à face comme dans la figure 19.45. La distance de dilatation  $\ell$  vaut 400 mm et l'arbre en acier est 10 K plus chaud que le carter, en acier lui aussi. L'arbre se dilate de 48  $\mu\text{m}$ . Les déformations des roulements s'ajoutent, donc chacun doit se déformer de 24  $\mu\text{m}$ . Selon la figure 6.26, la force thermique est de l'ordre de 10 kN. Comme la capacité de charge dynamique de base de ces roulements est  $C = 37,5$  kN, on constate que la charge thermique est relativement forte et abrège considérablement leur longévité.

### 19.7.4 Contraintes thermiques multiaxiales

#### Loi de Hooke généralisée

Un élément solide  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  est soumis aux contraintes principales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ . Supposons que la température de l'élément augmente d'une quantité  $\Delta T$ , l'allon-

gement thermique  $\alpha \Delta T$  se superpose aux allongements mécaniques provoqués par les contraintes. Par conséquent, avec le coefficient de Poisson  $\mu$ , l'allongement total s'écrit

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x) \right] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right] + \alpha \Delta T \end{aligned} \right\} \quad (19.112)$$

C'est la loi de Hooke généralisée.

### Chauffage local d'une plaque

Un petit élément d'une plaque plane subit l'échauffement  $\Delta T$  (fig. 19.57). Encastré dans la plaque, il ne peut pas se dilater dans le plan de la plaque; par conséquent,  $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$ . La dilatation thermique est en quelque sorte bloquée par la matière environnante qui comprime latéralement l'élément par une contrainte  $\sigma_x = \sigma_z = \sigma$ . Si la plaque est mince, on peut imaginer que la dilatation de l'élément considéré est libre selon l'épaisseur de la plaque. Introduisons ces conditions aux limites dans la première et dans la troisième des équations (19.112), il vient

$$0 = \frac{1}{E} [\sigma - \mu(\sigma + 0)] + \alpha \Delta T$$

Cette équation fournit la valeur de la contrainte thermique

$$\sigma = -\frac{\alpha E}{1 - \mu} \Delta T \quad (19.113)$$

C'est une contrainte de compression en cas d'échauffement de l'élément, ou une traction en cas de refroidissement.

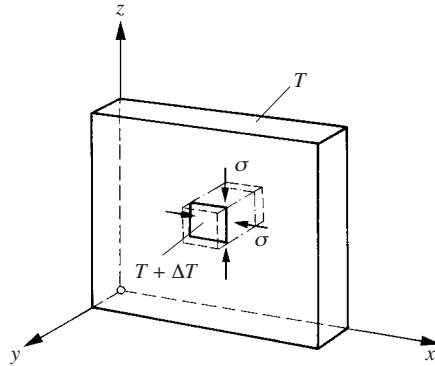


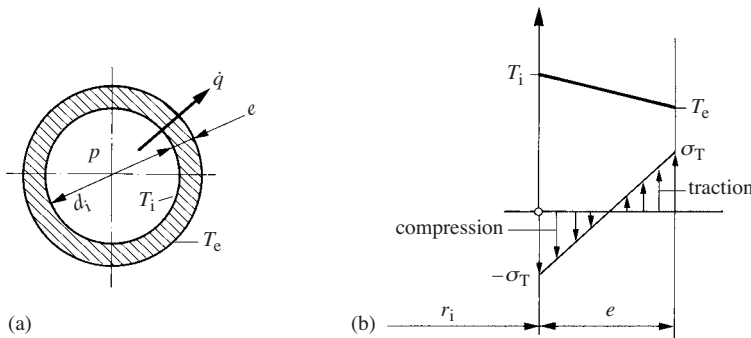
Fig. 19.57 Echauffement d'un élément de plaque.



### Flux de chaleur permanent à travers la paroi d'un cylindre

Un cylindre contient un fluide chaud, le flux de chaleur vers l'extérieur est  $\dot{q}$  (fig. 19.58a). En régime permanent, il existe une distribution logarithmique de la température dans la paroi. Mais dans le cas d'une paroi mince ( $e/d_e < 0,05$ ), on suppose que la température varie linéairement (fig. 19.58b). Elle provoque une contrainte thermique dont les valeurs extrêmes sont

$$\sigma_T = \pm \frac{1}{2} \frac{\alpha E}{1 - \mu} (T_i - T_e) \quad (19.114)$$



**Fig. 19.58** Contrainte thermique dans la paroi d'un cylindre: (a) schéma; (b) température et contrainte dans la paroi.

On fait les constatations intéressantes suivantes:

- la contrainte thermique est la plus forte à la surface de la paroi;
- la contrainte est une traction dans la partie froide et une compression dans la partie chaude;
- en cas de distribution de température linéaire dans la paroi, la plus forte contrainte thermique est égale à la moitié de la contrainte obtenue en bloquant la dilatation selon deux directions.

Le flux de chaleur qui traverse une plaque ou un cylindre mince provoque une différence de température

$$T_i - T_e = \frac{e}{k} \dot{q}$$

Substituons cette valeur dans l'expression (19.114)

$$\sigma_T = \pm \frac{\alpha E}{2(1 - \mu)} \frac{e}{k} \dot{q} \quad (19.115)$$

On voit que la contrainte thermique est proportionnelle à l'épaisseur du cylindre et au flux de chaleur. Par conséquent, il est possible de réduire la contrainte thermique

en diminuant le flux de chaleur et l'épaisseur de la paroi. On a avantage à choisir un matériau qui se dilate peu et dont la conductibilité thermique est élevée.

On rencontre le cas intéressant des tubes de chaudières soumis à une pression intérieure et au feu à l'extérieur. La pression provoque la contrainte (en paroi mince)

$$\sigma_p = \frac{d_i p}{2e} \quad (19.116)$$

La contrainte de traction résultant de la pression et du flux de chaleur vaut alors

$$\sigma = \frac{d_i p}{2e} + \frac{\alpha E}{2(1 - \mu) k} \frac{e}{\dot{q}} \quad (19.117)$$

La contrainte de pression diminue lorsque l'épaisseur de la paroi augmente tandis que la contrainte thermique croît. La contrainte totale passe par un minimum pour une épaisseur optimale de la paroi (fig. 19.59) qui vaut

$$e_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{(1 - \mu) k}{\alpha E} \frac{p}{\dot{q}} d_i} \quad (19.118)$$

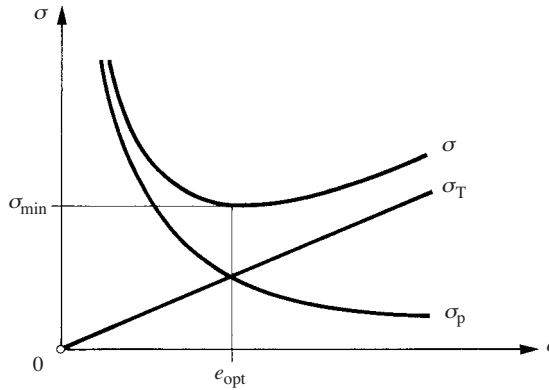


Fig. 19.59 Epaisseur optimale de la paroi d'un tube chauffé de l'extérieur.

Ce calcul permet de dimensionner les tubes de chaudière. On choisira l'épaisseur un peu plus forte que la valeur optimale pour anticiper l'amincissement ultérieur par la corrosion.

### Choc thermique

On a admis jusqu'ici que le gradient de température dans la paroi était établi en régime permanent. En réalité, on atteint cet équilibre seulement en passant par un régime transitoire.

Considérons, par exemple, un cylindre dont la paroi se trouve initialement à une température uniforme  $T_0$  (fig. 19.60) et supposons qu'à l'instant  $t = 0$  l'intérieur soit

immédiatement porté à une température supérieure  $T_i$ . De la chaleur va se propager à travers la paroi et l'échauffer progressivement en l'amenant à son état de régime permanent. La couche superficielle interne de la paroi s'échauffe donc brusquement de la quantité  $\Delta T$  et provoque une contrainte thermique dont la valeur est donnée par (19.113).

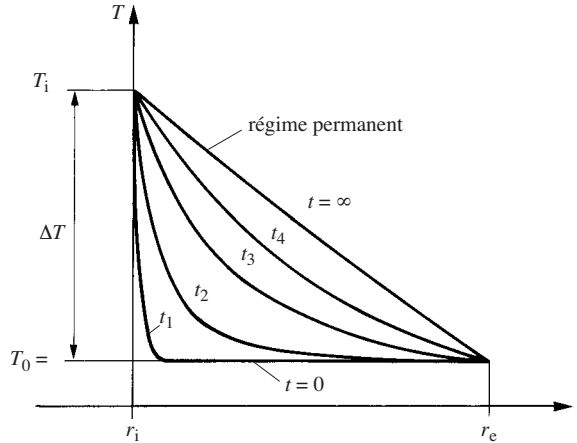


Fig. 19.60 Transitoire de température dans une paroi.

Toute variation brutale de température cause de fortes contraintes; l'ensemble du phénomène est appelé **choc thermique**. Des chocs thermiques se produisent, par exemple, si un solide froid est brusquement plongé dans un liquide chaud ou exposé à de la vapeur qui condense sur lui. La répétition des chocs thermiques fatigue le matériau et peut le fissurer. Les matériaux fragiles y sont naturellement particulièrement sensibles; chacun sait qu'un verre épais et froid peut se briser si on le plonge brutalement dans de l'eau bouillante. Ce phénomène est à l'origine des tapures de trempe.

En conclusion, il faut éviter les chocs thermiques et conduire les installations avec beaucoup de précaution. Le réchauffage et le refroidissement des pièces doivent être lents, particulièrement lorsque les parois sont épaisses comme dans les récipients à haute pression, les bâches de turbines à gaz ou à vapeur. Dans ces cas, on prescrit souvent la vitesse maximale admissible des variations de température pour ne pas surcharger le matériau. Des considérations de contraintes thermiques ont souvent une incidence directe sur l'exploitation des installations.

### 19.7.5 Déformations

Les champs de température non uniformes provoquent non seulement des contraintes thermiques dans le corps des pièces mais aussi des déformations macroscopiques. On observe, par exemple, qu'une poutre s'incurve lorsque l'on chauffe un de ses bords (fig. 19.61); la poutre est convexe du côté chauffé.

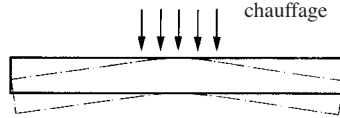


Fig. 19.61 Courbure d'une poutre chauffée sur un bord.

### Arbres et paliers

Dans les paliers en régime de lubrification sec, limite ou mixte, la source de chaleur de frottement se trouve dans la surface de contact des pièces. On rencontre deux cas :

- La direction de la charge est fixe par rapport au coussinet (fig. 19.62a). Toute la périphérie de l'arbre passe devant la source de chaleur, l'arbre chauffe et se dilate uniformément. En revanche, le coussinet chauffe localement et se déforme comme indiqué dans la figure.
- La direction de la charge et la zone de contact tournent par rapport au coussinet (fig. 19.62b). Le coussinet chauffe et se dilate uniformément; par contre, la génératrice de l'arbre située dans la source de chaleur chauffe plus que les régions non chargées et l'arbre se déforme en banane.

Ces déformations sont à l'origine de portage irrégulier et de surcharges locales.

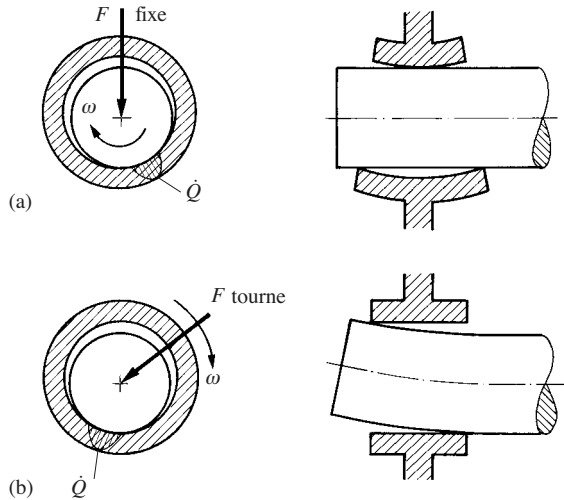


Fig. 19.62 Dilatation de paliers : (a) l'arbre tourne par rapport à la charge ; (b) la charge tourne par rapport au coussinet.

### Bâtis

Les bâtis sont exposés à plusieurs sources de chaleur :

- les *sources intérieures* telles que paliers, engrenages, moteurs ;
- les *sources extérieures*, habituellement le soleil, le voisinage d'un objet chaud ou l'exposition à de l'air chaud.

L'échauffement des bâtis n'est évidemment jamais uniforme, il est le plus grand au voisinage immédiat des sources de chaleur. Il en résulte des déformations préjudiciables à la précision du positionnement des organes et des contraintes thermiques capables de surcharger les pièces et les organes.

Les mesures à prendre pour diminuer les dilatations thermiques des bâtis sont notamment :

- mettre les moteurs et les réducteurs à l'extérieur des bâtis ;
- prévoir des déflecteurs isolants près des moteurs pour éloigner l'air chaud du bâti ;
- réduire la conduction de chaleur en montant les sources de chaleur sur des supports en acier inoxydable dont le coefficient de conduction de chaleur est 4 à 5 fois plus petit que celui de l'acier ;
- diminuer l'épaisseur des tôles qui portent des sources de chaleur (mesure contradictoire avec la recherche de rigidité élevée) ;
- refroidir énergiquement les sources de chaleur ;
- isoler la machine des sources de chaleur extérieures, abriter du soleil.

On garnit souvent les bâtis de machines-outils de béton imprégné de polymères pour accroître l'inertie thermique et favoriser l'homogénéisation de la température. On a obtenu des résultats favorables en réalisant même la plus grande partie de bâtis entièrement en béton [19.14, 19.15].

## 19.8 CONCLUSIONS PRINCIPALES

Les pertes, principalement le frottement, produisent de la chaleur qui échauffe les organes de machine. La température est limitée par la tenue des matériaux et par la lubrification correcte des mécanismes, c'est pourquoi l'échauffement constitue un critère de dimensionnement.

Du point de vue thermique, on accroît la puissance des organes de transmission comme suit :

- choisir des matériaux et des lubrifiants résistants à la chaleur ;
- accroître la surface de refroidissement, par exemple par des ailettes judicieusement dimensionnées ;
- souffler sur les carters ;
- favoriser la transmission de chaleur interne par des pièces bonnes conductrices de la chaleur ;
- améliorer le rendement des organes de machines ;
- refroidir l'huile par un circuit auxiliaire externe.

L'échauffement conditionne la taille des transmissions à engrenage refroidies à l'air, particulièrement celle des réducteurs à vis sans fin. La construction de réducteurs compacts en acier performant est, à forte puissance, incompatible avec un refroidissement naturel. Il est alors nécessaire de recourir au refroidissement auxiliaire de l'huile ou de n'utiliser que des matériaux non traités donnant des engrenages volumineux. L'échauffement est aussi critique dans les paliers où il limite la charge et/ou la vitesse de service.

En cas de service discontinu ou temporaire, on peut forcer la puissance d'un organe au delà de sa puissance nominale tant que sa température n'excède pas la valeur admissible.

Le glissement de pièces l'une sur l'autre produit de la chaleur qui diffuse dans les deux corps. Le flux de chaleur dans une pièce est proportionnel au coefficient de pénétration de la chaleur de son matériau. On admet que les points de contact des deux surfaces ont la même température.

La propagation de la chaleur dans un solide sur lequel passe une source de chaleur dépend du rapport de la vitesse de glissement de la source à la diffusivité thermique de la chaleur dans le matériau. Dans le domaine de vitesse rencontré dans les engrenages, l'échauffement est proportionnel à la racine carrée de la vitesse de rotation.

Les considérations thermiques sont importantes pour le dimensionnement des freins et des embrayages. L'échauffement limite leur fréquence d'action. Les embrayages monodisques s'imposent si le dégagement de chaleur est important.

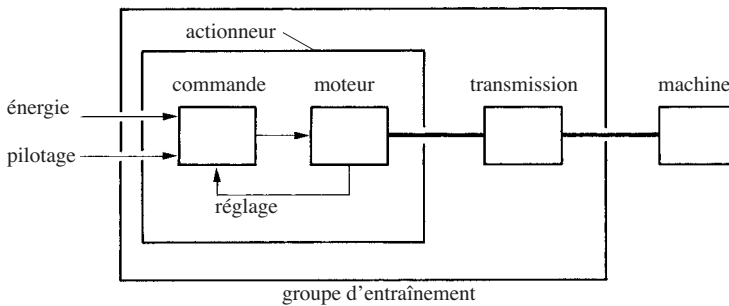
La dilatation thermique modifie la géométrie et donne naissance à des contraintes susceptibles de surcharger les pièces. Cet effet est sensible dans le cas des arbres montés entre des paliers fixes. On empêche ces surcharges en évitant les montages hypers-tatiques.

Un flux de chaleur traversant une paroi épaisse provoque des contraintes thermiques d'autant plus fortes que la paroi est plus épaisse et que le matériau est moins bon conducteur de la chaleur. La limitation des contraintes oblige à ne pas varier la température trop rapidement. Il existe une épaisseur optimale de parois de cylindres soumis simultanément à une pression et à un flux de chaleur.

# ENTRAÎNEMENT

## 20.1 INTRODUCTION

La figure 20.1 représente le schéma de tout entraînement. Le moteur entraîne la machine à animer par l'intermédiaire d'une transmission mécanique chargée d'adapter les caractéristiques du moteur à celles de l'organe considéré. Il est alimenté par des appareils de commande qui assurent souvent le réglage de la vitesse et de l'effort en remplissant encore des fonctions de protection. Le moteur et sa commande constituent un tout qu'on appelle **actionneur**. Il est alimenté en énergie et reçoit les ordres de pilotage. L'actionneur et la transmission forment le **groupe d'entraînement**.



**Fig. 20.1** Schéma d'un entraînement.

On appellera **machine** l'unité mécanique qu'il s'agit d'animer même si, dans le sens commun, une machine comprend aussi son moteur.

La machine à entraîner pose un certain nombre d'exigences qui constituent le cahier des charges de l'entraînement. Sur le plan mécanique, ce sont principalement :

- la vitesse nominale et le domaine de variation de la vitesse;
- le couple nominal et la caractéristique du couple d'entraînement en fonction de la vitesse;
- l'évolution de la vitesse et du couple d'entraînement au cours du temps;
- le couple résistant de démarrage;
- la durée des cycles de fonctionnement et la fréquence des démarrages;
- la durée maximale admissible du démarrage et du freinage;
- l'inertie;
- la précision du positionnement et de la vitesse;
- l'environnement : température, atmosphère particulière, humidité, vibrations;

- la masse du dispositif d'entraînement acceptable, l'encombrement admissible, la disposition géométrique;
- la source d'énergie disponible.

L'étude d'un entraînement a pour buts de :

- choisir le genre de moteur selon la source d'énergie;
- définir la puissance et la vitesse nominale du moteur (dimensionnement);
- choisir le type de transmission et définir ses caractéristiques principales.

Jusqu'à quelques centaines de kilowatts, on achète les moteurs et les organes de transmission dans le commerce sur la base de catalogues.

Ce chapitre a pour but de préparer le cahier des charges de ce matériel, il est structuré comme suit :

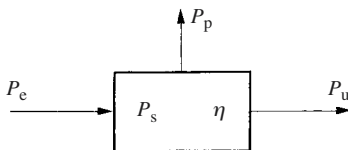
- Section 20.2 Présentation des méthodes de calcul de la puissance d'entraînement d'une machine.
- Section 20.3 Choix du genre de moteur selon la source d'énergie disponible. Caractéristiques mécaniques de divers moteurs, définitions de la puissance nominale et de la puissance disponible en surcharge; l'accent est mis sur les moteurs électriques.
- Section 20.4 Calcul de la puissance nominale requise. Dimensionnement de volants pour régulariser la puissance du moteur.
- Section 20.5 Choix de la vitesse des moteurs et du rapport de transmission. Présentation des techniques de variation de la vitesse d'entraînement.
- Section 20.6 Etude du positionnement d'un objet, choix du moteur et son adaptation au mécanisme.
- Section 20.7 Analyse succincte de l'entraînement de véhicules; détermination des rapports de transmission.
- Section 20.8 Conclusions principales.

Le réglage et la commande des moteurs sortent du cadre de cet ouvrage.

## 20.2 PUISSANCE D'ENTRAÎNEMENT

### 20.2.1 Puissance instantanée

Le choix d'un moteur exige de connaître la puissance d'entraînement  $P_e$  requise. La puissance utile  $P_u$  nécessaire au travail de la machine est généralement connue.



**Fig. 20.2** Modèle énergétique d'une machine.



La puissance d'entraînement peut se calculer selon quatre méthodes :

- Calculer la perte  $P_{pi}$  de chaque organe (§ 10.5.2), puis sommer les pertes pour obtenir la perte totale. Le cas échéant, tenir compte de la puissance stockée  $P_s$ . La puissance d'entraînement instantanée résulte du bilan de puissance (fig. 20.2) et (§ 10.5.3) :

$$P_e = P_u + P_s + \sum_1^n P_{pi} \quad (20.1)$$

On ne calcule habituellement que les plus grosses pertes et on évalue les petites. Mais ces calculs sont imprécis, à cause des nombreuses hypothèses à faire et de la forte dispersion de la valeur des coefficients de frottement intervenant dans les calculs.

- Calculer la puissance d'entraînement sur la base du rendement  $\eta$  de la transmission :

$$P_e = \frac{P_u}{\eta} \quad (20.2)$$

Le rendement est souvent donné par les fabricants.

- Déterminer la puissance d'entraînement par comparaison avec la puissance mesurée dans la pratique de machines semblables.
- Calculer la puissance à partir du couple d'entraînement et de la vitesse :

$$P_e = M_e \omega_e \quad (20.3)$$

Le couple d'entraînement permanent instantané  $M_e$  en régime de vitesse quasi stationnaire se calcule par la formule (14.44). On ne tient pas compte des variations de couples vibratoires, beaucoup trop rapides pour affecter la marche d'un moteur.

Dans certains cas, la puissance utile est nulle, par exemple dans les machines à emballer ou dans les machines d'imprimerie. La puissance d'entraînement ne sert qu'à compenser les pertes

$$P_e = \sum_1^n P_{pi} \quad (20.4)$$

et un calcul par le rendement est impossible.

La connaissance du couple et de la puissance instantanée est utile pour

- dimensionner les organes sur la base de leur résistance mécanique;
- apprécier l'ampleur des irrégularités de marche et décider d'éventuelles mesures de régulation.

Lorsque la vitesse varie très faiblement, on fait intervenir dans (20.3) le couple moyen d'entraînement calculé par (14.49) sur un cycle de mouvement.

**Remarque**

Il faut toujours déterminer l'effort ou la puissance d'entraînement en partant de l'élément récepteur, au bout de la chaîne cinématique, puis en remontant le cheminement de l'énergie jusqu'à l'organe d'entrée auquel est accouplé le moteur.

**20.2.2 Puissance moyenne**

La puissance moyenne pendant une période de fonctionnement  $T$  est :

$$\bar{P}_e = \frac{1}{T} \int_0^T M_e \omega_e dt = \frac{1}{T} \int_0^T P_e dt \quad (20.5)$$

tandis que la puissance maximale requise vaut

$$P_{e \max} = (M_e \omega_e)_{\max} \quad (20.6)$$

On définit le *facteur de surcharge d'entraînement* :

$$p_e = \frac{P_{e \max}}{\bar{P}_e} \quad (20.7)$$

On évite les variations de puissances excessives en régularisant la marche et en prévoyant des dispositifs d'équilibrage de puissance (§ 14.6.2).

La puissance d'entraînement de certaines machines à travail cyclique répétitif varie fortement. La durée d'un cycle est de l'ordre de 0,1 à 0,5 seconde, par exemple, pour les presses à emboutir automatiques, les machines de cartonnage ou les machines à tisser. C'est moins de 1% de la constante de temps thermique des moteurs ou des organes de transmission de ces machines. Par conséquent, les fluctuations de puissance n'affectent pratiquement pas la température de régime permanent de ces organes. Dans ce cas, le dimensionnement thermique s'effectue uniquement sur la base de la puissance moyenne calculée sur un cycle de machine.

La puissance moyenne stockée dans des ressorts et sous forme d'énergie cinétique est le plus souvent nulle au cours d'un cycle de fonctionnement.

On ne peut ignorer les paliers de puissances qui durent assez longtemps pour influencer significativement l'échauffement. Un calcul plus précis s'impose.

**20.3 MOTEURS****20.3.1 Sources d'énergie**

Le choix du type de moteur dépend de la source d'énergie disponible et des conditions de service.

**Electricité**

C'est la source d'énergie universelle dès qu'une machine peut se raccorder à un réseau. Les moteurs électriques sont bon marché à cause de leur simplicité et parce

qu'ils sont fabriqués en grandes séries. Ils sont propres, silencieux et fiables. Leur commande est relativement simple, leur vitesse est facilement réglable.

La densité de puissance et le couple des moteurs électriques sont petits. Pour exercer de gros efforts, on est obligé de les associer à des réducteurs de vitesse encombrants. L'exécution de translations exige des mécanismes de transformation de mouvement appropriés, sauf pour de petits moteurs linéaires. Les moteurs électriques sont dangereux en atmosphère explosive.

### Hydraulique

Les moteurs hydrauliques offrent des couples très élevés sans réducteur et les vérins fournissent de grandes forces. Leur puissance massique est beaucoup plus grande que celle des moteurs électriques. Leur petite inertie se traduit par de bonnes performances dynamiques. La faible compressibilité des liquides permet de réaliser des commandes relativement rigides, sans frein d'arrêt. Le réglage de vitesse est aisé.

En revanche, les moteurs et vérins hydrauliques exigent des tuyaux de liaison encombrants. Le coût des moteurs et du matériel de commande est élevé. En cas de fuite, l'huile est polluante et peut s'enflammer; mais les installations hydrauliques ne risquent pas de déclencher des explosions en atmosphère explosive. Les pompes et moteurs hydrauliques dégagent considérablement de chaleur, exigeant parfois des refroidisseurs particuliers; ils sont bruyants.

### Pneumatique

La pneumatique est bon marché et simple d'emploi. Les fuites de fluide sont inoffensives. Les mouvements sont rapides du fait de la faible masse des pièces en mouvement.

La grande compressibilité de l'air empêche la construction de commandes rigides et précises, à moins de combinaisons oléo-pneumatiques. La pneumatique est bruyante, surtout les moteurs rotatifs.

### Carburants

Les moteurs à essence et les moteurs diesels s'emploient lorsqu'on ne dispose pas d'électricité et à bord d'engins mobiles. Mais la commande mécanique des récepteurs exige des chaînes cinématiques compliquées. C'est pourquoi ces moteurs entraînent souvent des pompes qui alimentent un réseau hydraulique. On rencontre aussi des transmissions électriques.

Les moteurs à pistons ne donnent leur pleine puissance qu'à vitesse élevée. Ils sont bruyants et polluants, chauffent considérablement et sont source de fortes trépidations. Ils exigent beaucoup d'entretien, leur longévité est relativement courte.

## 20.3.2 Puissance nominale

*La puissance nominale d'un moteur est la puissance qu'il peut fournir en régime continu, dans les conditions normales d'emploi, sans subir aucun dommage. Elle est indiquée sur la plaquette signalétique.*

A la puissance nominale  $P_N$  correspondent le couple nominal  $M_N$  et la vitesse nominale  $\omega_N$  tels que

$$P_N = M_N \omega_N \quad (20.8)$$

Le régime continu est caractérisé par une puissance constante délivrée assez longtemps pour que la température de toutes les pièces du moteur atteignent leur valeur de régime permanent sans dépasser les températures admissibles (fig. 20.3).

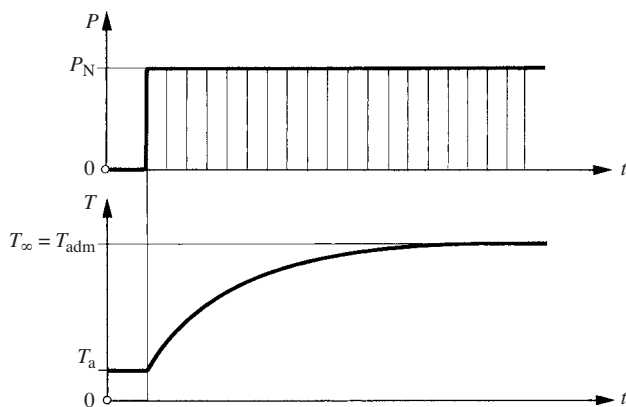


Fig. 20.3 Régime continu à la puissance nominale.

La puissance nominale correspond à des conditions de fonctionnement définies dans les normes. Pour les moteurs électriques, ce sont :

- température de l'air ambiant:  $40^{\circ}\text{C}$
- altitude:  $1000\text{ m}$
- tension d'alimentation: tension nominale  $\pm 5\%$

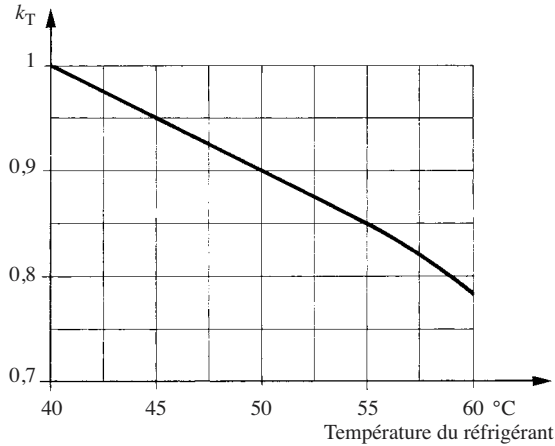
La puissance que peut effectivement fournir un moteur en régime continu est étroitement liée à ses possibilités de refroidissement. La puissance limite diminue lorsque la température ambiante est supérieure à  $40^{\circ}\text{C}$ , ce qui s'exprime par le *facteur de correction de température*  $k_T$  (fig. 20.4); le *facteur de correction d'altitude*  $k_h$  (fig. 20.5) traduit le fait que la diminution de la densité de l'air avec l'altitude réduit son pouvoir de refroidissement. On ne tient pas compte de ce dernier facteur lorsque le moteur est installé en plein air, car la diminution de la température en altitude compense l'effet de la baisse de pression.

La *puissance nominale corrigée* vaut

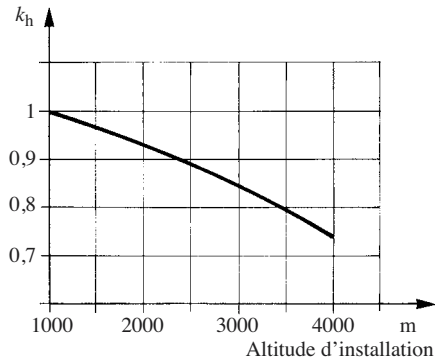
$$P'_N = k_T k_h P_N \quad (20.9)$$

### 20.3.3 Caractéristiques de couple et de puissance

On a vu (§ 14.4.4) l'importance de la *caractéristique de couple* pour déterminer le point de fonctionnement permanent d'une machine et pour calculer la durée de son démarrage (§ 14.5.1). Sa *caractéristique de puissance* en fonction de la vitesse est aussi importante pour adapter correctement un moteur à la machine qu'il entraîne. On classe ci-après les moteurs selon l'allure typique de leurs caractéristiques afin d'aider le lecteur à choisir celui qui convient le mieux. En revanche, l'étude détaillée des moteurs sort du cadre de cet ouvrage.



**Fig. 20.4** Facteur de correction de température.



**Fig. 20.5** Facteur de correction d'altitude.

### Puissance constante

Les moteurs séries, à courant continu ou alternatif monophasé, offrent une puissance à peu près constante dans le domaine utile de fonctionnement (fig. 20.6); leur caractéristique de couple présente une allure hyperbolique. Le couple à basse vitesse est limité par le courant admissible. A charge nulle ou petite, le moteur a tendance à s'emballer jusqu'à des vitesses très dangereuses; il faut protéger ces moteurs contre les survitesses. Le couple de démarrage atteint jusqu'à  $2,5 M_N$ , soit un peu plus que pour les moteurs shunts.

Ces caractéristiques sont intéressantes pour les engins de levage et pour les locomotives, car l'autoadaptation de la vitesse à la charge permet d'exploiter au mieux toute la puissance disponible. Le mouvement est rapide à faible charge, lent à forte charge.

Un moteur série ne se prête pas au freinage par récupération, mais on obtient un couple de freinage énergétique en court-circuitant ses bornes. L'énergie dissipée chauffe le moteur.

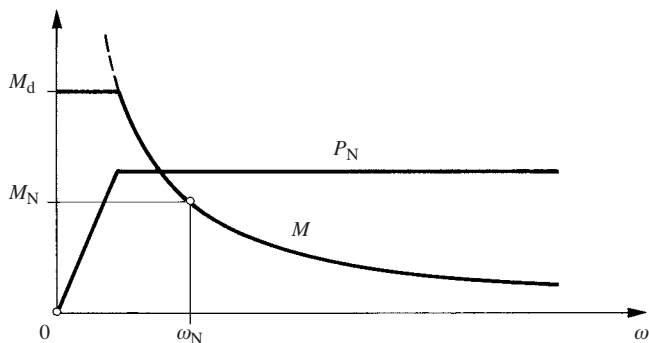


Fig. 20.6 Caractéristiques d'un moteur série.

### Couple constant

Les machines à pistons ont un couple moteur proportionnel à la différence de pression exercée sur les faces des pistons. Leur caractéristique de couple est relativement plate (fig. 20.7a) et présente un maximum  $M_{\max}$ , le couple diminue vers les vitesses élevées du fait des pertes de charge dans les canalisations et dans les organes de distribution. La puissance passe par un maximum  $P_{\max}$  pour une vitesse un peu inférieure à la vitesse maximale.

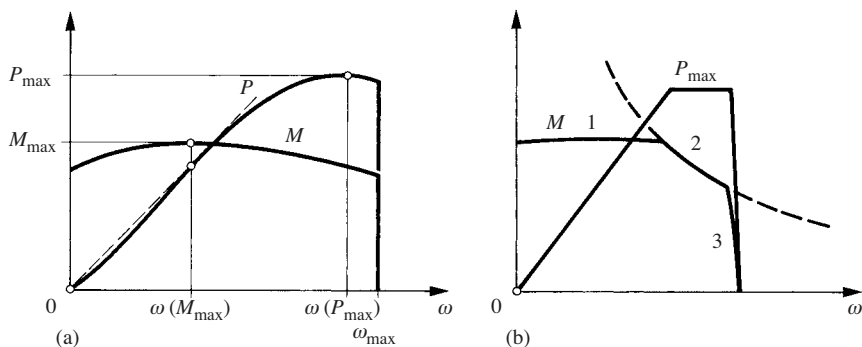


Fig. 20.7 Caractéristiques de moteurs à piston: (a) machine à vapeur; (b) moteur hydraulique.

La caractéristique de couple d'un moteur hydraulique (fig. 20.7b) est limitée par le débit maximal que peut fournir l'alimentation d'huile (branche 3). Le couple maximal est proportionnel à la pression d'huile. La puissance maximale, avec l'hyperbole de couple (2), est limitée par le frottement des couples cinématiques.

Les moteurs à allumage commandé ou à combustion interne présentent des caractéristiques analogues, mais ils fonctionnent mal au-dessous d'une certaine vitesse minimale  $\omega_{\min}$  (fig. 20.8). Ils sont inexploitable à basse vitesse. La vitesse maximale  $\omega_{\max}$  est limitée par la résistance mécanique des organes et par l'affolement de la distribution.

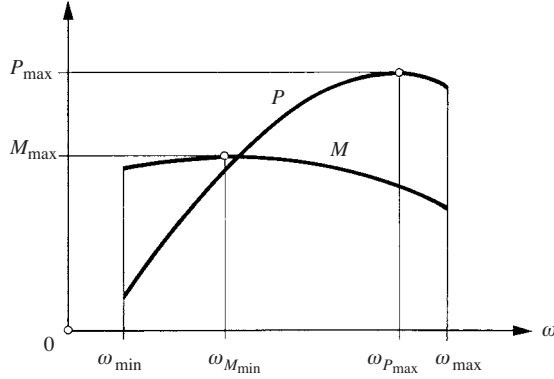


Fig. 20.8 Caractéristiques à plein gaz d'un moteur à piston.

### Caractéristiques de couple linéaire

De nombreux moteurs présentent une caractéristique de couple linéaire décroissante ou pouvant être assimilée à une droite (fig. 20.9). C'est le cas des :

- moteurs à courant continu à aimants permanents;
- moteurs à courant continu à excitation séparée;
- moteurs shunts à courant continu;
- turbines à vapeur et turbines hydrauliques;
- turbines à gaz dont le compresseur est entraîné par une turbine séparée.

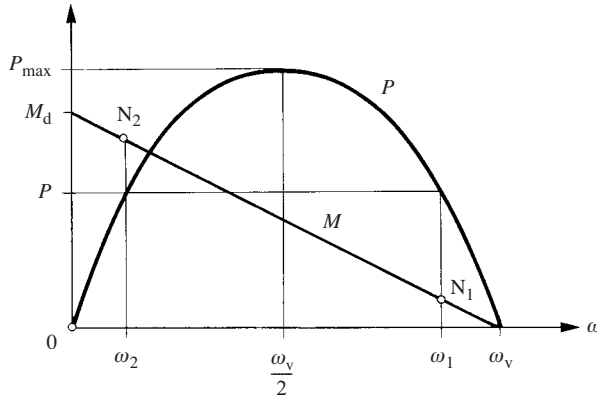


Fig. 20.9 Caractéristique de couple linéaire et puissance.

La position de la droite dans le plan effort-vitesse est définie par le couple de démarrage  $M_d$  et par la vitesse de marche à vide  $\omega_v$ . Le couple moteur en fonction de la vitesse s'exprime par

$$M = M_d \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_v} \right) \quad (20.10)$$

et la puissance fournie par

$$P = M\omega = M_d \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_v} \right) \omega \quad (20.11)$$

C'est une parabole dont le sommet, la puissance maximale, se trouve à la moitié de la vitesse de marche à vide. On démontre que

$$P_{\max} = \frac{1}{4} M_d \omega_v \quad (20.12)$$

Supposons qu'un moteur fournisse la puissance  $P$ , sa vitesse de fonctionnement s'obtient en résolvant (20.11) où on a préalablement introduit  $M_d$  tiré de (20.12). On trouve

$$\omega_{12} = \frac{\omega_v}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{P}{P_{\max}}} \right) \quad (20.13)$$

Le signe + correspond à la solution supérieure à  $\omega_v/2$  et le signe – concerne la branche inférieure de la parabole.

En introduisant (20.13) dans l'expression (20.10) du couple, on obtient le couple aux points de fonctionnement  $N_1$  et  $N_2$  (fig. 20.9), soit

$$M_{12} = \frac{M_d}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{P}{P_{\max}}} \right) \quad (20.14)$$

Les petits moteurs électriques, jusqu'à quelques centaines de watts, sont exploitables entre  $\omega_v/2$  et  $\omega_v$ . Le domaine de vitesse inférieure n'est utilisé qu'au démarrage à cause du fort courant consommé.

Les gros moteurs shunt ne peuvent fonctionner en régime permanent qu'au voisinage de la vitesse supérieure ( $0,95 \omega_v$ ) pour des raisons de limitation de courant. C'est pourquoi la vitesse diminue seulement de quelques pourcents lorsque le couple croît jusqu'à sa valeur nominale. Le couple de démarrage est limité par le courant, il atteint environ  $2 M_N$ . Le réglage de vitesse est précis.

Les turbines hydrauliques, à vapeur ou à gaz, fonctionnent en régime permanent au voisinage de  $\omega_v/2$  où leur rendement est le meilleur. En cas de décharge, ces machines s'emballent et leur vitesse peut doubler; c'est souvent inacceptable du point de vue de leur résistance aux forces centrifuges. Il convient donc impérativement de les protéger par des régulateurs automatiques de survitesse.

### Vitesse constante

Les moteurs triphasés synchrones ont une vitesse constante donnée par

$$n_s = 60 \frac{f}{p} \quad \text{ou} \quad \omega_s = 2\pi \frac{f}{p} \quad (20.15)$$



avec :

$f$  fréquence du réseau

$p$  nombre de paires de pôles du circuit magnétique

La vitesse reste constante, quel que soit le couple résistant, jusqu'à une valeur maximale où le moteur décroche du champ tournant et s'arrête (fig. 20.10). Il existe de petits moteurs monophasés synchrones pour l'horlogerie et la microtechnique.

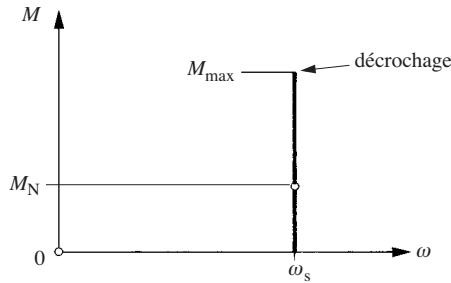


Fig. 20.10 Caractéristique de couple d'un moteur synchrone.

Un moteur électrique ne peut pas avoir moins de deux pôles (moteur bipolaire), il tourne à la vitesse de 3000 t/min en Europe où la fréquence des réseaux est 50 Hz, à 3600 t/min avec les réseaux à 60 Hz aux USA et au Canada. On obtient des vitesses plus basses avec des moteurs multipolaires, p. ex. 1000 t/min avec 6 pôles et 50 Hz.

### Moteurs triphasés asynchrones

C'est le type de moteur le plus répandu. Le réseau alimente les bobinages statoriques, ceux du rotor sont en court-circuit ou reliés à des résistances de démarrage.

La caractéristique de couple présente une branche descendante fortement inclinée (fig. 20.11). La vitesse de marche à vide est égale à la vitesse synchrone  $\omega_s$ , mais la vitesse diminue progressivement lorsque le couple fourni par le moteur augmente. Si  $\omega$  est la vitesse effective, on appelle *glissement* la fraction

$$g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \quad (20.16)$$

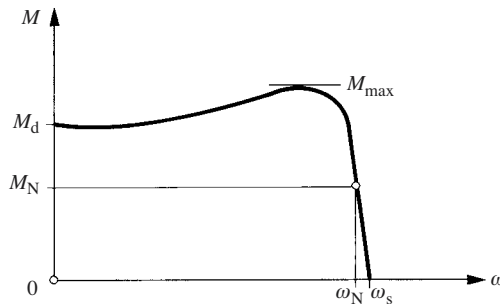


Fig. 20.11 Caractéristique d'un moteur asynchrone.

La vitesse de régime d'un moteur asynchrone est alors

$$n = 60 \frac{f}{p} (1 - g) \quad \text{ou} \quad \omega = 2\pi \frac{f}{p} (1 - g) \quad (20.17)$$

Le glissement nominal est habituellement de l'ordre de 3%. La table ci-dessous donne les vitesses courantes des moteurs industriels fonctionnant avec un réseau de 50 Hz; la vitesse nominale indiquée est approximative:

nombre de pôles:	2	4	6	8	
vitesse synchrone:	3000	1500	1000	750	t/min
vitesse nominale:	2900	1450	960	725	t/min

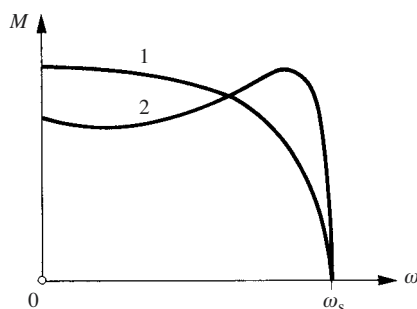


Fig. 20.12 Caractéristiques de couple de moteurs asynchrones.

On modifie l'allure de la caractéristique du couple en agissant sur la forme des pôles du rotor (fig. 20.12). La caractéristique (1) est favorable à un démarrage rapide, ou pour démarrer une machine à couple d'entraînement constant. La caractéristique (2) évite les à-coups trop violents avec une machine dont le couple de démarrage est très petit (pompes, ventilateurs).

Le couple de démarrage et le couple maximal des moteurs asynchrones sont en rapport avec leur couple nominal. On rencontre habituellement les valeurs suivantes:

- couple de démarrage:  $M_d = 1,6 \dots 2,5 M_N$
- couple maximal:  $M_{\max} = 2 \dots 3 M_N$

Le démarrage des moteurs asynchrones occasionne un fort appel de courant. Au-delà de quelques kW, les fournisseurs d'électricité interdisent le démarrage direct. On peut:

- Démarrer avec les bobines statoriques branchées en étoile puis, lorsque la vitesse est assez élevée, commuter en triangle (démarrage étoile-triangle).
- Insérer des résistances dans le bobinage rotorique et réduire les résistances lorsque la vitesse augmente. Les résistances peuvent tourner avec le rotor et sont court-circuitées par un démarreur centrifuge; pour des gros moteurs, les résistances sont à l'extérieur et reliées au rotor par des bagues tournantes et des balais (moteurs à bagues).
- Limiter le courant d'alimentation par une électronique de commande qui accroît progressivement la tension avec l'augmentation de vitesse. Ces appareils permettent de programmer l'accélération et la durée du démarrage.

En considérant la formule (20.17), il existe deux moyens de régler la vitesse d'un moteur asynchrone :

- Arranger le bobinage de manière à ce qu'on puisse commuter le nombre de pôles magnétiques par des branchements appropriés. La figure 20.13 montre les caractéristiques d'un moteur à 2 et 4 paires de pôles. Le changement de vitesse se fait naturellement par bond, cette méthode est souvent utilisée avec des pompes et des ventilateurs. La puissance nominale à chaque vitesse est donnée dans les catalogues.
- Alimenter le moteur à fréquence variable et adapter en même temps la tension d'alimentation afin de maintenir le courant à sa valeur nominale. Cette méthode de réglage s'applique dans toute la gamme de puissance. Elle permet de remplacer les moteurs à courant continu, relativement délicats à cause de leur collecteur, par des moteurs triphasés beaucoup plus robustes.

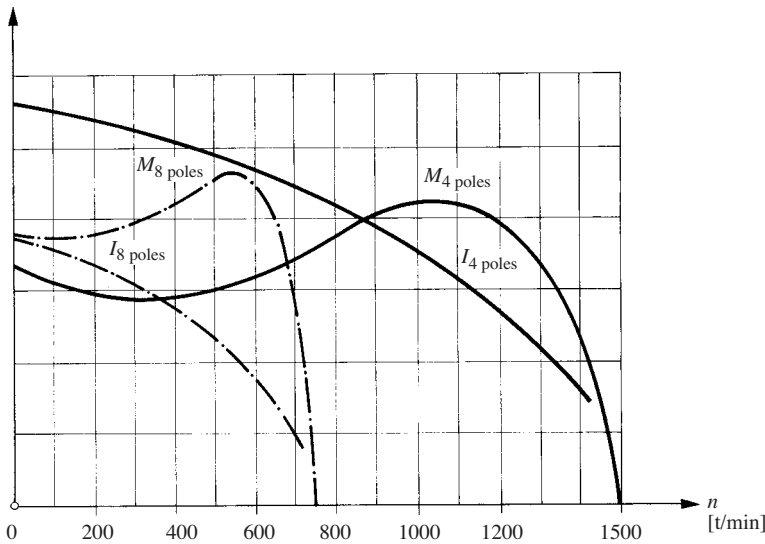


Fig. 20.13 Caractéristiques de couple et de courant d'un moteur à commutation de pôles.

Tout comme le moteur synchrone, le moteur asynchrone renvoie de l'énergie au réseau si la machine exerce un couple moteur sur son bout-d'arbre et l'entraîne plus vite que la vitesse de marche à vide (fig. 20.14). Le couple nominal de freinage est égal au couple nominal en régime moteur.

Débranché du réseau et entraîné par son arbre, un moteur asynchrone tourne librement. Il se transforme en frein en injectant entre deux phases un courant continu imposé par un redresseur commandé. La figure 20.15 montre la caractéristique motrice (1) et la caractéristique du couple de freinage (2). L'énergie de freinage est dissipée dans le bobinage du moteur. Tout comme pour le démarrage, la durée et la fréquence des freinages sont limités par des considérations thermiques.

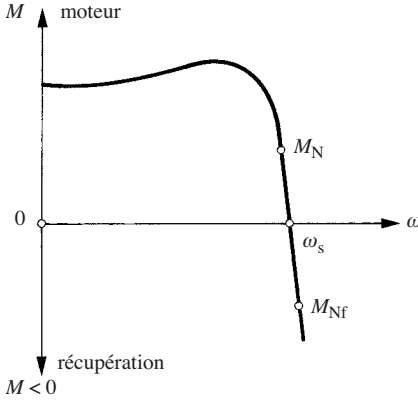


Fig. 20.14 Freinage par récupération.

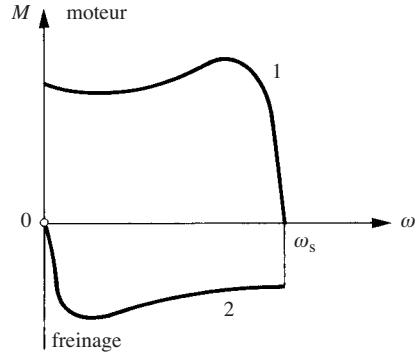


Fig. 20.15 Caractéristiques motrices et de freinage d'un moteur asynchrone.

### 20.3.4 Dynamique du couple moteur

#### Equation différentielle

Un moteur fonctionne en régime permanent au point de fonctionnement  $N_0$  sur la caractéristique couple-vitesse (fig. 20.16). Le couple moteur y est en équilibre avec le couple d'entraînement,  $M_{m0} = M_{e0} = M_0$ . Supposons maintenant que le couple d'entraînement nécessaire passe à une valeur  $M_{e1}$ . Le couple moteur ne va s'adapter à la nouvelle charge que dans la mesure où le point de fonctionnement vient en  $N_1$ ; mais il faut pour cela que le groupe ralentisse et passe de sa vitesse initiale  $\omega_0$  à la nouvelle vitesse de régime permanent  $\omega_1$ . Le ralentissement n'est pas instantané, la vitesse obéit à la dynamique mécanique du groupe décrite par l'équation différentielle

$$(J_m + J_e)\dot{\omega} = M_m - M_e \quad (14.75)$$

où  $J_m + J_e$  est le moment d'inertie de tout le groupe réduit à l'arbre du moteur. Cette équation différentielle est valable seulement lorsque l'inertie du groupe et l'énergie potentielle du mécanisme sont constantes. Linéarisons la caractéristique du moteur et exprimons le couple moteur par

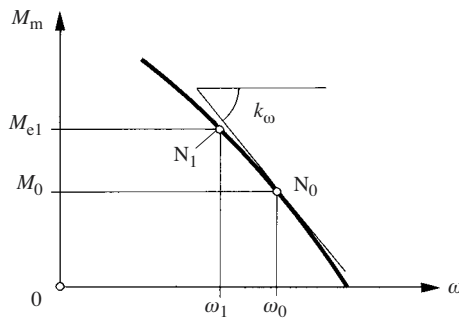


Fig. 20.16 Glissement du point de fonctionnement.

$$M_m = M_0 + k_\omega (\omega - \omega_0)$$

avec la *rigidité de la caractéristique du moteur*

$$k_\omega = \frac{dM_m}{d\omega} \quad (20.18)$$

qui est une grandeur négative. Introduisons  $M_m$  dans l'équation de la dynamique; on obtient l'équation différentielle suivante:

$$\tau_M \dot{\omega} + \omega = \omega_0 + \frac{M_e - M_0}{k_\omega} \quad (20.19)$$

avec la *constante de temps électromécanique* du groupe

$$\tau_M = - \frac{J_m + J_e}{k_\omega} \quad (20.20)$$

Introduisons  $\omega$  tiré de l'expression du couple moteur dans l'équation de la dynamique pour obtenir l'équation différentielle du couple moteur:

$$\tau_M \dot{M}_m + M_m = M_e \quad (20.21)$$

### Saut indiciel du couple

Le couple d'entraînement passe brusquement de la valeur  $M_0$  à la valeur  $M_e$ . La figure 20.17 montre les réponses de vitesse et de couple:

$$\omega = \omega_0 - (\omega_0 - \omega_1) \left(1 - e^{-t/\tau_M}\right) \quad (20.22)$$

$$M_m = M_0 + (M_e - M_0) \left(1 - e^{-t/\tau_M}\right) \quad (20.23)$$

Le nouvel état d'équilibre est pratiquement atteint après trois constantes de temps.

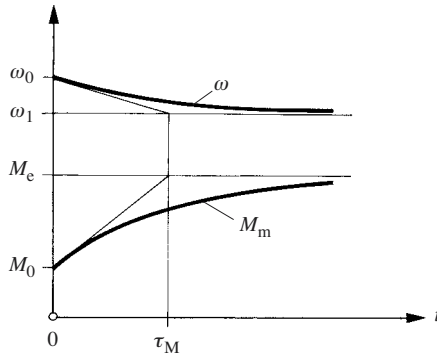


Fig. 20.17 Réponses à un saut de couple.

### Réponse harmonique

Le couple d'entraînement subit une perturbation harmonique

$$M_p = \hat{M}_p \cos \Omega t \quad (20.24)$$

La théorie de la réponse harmonique d'un système du premier ordre donne l'amplitude de la variation du couple moteur :

$$\hat{M}_m = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau_M^2}} \hat{M}_p \quad (20.25)$$

Avec des moteurs triphasés industriels et des machines courantes, la constante de temps électromécanique est de l'ordre de 0,006 à 0,03 seconde. Par exemple, avec une perturbation à 100 Hz, on a

$$\hat{M}_m = (0,053 \dots 0,26) \hat{M}_p$$

### Conclusions

Cette évaluation permet de tirer les conclusions suivantes :

- les perturbations vibratoires affectent assez peu le couple fourni par le moteur, on peut les négliger pour calculer son échauffement et sa vitesse ;
- le diagramme de charge d'un moteur se détermine uniquement sur la base du couple cinétostatique calculé avec un modèle indéformable du groupe.

Les moteurs synchrones constituent une exception, car leur rigidité de couple est infinie, par conséquent leur constante de temps électromécanique est nulle. Ne variant pas de vitesse, leur couple moteur est toujours égal au couple d'entraînement.

### 20.3.5 Régimes variables des moteurs électriques

La charge varie souvent constamment au cours du temps avec une évolution correspondante de la température du moteur. Sous réserve de ne pas dépasser le courant maximal autorisé, le fonctionnement est limité seulement par l'échauffement et non par la puissance délivrée. Par exemple, la figure 20.18 montre le *diagramme de charge* d'un moteur dont les puissances  $P_1$  et  $P_4$  sont certes supérieures à la puissance nominale, mais pendant des temps assez courts pour que la température du bobinage ne dépasse pas la température admissible. En respectant certaines conditions, un moteur électrique peut fonctionner en surcharge sans dommage pour lui.

La température en régime variable évolue selon une suite d'exponentielles (§ 19.4.1). Il faut prendre garde au fait que la constante de temps au refroidissement des moteurs autoventilés est plus grande à l'arrêt qu'en marche. Ces constantes de temps sont égales en cas de ventilation auxiliaire permanente.

Considérons un moteur fournissant une puissance mécanique  $P$  supérieure à sa puissance nominale  $P_N$ . On définit le *facteur de surcharge mécanique* du moteur :

$$p_M = \frac{P}{P_N} \quad (20.26)$$

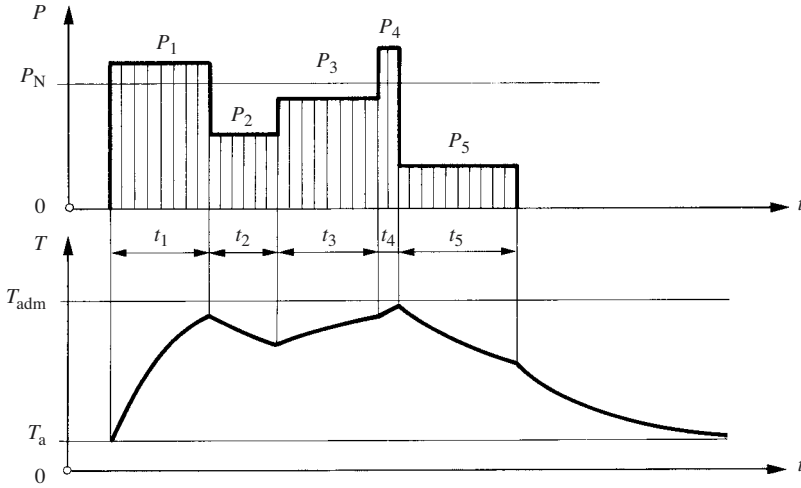


Fig. 20.18 Evolution de la puissance et de la température d'un moteur en régime quelconque.

Les normes prévoient huit types de régimes de charge désignés par S1 à S8. Les catalogues indiquent la puissance que donnent les moteurs dans les divers régimes de fonctionnement normalisés. Examinons le cas de quelques régimes fréquents.

### Service continu (S1)

En régime continu, d'une durée supérieure à cinq constantes de temps thermique, les bobinages d'un moteur électrique atteignent leur température admissible (fig. 20.3). Dans les conditions ambiantes définies par les normes (§ 20.3.2), le moteur peut délivrer indéfiniment sa puissance nominale. Le facteur de surcharge mécanique vaut constamment  $p_M = 1$ .

### Service intermittent régulier (S3)

Supposons qu'un moteur fonctionne cycliquement durant  $t_1$  et soit déclenché pendant  $t_2$  (fig. 20.19). On appelle *taux d'utilisation* ou *facteur de charge* le rapport de la période de marche à la durée totale du cycle :

$$ED = \frac{t_1}{t_1 + t_2} \quad (20.27)$$

Le symbole *ED* vient de l'allemand Einschaltdauer. On admet normalement dans les catalogues que la durée d'un cycle est 5 ou 10 minutes.

Les pertes d'un moteur électrique sont essentiellement constituées par l'effet Joule dans les bobinages. Soit, pour un courant  $I$  traversant une résistance  $R$  :

$$P_p = RI^2$$

En admettant que le courant soit proportionnel au couple, on peut écrire :

$$P_p = a M^2$$

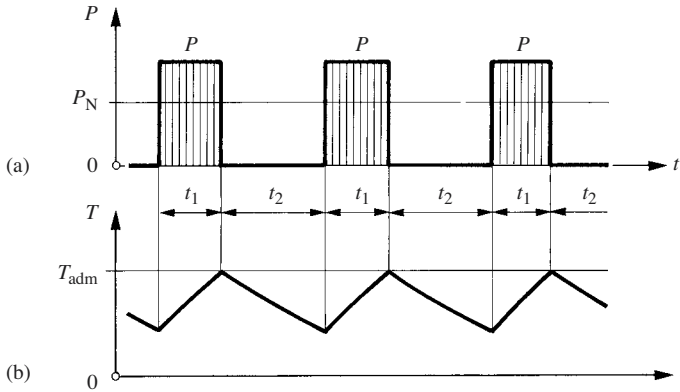
où  $a$  est une constante du moteur. La quantité de chaleur dégagée durant la période de marche  $t_1$  vaut

$$Q_p = a M^2 t_1$$

Ce calcul suppose un démarrage assez bref pour qu'on puisse négliger l'effet de la surintensité de courant au démarrage.

Si le moteur fonctionnait durant  $t_1 + t_2$  à sa puissance nominale, sa perte serait

$$Q_{pN} = a M_N^2 (t_1 + t_2)$$



**Fig. 20.19** Régime intermittent régulier (S3): (a) puissance; (b) température.

En supposant encore que la durée du cycle soit courte par rapport à la constante de temps thermique du moteur, on peut admettre que l'échauffement est le même dans les deux cas de charge si les quantités de chaleur dégagées sont égales. Il en résulte le rapport des couples à échauffement égal:

$$\frac{M}{M_N} = \sqrt{\frac{t_1 + t_2}{t_1}} = \frac{1}{\sqrt{ED}} \quad (20.28)$$

et le facteur de surcharge mécanique:

$$p_M = \frac{P}{P_N} = \frac{M}{M_N} \frac{\omega}{\omega_N} = \frac{1}{\sqrt{ED}} \frac{\omega}{\omega_N} \quad (20.29)$$

Les catalogues indiquent la puissance des moteurs électriques en fonction de leur taux d'utilisation.



### Service intermittent quelconque

Lorsque la puissance d'un moteur varie fortement, comme par exemple à la figure 20.18, on définit un *couple équivalent*  $M_{eq}$  qui provoquerait les mêmes pertes en régime continu que les couples réels variables. Soit

$$M_{eq} = \sqrt{\frac{M_1^2 t_1 + M_2^2 t_2 + \dots + M_n^2 t_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n + t_r}} \quad (20.30)$$

où  $t_r$  est la durée totale du repos dans le cycle considéré. On a le taux de service correspondant

$$ED = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n + t_r} \quad (20.31)$$

Le moyen le plus précis pour déterminer la puissance maximale que peut fournir le moteur dans ces conditions de service consiste à chercher la puissance  $P_x$  du moteur pour la valeur  $ED_x$  du catalogue la plus proche du taux d'utilisation  $ED$  donné. Sur la base de (20.29), en supposant que la vitesse varie peu, on a

$$P_{ED} = P_x \sqrt{\frac{ED_x}{ED}} \quad (20.32)$$

et le facteur de surcharge vaut alors

$$p_M = \frac{P_{ED}}{P_N} = \frac{P_x}{P_N} \sqrt{\frac{ED_x}{ED}} \quad (20.33)$$

Le couple d'entraînement et par conséquent aussi la puissance d'entraînement instantanée subissent souvent de fortes variations qui se succèdent rapidement. Mais elles ne jouent aucun rôle si le moteur n'a pas le temps de modifier sa vitesse. On ne prendra en compte que la puissance moyenne d'entraînement calculée dans un intervalle de temps de l'ordre du dixième de la constante de temps thermique du moteur.

### Exemple numérique

Un catalogue indique pour un certain moteur asynchrone à bagues: 60 kW pour  $ED = 25\%$ , 50 kW pour  $ED = 40\%$  et 42 kW pour  $ED$  compris entre 60% et le régime permanent, la durée d'un cycle étant de 10 minutes. En supposant que la vitesse reste à peu près constante, on vérifie que ces valeurs satisfont approximativement la relation (20.29).

Supposons que le taux d'utilisation effectif soit 32%. Le taux d'utilisation le plus proche du catalogue est  $ED_x = 25\%$ . La formule (20.32) donne la puissance admissible au taux d'utilisation prévu

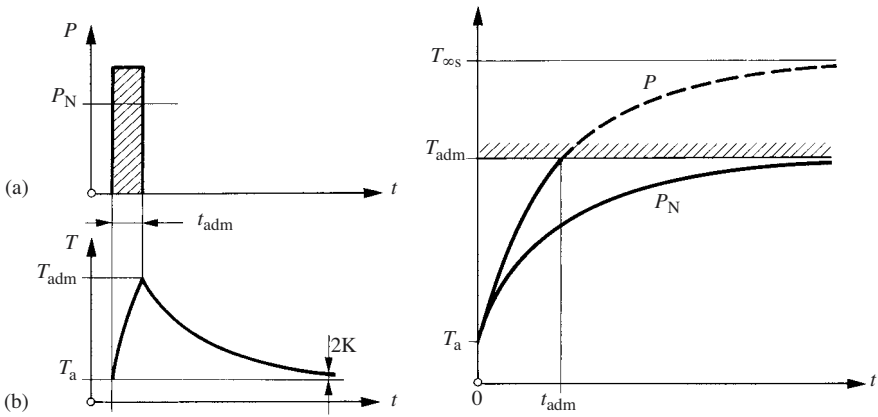
$$P_{32} = P_{25} \sqrt{\frac{0,25}{0,32}} = 53 \text{ kW}$$

Le facteur de surcharge mécanique vaut finalement

$$p_M = \frac{53}{42} = 1,26$$

### Régime temporaire (S2)

Le régime temporaire est caractérisé par une marche à une puissance supérieure à la puissance nominale, d'une durée telle que la température admissible n'est pas dépassée, puis suivie d'une période de repos assez longue pour que le moteur se refroidisse au moins jusqu'à 2 K au-dessus de la température ambiante (fig. 20.20). Le régime temporaire se rencontre dans le cas d'un moteur qui commande la porte d'un garage, une vanne télécommandée ou toute autre manœuvre occasionnelle brève. Cherchons la relation entre la puissance fournie par un moteur et sa durée de marche admissible.



**Fig. 20.20** Régime temporaire (S2): (a) puissance; **Fig. 20.21** Echauffement nominal et en surcharge. (b) température.

L'échauffement permanent en surcharge est plus élevé qu'au régime nominal (fig. 20.21). Puisque la puissance dissipée en chaleur est proportionnelle au carré du couple, le facteur de surcharge thermique défini par la formule (19.77) vaut

$$p_Q = \frac{P_p}{P_{pN}} = \frac{M^2}{M_N^2}$$

Exprimons le facteur de surcharge mécanique puis introduisons le rapport des couples tiré de l'équation ci-dessus:

$$p_M = \frac{P}{P_N} = \frac{\omega}{\omega_N} \frac{M}{M_N} = \frac{\omega}{\omega_N} \sqrt{p_Q}$$

On obtient la relation entre le facteur de surcharge mécanique et la durée de marche admissible en introduisant l'expression (19.78) du facteur de surcharge thermique en régime temporaire dans l'expression précédente. Il vient

$$p_M = \frac{\omega}{\omega_N} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-t_{adm}/\tau}}} \quad (20.34)$$

Cette équation permet de calculer le temps de marche autorisé pour une surcharge donnée.

### Moteurs sous-alimentés

La vitesse des moteurs synchrones et asynchrones est dictée par la fréquence du réseau. En diminuant la tension d'alimentation, la vitesse reste inchangée ainsi que la puissance mécanique fournie; en revanche, le courant augmente pour maintenir la puissance. Par conséquent, les pertes Joule croissent et le moteur chauffe. Ces types de moteur peuvent, apparemment paradoxalement, brûler si leur tension d'alimentation est insuffisante.

## 20.4 DIMENSIONNEMENT DES MOTEURS

### 20.4.1 Puissance nominale

#### Démarche

Selon les cas, un moteur doit être en mesure :

- de fournir la puissance d'entraînement pendant un temps déterminé;
- d'effectuer un mouvement durant un temps donné;
- de démarrer la machine dans un délai convenable;
- d'effectuer plusieurs démarrages successifs avec des intervalles de temps donnés.

Choisir un moteur est un travail itératif qui se fait à l'aide des catalogues selon la démarche suivante :

- choisir un moteur dont la puissance nominale est telle qu'il puisse toujours fournir la puissance d'entraînement requise sans échauffement anormal;
- vérifier que le moteur satisfait les conditions de démarrage; si tel n'est pas le cas, choisir un moteur donnant un couple suffisant pour démarrer la machine dans le temps prescrit;
- vérifier que le moteur peut démarrer avec la fréquence requise sans chauffer anormalement.

#### Critère de la puissance d'entraînement

La machine exige la puissance d'entraînement nominale  $P_{eN}$ . L'analyse de son travail au cours du temps permet de déterminer le facteur de surcharge mécanique  $p_M$  acceptable du moteur (§ 20.3.5). Il est souvent connu empiriquement, comme dans les engins de levage par exemple. En tenant compte des facteurs de correction de température  $k_T$  et d'altitude  $k_h$  (§ 20.3.2), un moteur peut fournir la puissance d'entraînement dans les conditions de service requises lorsque

$$p_M k_T k_h P_{Ne} \geq P_{eN}$$

d'où la puissance nominale du moteur nécessaire pour entraîner la machine :

$$P_{Ne} \geq \frac{P_{eN}}{p_M k_T k_h} \quad (20.35)$$

avec :

- $P_{eN}$  puissance d'entraînement nominale de la machine
- $p_M$  facteur de surcharge mécanique
- $k_T$  facteur de correction de température ambiante (fig. 20.4)
- $k_h$  facteur de correction d'altitude (fig. 20.5)

### Critère de la durée du mouvement

Dans certains cas, l'organe récepteur doit effectuer un déplacement  $q$  dans un intervalle de temps  $T$  prescrit. Le mouvement exige un effort d'entraînement  $Q$  qu'on suppose constant pendant le démarrage et le ralentissement.

La figure 20.22 représente le déplacement en fonction du temps. Avec des accélérations uniformes, on a

$$\frac{1}{2} \dot{q}_0 t_d + \dot{q}_0 (T - t_d - t_a) + \frac{1}{2} \dot{q}_0 t_a = q$$

Cette équation fournit la vitesse de régime permanent nécessaire :

$$\dot{q}_0 = \frac{q}{T - \frac{1}{2}(t_d + t_a)} \quad (20.36)$$

Si  $t_a = t_d$ , on a

$$\dot{q}_0 = \frac{q}{T - t_d} \quad (20.37)$$

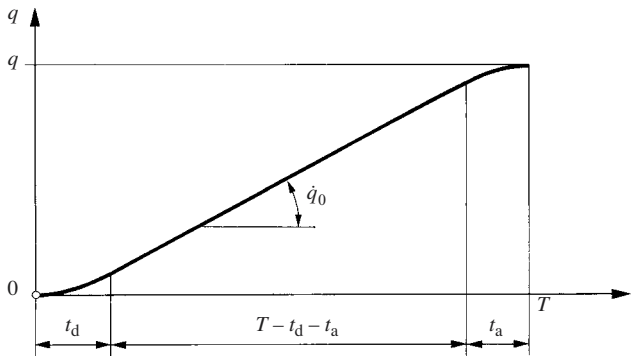


Fig. 20.22 Espace parcouru.

L'effort exercé peut varier au cours du déplacement, mais cela a peu d'incidence sur la vitesse de moteurs asynchrones et même aucune avec des moteurs

synchrones ou avec des actionneurs à vitesse constante. La puissance maximale au récepteur vaut

$$P_{\max} = Q_{\max} \dot{q}_0 \quad (20.38)$$

Compte tenu du rendement  $\eta$  de la transmission, la puissance nominale d'entraînement nécessaire est

$$P_{eN} = \frac{1}{\eta} Q_{\max} \dot{q}_0 = \frac{Q_{\max}}{\eta} \frac{q}{T - t_d} \quad (20.39)$$

La durée du démarrage et du freinage est souvent négligeable par rapport à la durée totale du mouvement, alors

$$P_{eN} \approx \frac{Q_{\max} q}{\eta T} \quad (20.40)$$

Cette puissance s'introduit dans (20.35) pour trouver la puissance nominale du moteur.

On verra plus loin le cas des actionneurs de positionnement (§ 20.6.4).

### Critère de la durée du démarrage

On exige souvent que la durée du démarrage n'excède pas une durée maximale  $t_{d \max}$  résultant de considérations pratiques. Par exemple :

- un mouvement doit s'effectuer dans un temps donné;
- un ascenseur doit atteindre sa vitesse de régime permanent sur une distance n'excédant pas une demi-hauteur d'étage;
- une rame de métro doit atteindre sa vitesse de circulation sur une distance limitée;
- une voiture doit passer de 0 à 100 km/h en moins de  $t$  secondes.

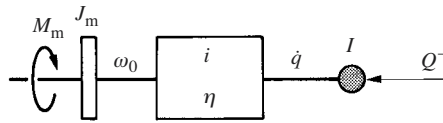


Fig. 20.23 Schéma d'un entraînement.

En reprenant l'expression (14.87) du temps de démarrage où on introduit encore (14.85), après amplification par  $\omega_N$  on a

$$t_d = (J_m + J_e) \frac{\omega_N^2}{P_N} \psi_d \leq t_{d \max} \quad (20.41)$$

L'inéquation fournit la puissance nominale du moteur nécessaire pour satisfaire les conditions de démarrage :

$$P_{Nd} \geq (J_m + J_e) \frac{\omega_N^2}{t_{d \max}} \psi_d \quad (20.42)$$

avec :

$J_m$	moment d'inertie du moteur
$J_e$	moment d'inertie de la machine réduit à l'arbre du moteur
$t_{d \max}$	durée maximale admissible du démarrage
$\omega_N$	vitesse nominale du moteur
$\psi_d$	facteur de démarrage

On a présenté le facteur de démarrage au paragraphe 14.5.1. Rappelons seulement que sa valeur dépend de l'allure des caractéristiques de couple du moteur et de la machine. La puissance nominale de démarrage contient donc implicitement la puissance d'entraînement de la machine. On ne sait, à ce stade du travail, naturellement pas quelle valeur de  $\psi_d$  introduire dans les calculs, car on ignore encore quelle sera la valeur effective du rapport

$$\beta = \frac{M_0}{M_N}$$

qui intervient dans le calcul du facteur de démarrage (14.86), où  $M_0$  est le couple d'entraînement en régime permanent et  $M_N$  est le couple nominal du moteur qu'il s'agit de choisir. La formule (20.42) suppose aussi que le moment d'inertie du moteur et sa vitesse nominale sont déjà connus. On sort de ce cercle vicieux comme suit :

- Admettre tout d'abord que le moteur soit celui dont la puissance nominale d'entraînement  $P_{Ne}$  a été déterminée plus haut; alors  $\beta = 1$ . Puis calculer  $\psi_d$  pour le type de moteur considéré par la formule (14.86) ou selon le tableau 14.23. Vérifier ensuite si la relation (20.41) est satisfaite.
- Si ce n'est pas le cas, choisir un moteur de taille supérieure. Calculer les nouvelles valeurs de  $\beta$ ,  $\psi_d$  et, avec  $J_m$  du moteur considéré, vérifier la relation (20.42). L'itération converge vite.

Il est inutile de corriger la puissance nominale calculée pour le démarrage par les facteurs de température et d'altitude parce que la chaleur supplémentaire dégagée pendant l'accélération du groupe est d'abord stockée dans le bobinage avant de passer à l'ambiance à travers les surfaces de refroidissement.

### Puissance nominale

La puissance nominale effective du moteur doit finalement être égale ou supérieure à la plus grande des deux valeurs  $P_{Ne}$  et  $P_{Nd}$ . Calculons le rapport de ces puissances théoriques avec (20.35) et (20.42) :

$$\frac{P_{Nd}}{P_{Ne}} = (J_m + J_e) \frac{\omega_N^2}{t_{d \max}} \psi_d \frac{P_M k_T k_h}{P_{eN}}$$

Après amplification par  $\omega_0^2$  et en se référant à la figure 20.23, faisons les substitutions suivantes :

$$J_e = \frac{I}{\eta i^2} \quad \omega_0 = i \dot{q} \quad P_{eN} = \frac{1}{\eta} \dot{q} Q$$

Il vient

$$\frac{P_{Nd}}{P_{Ne}} = \left( \eta i^2 J_m + I \right) \left( \frac{\omega_N}{\omega_0} \right)^2 \frac{\dot{q}}{t_{d \max}} \frac{\psi_d}{Q} p_M k_T k_h \quad (20.43)$$

Le critère de démarrage, donc  $P_{Nd} > P_{Ne}$ , est déterminant pour le choix de la puissance nominale du moteur:

- lorsque l'inertie est grande;
- lorsque l'effort statique d'entraînement est petit;
- lorsque l'accélération moyenne  $\dot{q}/t_{d \max}$  est forte.

Ce cas se présente, par exemple, dans les ascenseurs rapides, les centrifugeuses et dans les chariots de pont roulant où la résistance à l'avancement est relativement faible.

On ne peut pas dire a priori quelle est l'influence du rapport de vitesses, car ce rapport intervient dans la valeur de l'inertie réduite et dans le facteur de démarrage.

### Exemple numérique

Le chariot d'un pont roulant, avec sa charge, a une masse de 11'000 kg. Ses roues sont montées avec des roulements, la force motrice vaut 2000 N. Le rendement de transmission est de l'ordre de 85% et, compte tenu du service, le facteur de surcharge mécanique vaut 1,25.

La vitesse du chariot est 0,9 m/s, la distance de démarrage souhaitée est de l'ordre de 0,75 m.

#### Puissance d'entraînement

On a la puissance d'entraînement nécessaire:

$$P_{eN} = \frac{Fv}{\eta} = \frac{2000 \times 0,9}{0,85} = 2118 \text{ W}$$

Le moteur est installé à 1500 m d'altitude, selon la figure 20.5  $k_h = 0,97$ . La température ambiante n'excède pas  $40^\circ\text{C}$ , alors  $k_T = 1$ . La puissance nominale du moteur vaut, par (20.35),

$$P_N \geq \frac{P_{eN}}{p_M k_T k_h} = \frac{2118}{1,25 \times 1 \times 0,97} = 1747 \text{ W}$$

On choisit un moteur asynchrone à bagues, 1450 t/min ( $\omega_N = 151,8 \text{ s}^{-1}$ ) et  $P_N = 2,2 \text{ kW}$ .

#### Puissance de démarrage

En admettant un mouvement uniformément accéléré, la durée du démarrage ne doit pas excéder

$$t_{d \max} = \frac{2 \ell_d}{v} = \frac{2 \times 0,75}{0,9} = 1,667 \text{ s}$$

Rapport de vitesse:

$$i = \frac{\omega_N}{v} = \frac{151,8}{0,9} = 168,7 \text{ m}^{-1}$$

Inertie du chariot et de sa charge réduite à l'arbre du moteur:

$$J_e = \frac{m}{\eta i^2} = \frac{11'000}{0,85 \times 168,7^2} = 0,4547 \text{ kg m}^2$$

Moment d'inertie-masse du moteur de 2,2 kW, selon catalogue,

$$J_m = 0,005 \text{ kg m}^2$$

Le facteur de démarrage se calcule selon le tableau 14.23, cas (4), avec  $\alpha = M_{md} / M_N = 2,1$  pour le moteur choisi. On a encore le facteur, par (14.91),

$$\beta = \frac{M_0}{M_N} \approx \frac{P_{eN}}{P_N} = \frac{2118}{2200} = 0,9627$$

Alors,

$$\psi_d = \frac{0,95}{\alpha - \beta} = \frac{0,95}{2,1 - 0,9627} = 0,8353$$

La puissance nominale nécessaire pour le démarrage vaut, avec (20.42),

$$P_{Nd} \geq (J_m + J_e) \frac{\omega_N^2}{t_{d \max}} \psi_d = (0,005 + 0,4547) \frac{151,8^2}{1,667} 0,8353 = 5308 \text{ W}$$

On voit que la puissance nécessaire pour assurer le démarrage dans le temps voulu est nettement plus forte que pour l'entraînement. Un moteur de 4 kW devrait suffire parce que le facteur de démarrage sera de toute manière plus favorable.

*Distance de démarrage*

Avec le moteur de 4 kW, on a

$$\beta = \frac{P_{eN}}{P_N} = \frac{2118}{4000} = 0,5295$$

et

$$\psi_d = \frac{0,95}{2,1 - 0,5295} = 0,6049$$



Calculons la durée effective du démarrage par (20.41),  $J_m = 0,0095 \text{ kg m}^2$ ,

$$t_d = (J_m + J_e) \frac{\omega_N^2}{P_N} \psi_d = (0,0095 + 0,4547) \frac{151,8^2}{4000} 0,6049 = 1,618 \text{ s}$$

La distance de démarrage est enfin

$$\ell_d = \frac{1}{2} v t_d = \frac{1}{2} 0,9 \times 1,618 = 0,728 \text{ m}$$

Le cahier des charges est satisfait.

Cet exemple montre bien l'importance des deux critères de dimensionnement. A l'époque où les paliers étaient lisses, la résistance à l'avancement était plus grande et c'est la puissance d'entraînement qui dimensionnait le moteur de translation des ponts roulants.

### 20.4.2 Démarrages répétés

On rencontre certaines applications où le moteur démarre et s'arrête très souvent, par exemple une photocopieuse ou un robot. A chaque démarrage, il doit apporter l'énergie cinétique nécessaire et finit par s'échauffer fortement même s'il est parfaitement dimensionné pour un démarrage unique et pour le service demandé. Les catalogues donnent le nombre de démarrages horaires que peuvent supporter les moteurs lorsqu'ils tournent à vide, sans dépasser la température admissible. Le nombre de démarrages horaires admissibles dans une application particulière peut s'estimer par la formule suivante:

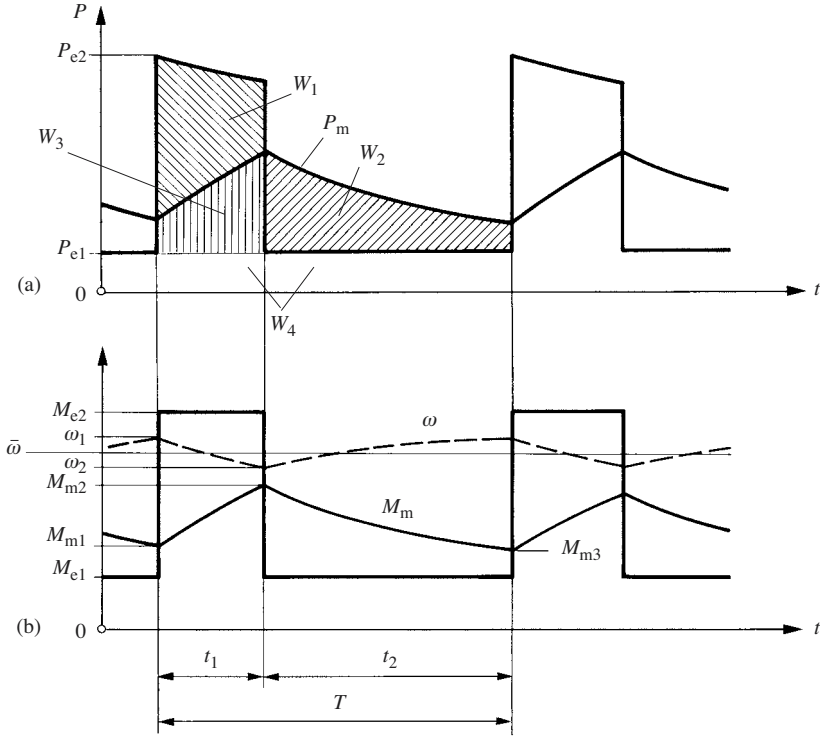
$$N_{\text{adm}} = \frac{1 - \frac{\bar{M}_e}{\bar{M}_d}}{1 + \frac{J_e}{J_m}} N_v \quad (20.44)$$

avec:

- $\bar{M}_e$  couple moyen d'entraînement pendant le démarrage
- $\bar{M}_d$  couple moyen de démarrage
- $J_e$  moment d'inertie réduit de la machine
- $J_m$  moment d'inertie du moteur
- $N_v$  nombre de démarrages horaires à vide

### 20.4.3 Machines avec volant de stockage d'énergie

De nombreuses machines fournissent un bref, mais violent, effort au cours de leur cycle de fonctionnement; c'est par exemple le cas des presses à forger ou à emboutir, des cisailles et des poinçonneuses. Leur moteur d'entraînement devrait être capable de fournir l'effort de pointe demandé, mais il serait inutilement gros pour toute la partie du cycle durant laquelle la machine fonctionne presque à vide. On diminue sa taille en prévoyant un volant de régulation d'énergie. Voyons comment le dimensionner.



**Fig. 20.24** Machine à travail séquentiel: (a) diagramme des puissances; (b) évolution des couples et de la vitesse.

Le couple d'entraînement d'une machine passe brusquement d'une valeur  $M_{e1}$  à une valeur  $M_{e2}$  pendant l'intervalle de temps  $t_1$  (fig. 20.24), puis reprend sa valeur initiale pendant  $t_2$ . Ces variations de charge se manifestent par une oscillation de la vitesse du groupe et des variations correspondantes du couple et de la puissance fournis par le moteur. Le volant fournit l'énergie  $W_1$  pendant la phase de travail, puis le moteur lui restitue l'énergie  $W_2$  pendant la phase suivante.

La puissance motrice est à chaque instant

$$P_m = \omega M_m$$

où la vitesse et le couple sont variables. Simplifions le calcul en remarquant que la vitesse varie relativement peu autour d'une valeur moyenne  $\bar{\omega}$ ; en revanche, le couple fourni par le moteur obéit à l'équation différentielle (20.21) et évolue beaucoup plus fortement. En faisant varier la charge entre  $M_{e1}$  et  $M_{e2}$ , cette équation donne le couple dans la phase de travail

$$M_m = M_{e2} - (M_{e2} - M_{m1})e^{-t/\tau_M} \quad (20.45)$$

et pendant la phase de repos

$$M_m = M_{e1} + (M_{m2} - M_{e1})e^{-t/\tau_M} \quad (20.46)$$

Le couple moteur vaut, à la fin de la séquence de travail,

$$M_{m2} = M_{e2} - (M_{e2} - M_{m1})e^{-t_1/\tau_M}$$

et à la fin de la période de repos,

$$M_{m3} = M_{e1} + (M_{m2} - M_{e1})e^{-t_2/\tau_M}$$

Admettons que les cycles de durée  $T$  se succèdent régulièrement. Le couple à la fin du cycle prend alors la même valeur que celle qu'il avait au début,  $M_{m3} = M_{m1}$ . Avec cette condition, le système formé par les deux équations ci-dessus permet de trouver les couples extrêmes

$$\begin{aligned} M_{m1} &= M_{e1} + (M_{e2} - M_{e1}) \frac{1 - e^{-t_1/\tau_M}}{1 - e^{-T/\tau_M}} e^{-t_2/\tau_M} \\ M_{m2} &= M_{e1} + (M_{e2} - M_{e1}) \frac{1 - e^{-t_1/\tau_M}}{1 - e^{-T/\tau_M}} \end{aligned} \quad (20.47)$$

Ce dernier est en fait le couple maximal que doit fournir le moteur. Vu sa marche irrégulière, le moteur peut fonctionner partiellement en surcharge, par conséquent

$$M_{m2} = p_M M_N$$

En égalant cette expression avec (20.47), on obtient une équation qui lie le couple nominal du moteur au moment d'inertie du groupe contenu dans la constante de temps électromécanique. Tirons  $\tau_M$  de cette équation; puis, avec (20.20) et  $k_\omega = -M_N/(\omega_v - \omega_N)$ , il vient

$$J = \frac{t_1}{\omega_v - \omega_N} \frac{M_N}{\ln \frac{M_{e2} - M_{e1}}{M_{e2} - p_M M_N + (p_M M_N - M_{e1})e^{-T/\tau_M}}} \quad (20.48)$$

Rappelons que  $\omega_v$  est la vitesse de marche à vide du moteur. On constate que le moment d'inertie nécessaire est d'autant plus petit que le couple nominal est plus grand. Il est avantageux de diminuer la taille du volant en choisissant un moteur dont la caractéristique est moins rigide, c'est-à-dire  $\omega_v - \omega_N$  assez grand. La vitesse varie alors assez pour que le volant puisse échanger une fraction importante de l'énergie cinétique qu'il contient. On construit pour ces machines des moteurs asynchrones dont le glissement nominal

$$g_N = \frac{\omega_v - \omega_N}{\omega_v}$$

atteint jusqu'à 12%.

Le couple d'entraînement minimal  $M_{e1}$  et le couple maximal  $M_{e2}$  sont généralement connus. Parfois on connaît le travail utile  $W_u$  et la durée de la séquence de travail  $t_1$ ; on peut alors écrire

$$M_{e2} = M_{e1} + \frac{W_u}{\omega t_1} \quad (20.49)$$

Pour le calcul pratique, on admet tout d'abord  $e^{-T/\tau_M} = 0,5$  et  $p_M = 1,1$ . L'expression (20.48) permet de calculer l'inertie nécessaire pour différentes tailles de moteurs. Le choix se fait ensuite sur la base de considérations économiques et constructives en n'oubliant pas qu'un gros volant situé du côté de l'organe de travail protège le moteur des fortes perturbations de l'effort. Il faut reprendre ensuite le calcul en introduisant la constante de temps provisoire dans la formule. L'itération converge vite. Le moment d'inertie du volant s'obtient finalement en retranchant encore le moment d'inertie du moteur et celui de la machine. Dans ce genre de machine, on démarre le volant à vide et on ne commence à travailler que lorsque la vitesse de régime est atteinte.

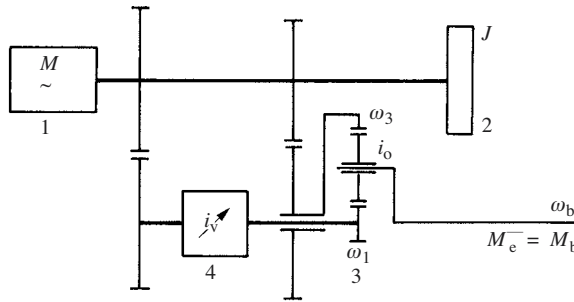


Fig. 20.25 Mécanisme pour gros efforts à petite vitesse.

On doit parfois exercer de très gros efforts à petite vitesse pour démarrer une machine ou pour le travail lent de certaines presses. Le mécanisme représenté à la figure 20.25 comporte un train épicycloïdal (3) dont la couronne est entraînée par l'arbre du moteur (1) tandis que le planétaire central est entraîné à vitesse variable par un variateur hydrostatique (4). Le graphe 12.57 montre que l'arbre du porte-satellites est arrêté lorsque  $\omega_1 = i_0 \omega_3$ . Remarquons que  $\omega_1$  tourne en sens inverse de  $\omega_3$  parce que la raison  $i_0$  du train épicycloïdal est négative. Pour sa part, le volant (2) tourne à la vitesse du moteur et contient beaucoup d'énergie cinétique. En jouant maintenant sur la vitesse  $\omega_1$  par le variateur, l'arbre de sortie démarre en douceur et le volant cède de l'énergie. On choisira, là aussi, un moteur à fort glissement.

#### 20.4.4 Entraînement par plusieurs moteurs

Il existe de nombreuses raisons pour installer plusieurs moteurs d'entraînement, notamment:

- on ne dispose d'aucun moteur assez puissant;
- on doit fractionner la puissance totale en plusieurs petits moteurs pour des raisons d'encombrement;

- on recherche une grande souplesse d'exploitation et un bon rendement lorsque la puissance d'entraînement requise varie dans de larges limites;
- on veut accroître la sécurité d'exploitation.

### Répartition de la charge

Deux moteurs sont accouplés au même arbre d'une machine (fig. 20.26). Leur point de fonctionnement se trouve sur leur caractéristique de couple pour la vitesse commune  $\omega_0$  (fig. 20.27), ils fournissent le couple total

$$M_0 = M_{01} + M_{02}$$

Les puissances motrices se répartissent dans le même rapport que les couples. Deux moteurs ne sont chargés en parts égales que dans la mesure où leurs caractéristiques couple-vitesse sont identiques. Ce point mérite attention et exige une grande précision de fabrication des moteurs.

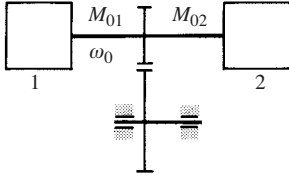


Fig. 20.26 Entraînement par deux moteurs en tandem.

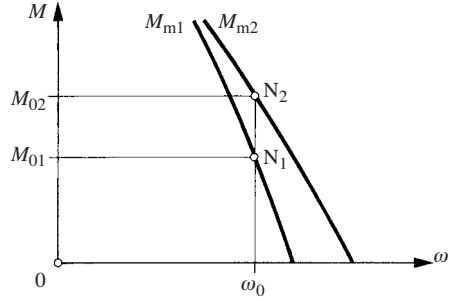


Fig. 20.27 Point de fonctionnement de deux moteurs en tandem.

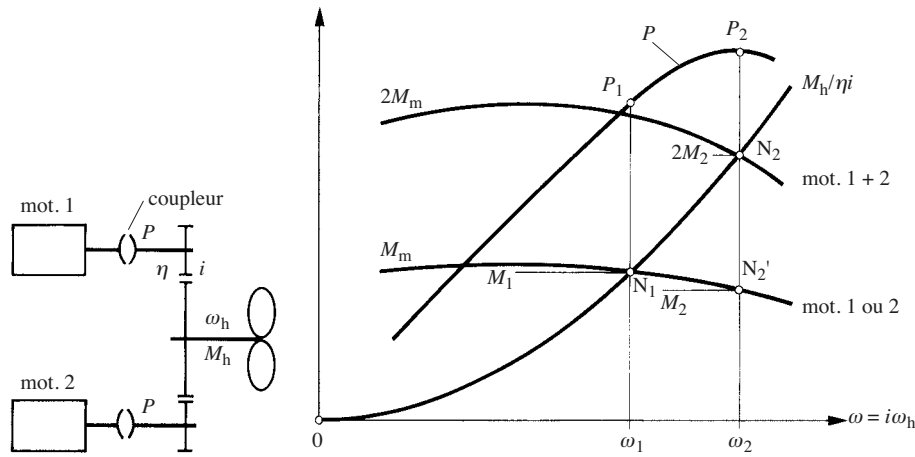
### Exemple

On entraîne souvent l'hélice d'un bateau par deux moteurs identiques (fig. 20.28) dans le but de marcher à vitesse réduite avec une seule machine. La caractéristique d'entraînement d'une hélice est une parabole (fig. 20.29). Le point de fonctionnement est  $N_1$  lorsqu'un seul moteur est en service,  $N_2$  lorsque les deux fonctionnent avec le point individuel  $N'_2$ . Si chaque moteur donne sa pleine puissance  $P_2$  lorsque les deux sont attelés, la puissance maximale  $P_1$  fournie par un moteur est nettement inférieure lorsqu'il est seul à entraîner l'hélice. Compte tenu de la parabole d'entraînement de l'hélice, on a la vitesse avec un seul moteur

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{M_1}{2 M_2}} \omega_2 \quad (20.50)$$

et la puissance du moteur

$$P_1 = \frac{M_1}{M_2} \frac{\omega_1}{\omega_2} P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{3/2} P_2 \quad (20.51)$$

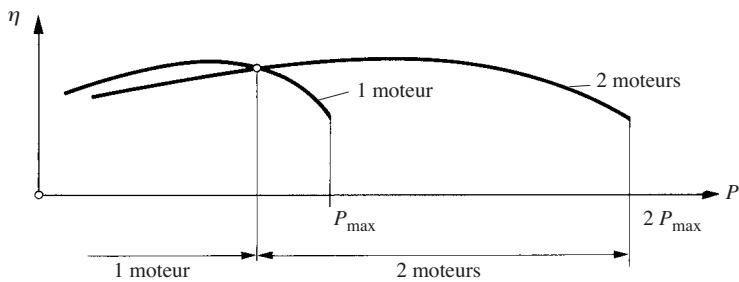


**Fig. 20.28** Entraînement d'une hélice de bateau par deux moteurs. **Fig. 20.29** Points de fonctionnement de l'installation de la figure 20.28.

La puissance fournie à l'hélice par les deux moteurs à plein régime vaut  $2 P_2$  tandis qu'avec un seul moteur, par exemple pour  $M_1 = 1,15 M_2$ , on dispose seulement de  $0,87 P_2$ .

**Amélioration du rendement**

Le partage de la puissance totale d'une installation en plusieurs unités permet d'améliorer le rendement global en charge fractionnaire. La figure 20.30 représente le rendement énergétique de deux moteurs identiques en fonction de la puissance totale demandée. L'intersection des deux courbes délimite les domaines où il est avantageux de fonctionner avec un ou deux moteurs. Le rendement le plus élevé d'un moteur diesel est généralement obtenu pour une puissance inférieure à sa puissance maximale, c'est pourquoi il est intéressant de fonctionner avec deux moteurs avant d'exploiter le premier jusqu'à sa puissance maximale possible.



**Fig. 20.30** Rendement d'une installation avec deux moteurs.

## 20.5 VITESSE DES MOTEURS ET TRANSMISSION

### 20.5.1 Transmission à rapport fixe

Une fois la puissance nominale du moteur déterminée (sect. 20.4), il faut encore choisir sa vitesse. Ce choix est étroitement lié à celui de la transmission. On ne discutera que le cas des transmissions mécaniques.

#### Choix de la vitesse et du moteur

On peut *a priori* choisir un moteur avec une vitesse nominale quelconque et adapter la transmission en conséquence. Mais le choix définitif s'opère en considérant simultanément le moteur et la transmission.

On vise généralement à choisir la solution la plus économique, c'est-à-dire celle pour laquelle le coût total du moteur et de la transmission est minimal. Les moteurs rapides sont en principe meilleur marché que les lents parce qu'ils sont plus petits. En revanche, ils exigent des transmissions à rapport plus élevé et plus compliquées s'il faut accroître le nombre d'étages. Il convient donc d'étudier soigneusement chaque cas à l'aide des catalogues et des tarifs.

Le choix est souvent aussi guidé par la recherche d'une masse ou d'un encombrement minimal.

On souhaite parfois d'emblée accoupler directement le moteur à la machine afin :

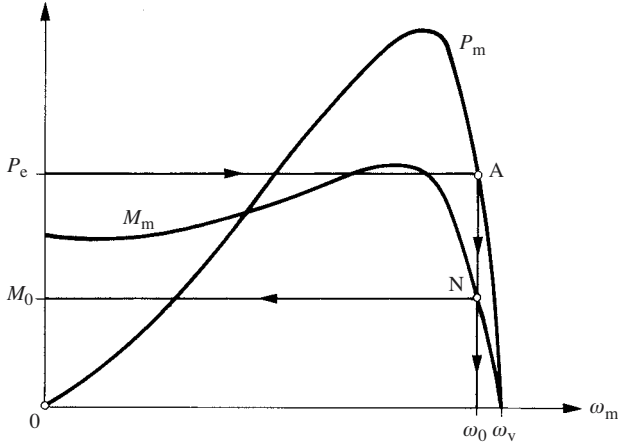
- de supprimer le bruit de la transmission;
- de supprimer les jeux;
- de simplifier l'installation.

L'accouplement direct est indiqué chaque fois que la vitesse de régime  $\omega_0$  du moteur est très proche de la vitesse d'entraînement voulue  $\omega_e$ . De nombreuses machines sont construites pour être accouplées directement à un moteur de série.

Il est rare qu'on ait besoin d'une vitesse d'entraînement rigoureusement précise; on peut au contraire habituellement admettre qu'elle se situe dans une certaine plage de tolérance autour de la vitesse nominale théorique. Il ne faut par ailleurs pas oublier qu'il est de toute manière difficile, dans les applications industrielles, de réaliser des transmissions dont le rapport de transmission serait *a priori* quelconque et précis. D'une part, le rapport de transmission des engrenages ne peut varier que d'une manière discrète du fait du nombre entier de dents; d'autre part, les transmissions non positives à courroie ou à friction voient leur rapport de transmission varier avec la charge, la température et l'usure. Une vitesse très précise ne peut en définitive s'obtenir que par un groupe d'entraînement réglé. Les constructeurs offrent des groupes motoréducteurs dans une très large gamme de puissances et de vitesses pour satisfaire les besoins les plus courants.

#### Rapport de vitesses

Supposons que le type et la puissance nominale du moteur soient choisis. Ce moteur fournit la puissance d'entraînement  $P_e$  (sect. 20.2) à son bout d'arbre à laquelle correspond le point A sur la caractéristique de puissance (fig. 20.31). Ce point détermine la vitesse de régime permanent  $\omega_0$ , le point de fonctionnement N sur la caractéristique de couple et le couple de régime permanent  $M_0$ . Notons que la puissance dépend du rendement de la transmission, et donc de sa construction.



**Fig. 20.31** Caractéristiques d'un moteur et vitesse de régime.

#### *Vitesse d'entraînement imposée*

Le récepteur doit se mouvoir avec la vitesse  $\dot{q}$ . Le rapport de vitesses requis vaut

$$i = \frac{\omega_0}{\dot{q}} \quad (20.52)$$

On dispose parfois d'une expression analytique de la caractéristique de couple du moteur permettant de calculer simplement le rapport de transmission cherché. Par exemple, dans le cas d'un moteur à caractéristique linéaire (fig. 20.9), exploité dans le domaine  $\omega > \omega_v/2$ , on obtient avec (20.13):

$$i = \frac{\omega_v}{2\dot{q}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{P_e}{P_{\max}}} \right) \quad (20.53)$$

Le cas des moteurs à puissance constante est particulier, car on peut en principe choisir librement la vitesse de service dans les limites de leurs conditions normales d'emploi (vitesse limite, courant d'alimentation, débit d'huile des moteurs hydrauliques).

#### *Effort d'entraînement imposé*

Le récepteur exige l'effort d'entraînement  $Q$ . Le rapport de vitesses nécessaire vaut

$$i = \frac{Q}{\eta M_0} \quad (20.54)$$

Vu l'incertitude sur le rendement, il est prudent de faire le calcul avec la valeur inférieure de la fourchette de rendement usuel. S'il est meilleur que prévu, le moteur sera simplement moins chargé et tournera un peu plus vite.



En égalant les rapports de vitesses (20.52) et (20.54), on retrouve le bilan de puissance de la transmission.

### 20.5.2 Variation de vitesse

De nombreuses applications exigent de pouvoir varier la vitesse de manière continue durant la marche entre une vitesse minimale  $\omega_{\min}$  et une vitesse maximale  $\omega_{\max}$ . L'entraînement doit satisfaire la *gamme de variation de vitesse*

$$R = \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} \quad (20.55)$$

Elle est infinie si le réglage se fait progressivement depuis l'arrêt.

La vitesse est commandée par un quelconque paramètre  $x$ , par exemple la position angulaire d'un volant de manœuvre. La relation  $\omega(x)$  dépend de la construction; mais pour des raisons évidentes de facilité de réglage, on vise à se rapprocher le plus possible d'une relation linéaire. La *sensibilité du réglage* est, par définition,

$$s = \frac{d\omega}{dx} \quad (20.56)$$

Une petite sensibilité favorise les réglages précis et stables. La régularité de la vitesse est souvent primordiale, il faut toujours veiller à ce que les fluctuations soient petites, on exige parfois une valeur du facteur d'irrégularité défini par (14.115) inférieure à 1%.

On rencontre principalement les problèmes de réglage de vitesse suivants:

- maintenir un rapport de vitesses constant entre deux groupes, par exemple pour synchroniser les mouvements ou les opérations de deux machines;
- varier une vitesse dans une gamme très étroite, par exemple pour régler l'étiage d'un fil dans une étireuse;
- varier la vitesse dans une gamme relativement large, mais avec une grande stabilité de vitesse, par exemple pour ajuster le débit d'une pompe doseuse;
- varier la vitesse à puissance constante comme dans les enrouleurs et les machines-outils.

On connaît quatre façons de varier la vitesse:

- moteurs à vitesse variable;
- variateurs de vitesse;
- coupleurs;
- moteurs à vitesse variable associés à un variateur ou à un coupleur.

Elles seront discutées dans les paragraphes suivants.

### 20.5.3 Moteurs à vitesse variable

On se limite à une description très générale des caractéristiques de la variation de vitesse des moteurs.

### Moteurs électriques

La variation de vitesse dépend du système de courant alimentant le moteur (alternatif, continu) et du genre de moteur. Le développement de l'électronique de puissance a révolutionné le réglage de vitesse des moteurs électriques.

Un actionneur doit appliquer un couple  $M$  à l'arbre d'entrée d'une machine, l'entraîner à la vitesse  $\omega$  et l'amener éventuellement dans une position angulaire  $\varphi$ . Sans entrer dans les détails, la figure 20.32 représente le schéma de principe d'un actionneur réglé.

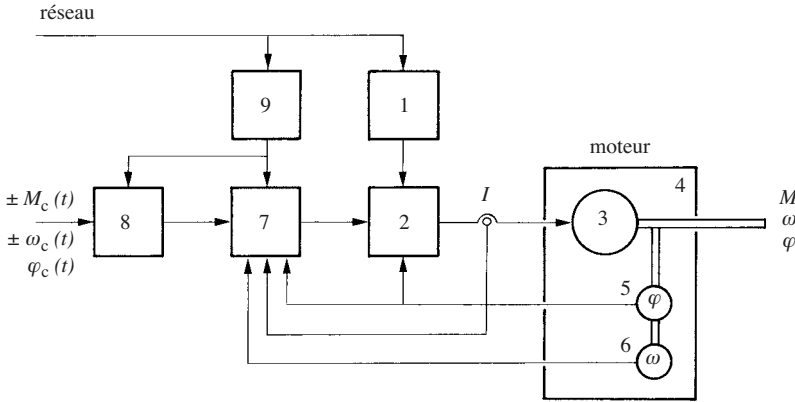


Fig. 20.32 Schéma de principe d'un actionneur.

Le courant du réseau est tout d'abord converti en courant continu par le redresseur (1). Puis il est converti, selon le moteur, en courant continu pulsé ou en courant alternatif triphasé par l'onduleur (2) qui alimente le bobinage (3) du moteur (4). La commutation s'effectue soit par un collecteur, soit statiquement par l'onduleur commandé par un résolveur (5) qui détecte la position angulaire de l'arbre par rapport aux pôles du moteur. L'onduleur est piloté par un régulateur (7) qui contrôle le couple par l'intermédiaire d'une mesure de courant; il règle la vitesse du moteur mesurée par un tachymètre (6) et éventuellement la position de l'arbre donnée par le capteur angulaire (5). On simplifie parfois en supprimant le tachymètre, la vitesse s'obtient alors par dérivation électronique du signal angulaire. Mieux encore, l'analyse de la tension et du courant du moteur permet d'en tirer directement la vitesse.

Un microprocesseur (8), ou système de contrôle de haut niveau, reçoit les ordres de consigne du système de commande de la machine: vitesse, sens de rotation, grandeur et sens du couple, accélération, position, séquence de travail. Il élabore le signal de commande du régulateur (7). Le microprocesseur est programmé en fonction de l'application, il peut tenir compte de logiques de protection et de coordination des mouvements. L'alimentation (9) fournit le courant à l'électronique.

L'énergie circule du réseau vers le moteur et la machine, mais certains montages lui permettent aussi de circuler en sens inverse et de renvoyer de l'énergie au réseau pour le freinage par récupération (marche dans plusieurs quadrants). Les actionneurs comprennent aussi des fonctions d'autoprotection et d'autodiagnostic. Ils permettent les régimes de fonctionnement suivants:

- quadrants de fonctionnement déterminé par le signe algébrique de la consigne du couple et de la vitesse (§ 12.2.3);
- réglage de la vitesse avec limitation du couple (fig. 20.33);
- réglage du couple avec limitation de la vitesse (fig. 20.34).

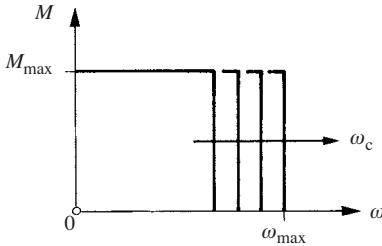


Fig. 20.33 Réglage de vitesse.

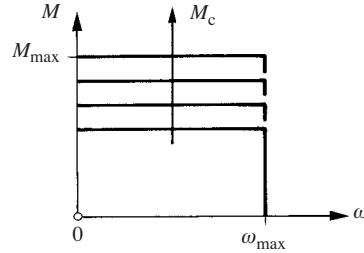


Fig. 20.34 Réglage du couple.

Le réglage simultané de la vitesse et du couple est contradictoire. On règle seulement l'un des paramètres, puis l'autre découle de la puissance exigée. On ne peut donc pas régler la puissance en soi d'un actionneur, car elle résulte directement de la coopération du moteur avec la machine.

Les caractéristiques de l'actionneur dépendent du genre de moteur employé. Celles obtenues avec un moteur à courant continu sont représentées à la figure 20.35. La caractéristique de couple (1) est bornée par le couple de rotation lente  $M_\ell$  et par la vitesse maximale à vide  $\omega_{\max}$ , elle passe par le point de fonctionnement nominal  $N_N$ . Selon les moteurs et leur refroidissement,  $M_\ell$  peut être inférieur à  $M_N$ . La courbe (2) délimite le domaine d'utilisation du moteur par ses limites de commutation. Le couple impulsif maximal  $M_i$  est limité par la démagnétisation des aimants permanents et par l'échauffement du bobinage. Le courant impulsif ne doit généralement pas durer plus de 50 ms, suivi d'un temps de repos minimum de 4,95 s entre deux impulsions consécutives (régime S3, 50 ms, 1%).

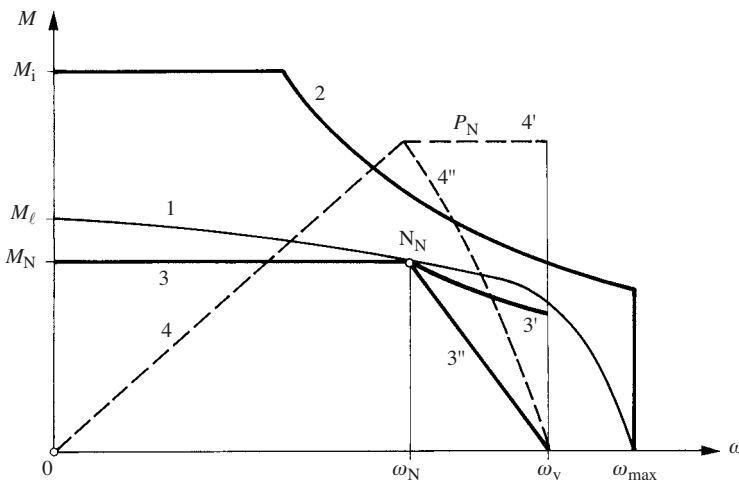


Fig. 20.35 Caractéristiques typiques de moteurs de commande.

Associés à leur électronique, les moteurs offrent la caractéristique de couple (3). Le couple est constant jusqu'à la vitesse nominale, mais peut le varier à volonté entre zéro et  $M_N$ . Dans ce domaine, la puissance croît proportionnellement à la vitesse (courbe 4), elle atteint la puissance nominale lorsque le couple et la vitesse ont leur valeur nominale. Au-delà, on travaille soit à puissance constante (4') et le couple diminue hyperboliquement (3'), soit avec un couple décroissant linéairement (3'') jusqu'à la vitesse de marche à vide  $\omega_v$  et une puissance décroissante (4'').

Le courant est constant dans le domaine (3), la vitesse augmente avec la tension. Au-delà de  $\omega_N$ , la tension reste constante mais il faut réduire le courant. Ces moteurs fonctionnent en principe à tout régime. Certains peuvent tourner extrêmement lentement, et même rester arrêtés, tout en exerçant le couple de marche lente voisin ou égal au couple nominal. Une plage de vitesse de 1 : 1000 est courante.

Les moteurs triphasés synchrones ou asynchrones alimentés par un variateur de fréquence offrent les plus fortes puissances avec le grand avantage de la suppression du collecteur délicat. Le couple est nul à fréquence nulle, mais les variateurs de fréquence avec contrôle vectoriel du flux permettent d'obtenir une caractéristique de couple analogue à celles de moteurs à courant continu (fig. 20.35).

### Moteurs hydrauliques

Ces moteurs fonctionnent à couple constant à bas régime et à puissance constante à grande vitesse (fig. 20.7b). On varie leur vitesse en jouant sur le débit d'huile et leur couple en réglant la différence de pression entre l'entrée et la sortie d'huile.

### Moteurs à combustion

Le dosage du combustible règle la puissance. La vitesse résulte de l'intersection de la caractéristique du couple moteur et de la caractéristique du couple d'entraînement exigé. On peut soit varier le couple et la puissance à régime constant, soit varier la vitesse avec une gamme de variation de l'ordre de 4.

## 20.5.4 Variateurs de vitesse

### Généralités

Les variateurs de vitesse sont des appareils destinés à varier progressivement le rapport de transmission entre les valeurs extrêmes  $i_{\min}$  et  $i_{\max}$ . La **gamme de réglage** d'un variateur est par définition :

$$R = \frac{i_{\max}}{i_{\min}} \quad (20.57)$$

La vitesse  $\omega_1$  de l'arbre d'entrée étant constante, la vitesse de sortie varie dans les limites  $\omega_{2 \min}$  et  $\omega_{2 \max}$  avec la gamme de variation de vitesse

$$\frac{\omega_{2 \max}}{\omega_{2 \min}} = \frac{\omega_1 / i_{\min}}{\omega_1 / i_{\max}} = R \quad (20.58)$$

La gamme de vitesse de l'arbre de sortie est égale à la gamme de réglage du variateur.

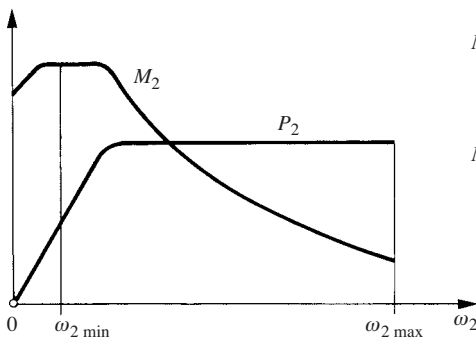
Les variateurs mécaniques se classent en quatre familles :

- les variateurs à chaînes et à courroies fonctionnant entre des poulies de diamètre variable;
- les variateurs à friction;
- les variateurs hydrostatiques;
- les variateurs hydrodynamiques à conversion de couple.

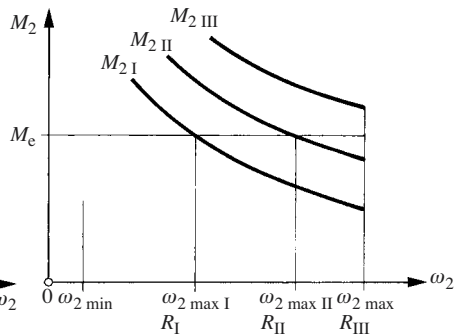
Les variateurs transmettent la puissance avec relativement peu de perte. Ils se comportent aussi comme des variateurs de couple. Supposons que le rendement soit  $\eta'$  pour  $i_{\min}$  et  $\eta''$  pour  $i_{\max}$ , calculons la *gamme de variation de couple*:

$$R_M = \frac{i_{Q \max}}{i_{Q \min}} = \frac{\eta' i_{\min}}{\eta'' i_{\max}} = \frac{\eta'}{\eta''} \frac{1}{R} \quad (20.59)$$

Sauf exception, les variateurs sont capables de transmettre une puissance constante dans toute la gamme de réglage, sauf à basse vitesse où les efforts sont limités par le glissement ou par la résistance des pièces. La vitesse maximale est limitée par des efforts d'inertie et par les paliers. Les caractéristiques à l'arbre de sortie présentent l'allure visible à la figure 20.36.



**Fig. 20.36** Caractéristiques de sortie de variateurs mécaniques.



**Fig. 20.37** Gamme de réglage et taille de variateurs.

Supposons qu'un variateur soit chargé par un couple d'entraînement constant (fig. 20.37). Une série de variateurs de taille croissante I, II, III permet d'obtenir une vitesse maximale de plus en plus élevée et une gamme de réglage d'autant plus grande que le variateur est plus gros. Il est évident qu'on a intérêt de ne jamais exiger une gamme de réglage plus étendue que ce qui est strictement nécessaire. La figure montre que le variateur III est surdimensionné.

### Variateur ou moteur à vitesse variable ?

Les variateurs de vitesse mécaniques sont en concurrence avec les dispositifs électriques de variation de vitesse des moteurs; ils ont perdu beaucoup d'importance, mais plutôt que de s'exclure, ces systèmes sont maintenant complémentaires. On peut formuler les comparaisons générales qui suivent:

- Les variateurs de vitesse s'associent généralement à des moteurs asynchrones simples, bon marché et dont la vitesse est constante. Le choix d'un moteur à commutation de pôles permet d'élargir la plage de vitesse.
- Les variateurs s'accommodent de conditions ambiantes sévères, ils ne craignent pas l'humidité, la poussière et la chaleur que supportent mal les dispositifs électroniques.
- Les variateurs mécaniques supportent sans dommage de brèves surcharges de couple, jusqu'à trois fois le couple nominal. En revanche, à cause de leur faible inertie thermique, les variateurs électroniques ne peuvent guère supporter une surcharge au-delà de 25% et doivent être protégés par des dispositifs limiteurs de courant.
- La comparaison, forcément un peu schématique, des caractéristiques des variateurs à friction et des moteurs à pilotage électronique (fig. 20.38) montre que les premiers conviennent particulièrement bien pour les entraînements exigeant une puissance constante, tandis que les seconds sont bien adaptés à des machines dont le couple d'entraînement est constant, c'est-à-dire dont la puissance est proportionnelle à la vitesse. En revanche, les variateurs hydrostatiques transmettent le couple maximal à toute vitesse.
- L'électronique permet de piloter les moteurs les plus puissants, plusieurs MW, tandis que la puissance des variateurs mécaniques n'excède guère 150 kW, un peu plus pour les appareils hydrostatiques. On a construit des convertisseurs de couple pour grandes puissances.
- Les moteurs ont toujours un caractère non positif. En revanche, les variateurs à chaîne et les appareils hydrostatiques sont positifs tandis que les variateurs à courroie, à friction ou hydrodynamiques ont un comportement non positif.

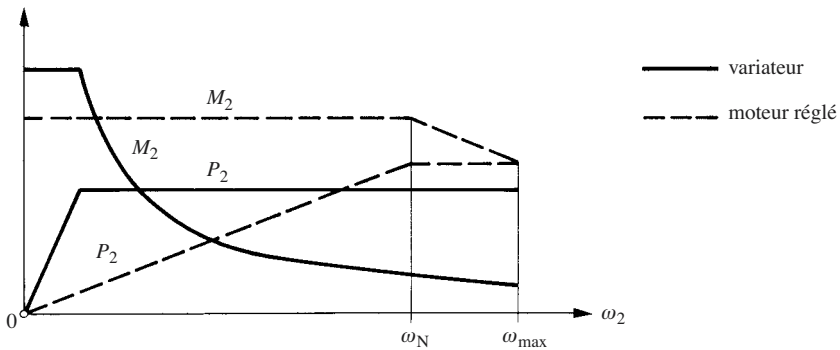


Fig. 20.38 Allure générale des caractéristiques de sortie de variateurs et de moteurs à vitesse variable.

Les variateurs mécaniques ou hydrostatiques vont probablement se substituer aux boîtes à vitesses des véhicules [20.1, 20.2, 20.3] afin de constamment adapter parfaitement le moteur aux conditions de marche.

Vu la désaffection des variateurs mécaniques, on renonce à leur description détaillée, par ailleurs bien connue.

### 20.5.5 Coupleurs

#### Généralités

A l'instar des embrayages et contrairement aux variateurs, les coupleurs sont dépourvus d'organe de réaction relié au bâti. Ils transmettent intégralement le couple

$$M_1 = M_2 = M_E \quad (20.60)$$

mais leur vitesse de sortie  $\omega_2$  est toujours inférieure ou égale à la vitesse d'entrée  $\omega_1$ ,

$$\omega_2 \leq \omega_1$$

Par conséquent,

$$P_2 \leq P_1$$

et la perte de puissance dissipée en chaleur vaut

$$P_p = M_E (\omega_1 - \omega_2) \quad (20.61)$$

Modifions l'écriture pour faire apparaître le *glissement* défini comme suit:

$$g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1} \quad (20.62)$$

On trouve

$$P_p = M_E \omega_1 g = g P_1 = \frac{g}{1 - g} P_2 \quad (20.63)$$

Le rendement du coupleur vaut

$$\eta = 1 - g \quad (20.64)$$

Le comportement des coupleurs est non positif. Leur glissement est généralement nul lorsque l'arbre de sortie tourne à vide. Il augmente avec la charge de l'arbre de sortie qui peut même s'arrêter complètement, c'est pourquoi les coupleurs font aussi office d'accouplement de sécurité. Mais la puissance dissipée est alors élevée et pose rapidement un problème d'échauffement. Décrivons les principaux types de coupleurs et leur caractéristique couple-vitesse.

#### Coupleurs magnétiques

Les coupleurs électromagnétiques (fig. 20.39) consistent principalement en un rotor menant (1) tournant autour d'un corps polaire magnétique (2) pourvu de pôles saillants. Une série de bobines (3) excitées par un courant continu amené par les bagues (4) crée un champ magnétique dans l'entrefer qui transmet le couple par les

lignes de force représentées en trait mixte, sans contact mécanique et sans usure. On peut varier le couple transmis en jouant sur le courant d'excitation et piloter ainsi de grandes puissances avec une faible puissance d'excitation. Le champ magnétique est obtenu parfois au moyen d'aimants permanents, spécialement pour transmettre le couple à travers des parois étanches (§ 22.4.7). Le comportement des coupleurs dépend de la disposition des pôles dans l'entrefer.

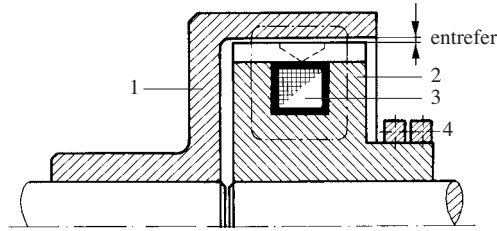


Fig. 20.39 Schéma d'un coupleur électromagnétique.

Les **coupleurs synchrones** ont un nombre de pôles du rotor égal à celui du corps polaire; le couple est transmis au synchronisme par réluctance,  $\omega_2 = \omega_1$ . A couple nul, les pôles sont exactement en face l'un de l'autre, mais ils se décalent progressivement d'un angle  $\varphi$  au fur et à mesure que le couple transmis s'accroît (fig. 20.40). A 45% environ du pas angulaire  $\varphi_0$  des pôles, le système décroche et commence à glisser. La figure 20.41 montre l'évolution du couple transmis en fonction du rapport de vitesses, la vitesse de glissement est  $\omega_1 - \omega_2$ . Le couple de décrochement augmente avec le courant d'excitation  $I$ . Le coupleur ne glisse pas tant que le couple transmis est inférieur au couple de décrochement, dans ce cas la perte mécanique est nulle. Son comportement statique est analogue à celui d'un accouplement élastique, il permet donc de découpler deux arbres du point de vue vibratoire et d'atténuer la transmission de couples perturbateurs (§ 17.7.3). Sa rigidité en torsion ajustable par le courant d'excitation en fait un élément semi-actif.

Un coupleur synchrone constitue un limiteur de couple très intéressant parce que le couple transmis diminue lorsque le glissement augmente, l'arbre secondaire s'arrête

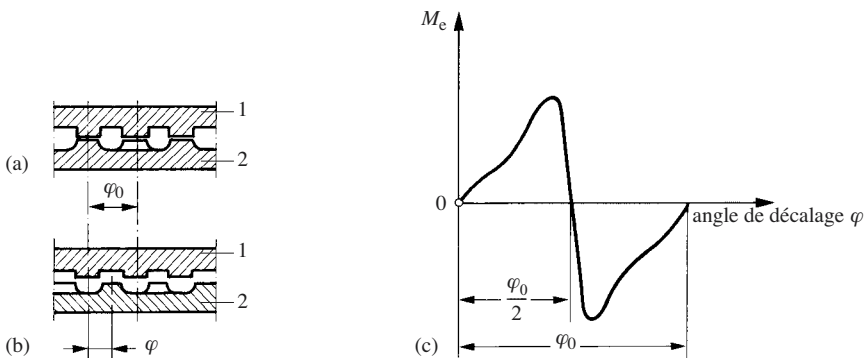


Fig. 20.40 Position des pôles d'un coupleur synchrone: (a) couple nul; (b) décalage angulaire avec couple; (c) couple transmis en fonction du décalage.



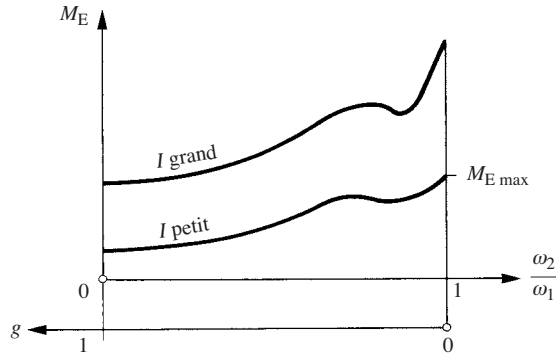


Fig. 20.41 Caractéristique d'un coupleur synchrone.

si la surcharge persiste. Il est plus avantageux que les embrayages à friction pour le démarrage de machines à grande inertie parce qu'il possède une plus forte capacité thermique et parce qu'il est moins sensible à l'échauffement.

Le nombre de pôles du rotor des **coupleurs asynchrones** est différent de celui du corps polaire. On obtient des caractéristiques analogues à celles des moteurs asynchrones (fig. 20.42). Le type A convient pour démarrer une machine dont le couple d'entraînement est constant; le type B est plutôt destiné à des machines dont le couple résistant est très petit au démarrage puis qui croît avec la vitesse. Ces coupleurs fonctionnent toujours avec un certain glissement et provoquent une perte qui les échauffe en permanence.

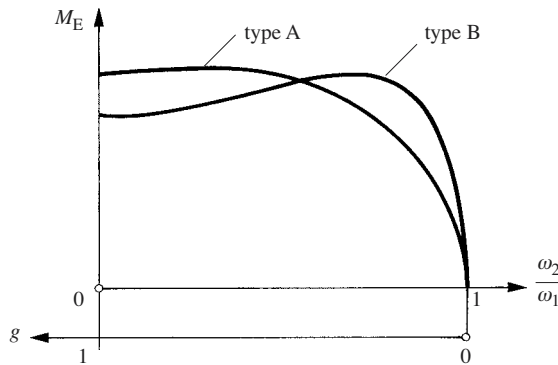


Fig. 20.42 Caractéristiques de coupleurs asynchrones.

### Coupleurs à induction

Le rotor (3) (fig. 20.43) de ces coupleurs est lisse. Le champ magnétique créé par la bobine annulaire (5) engendre dans le rotor tournant des courants de Foucault dont le champ magnétique réagit avec le champ principal pour permettre la transmission d'un couple entre les deux pièces. Le moyeu (1) entraîne le rotor par l'intermédiaire d'une roue (2) percée de canaux qui constituent un ventilateur centrifuge refroidissant énergiquement le coupleur. Le courant d'excitation est amené par les bagues (6).

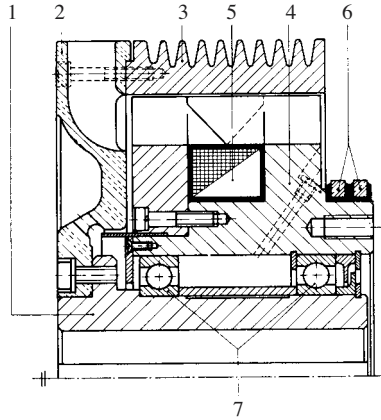


Fig. 20.43 Coupleur à induction.

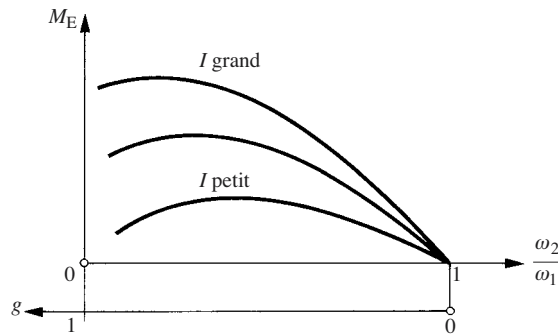
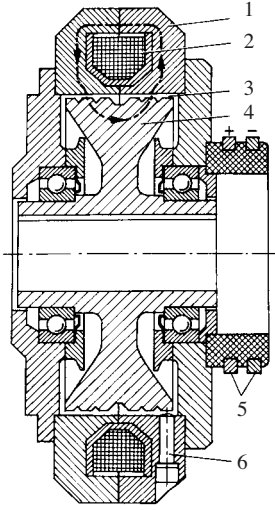


Fig. 20.44 Caractéristique de couple d'un coupleur à induction.

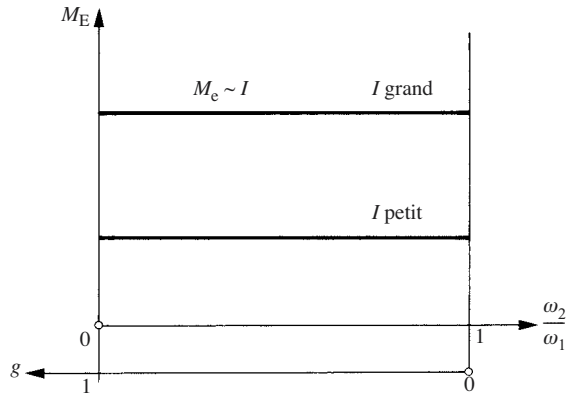
Le couple transmis est nul au synchronisme des vitesses (fig. 20.44); il croît avec le glissement et passe par un maximum, le couple transmissible augmente avec le courant d'excitation. Ces coupleurs ne peuvent transmettre un couple que moyennant un certain glissement et une perte correspondante.

### Coupleurs électromagnétiques à poudre

Un coupleur magnétique à poudre (fig. 20.45) se compose d'un rotor extérieur menant lisse (1). Dépourvu de pôles saillants, il contient une bobine annulaire d'excitation (2) alimentée en courant continu par les bagues (5). Le rotor intérieur (4) est également lisse à l'exception de saignées circulaires. Dans l'entrefer (3) se trouve de la fine poudre de fer. Sans excitation, la poudre est plaquée contre le rotor extérieur par la force centrifuge en formant un anneau sans cohésion, aucun couple n'est transmis. Lorsque la bobine est excitée, un flux magnétique circule comme indiqué dans la figure. La poudre de fer est magnétisée, elle s'organise en chaînes et constitue une liaison mécanique par friction entre le rotor extérieur et le rotor intérieur. Le couple transmis est indépendant du glissement, il est proportionnel au courant d'excitation (fig. 20.46).



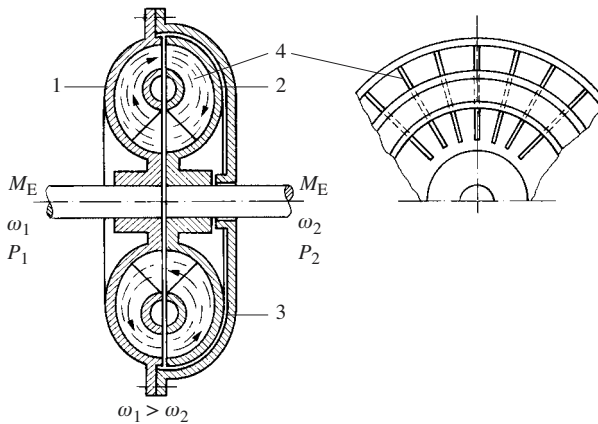
**Fig. 20.45** Coupleur à poudre magnétique (AEG-EMG).



**Fig. 20.46** Caractéristique d'un coupleur à poudre métallique.

### Coupleurs hydrodynamiques

Un coupleur hydrodynamique (fig. 20.47) se compose en principe d'une roue-pompe (1) en forme de demi-tore entraînée par le moteur. Une turbine de forme analogue (2) est fixée sur l'arbre de sortie; chaque roue est munie d'une série d'aubes radiales (4). Un carter (3), solidaire de (1), entoure (2) et forme avec la pompe un réservoir étanche qui renferme l'huile. En tournant, la pompe imprime à l'huile une vitesse périphérique et crée par effet centrifuge une certaine pression à l'extérieur qui ramène l'huile vers la turbine dont la vitesse angulaire est inférieure à celle de la pompe. Il en résulte la circulation d'huile indiquée dans la figure. Ralentie dans la turbine, l'huile lui transmet l'énergie hydraulique qu'elle a reçue de la pompe. La figure 5.28 illustre une exécution.



**Fig. 20.47** Schéma d'un coupleur hydrodynamique.

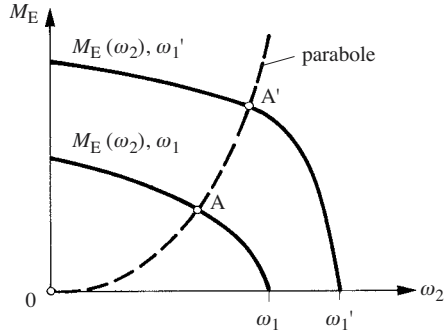


Fig. 20.48 Caractéristiques d'un coupleur hydrodynamique.

Le couple transmis dépend de la vitesse  $\omega_1$  de la pompe et de la vitesse  $\omega_2$  de la roue (fig. 20.48); il est maximum lorsque l'arbre de sortie est arrêté (démarrage) et nul au synchronisme, parce que les pressions centrifuges dans la pompe et dans la turbine sont égales, de sorte que la circulation radiale de l'huile s'arrête. Les coupleurs hydrodynamiques sont dimensionnés de telle manière qu'il subsiste un glissement de 2 à 3% au point de fonctionnement nominal. Leur rendement nominal est donc 97 à 98%. Dans les véhicules, les coupleurs sont parfois encore équipés d'un embrayage de synchronisation pour éliminer la perte de glissement. Comme dans toutes les machines à fonctionnement hydrodynamique, on a les lois de similitude suivantes, à glissement constant,

$$\omega_2 \sim \omega_1$$

$$M_E \sim \omega_1^2$$

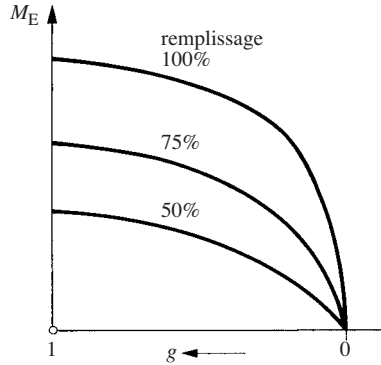
$$P_E \sim \omega_1^3$$

En passant d'une vitesse  $\omega_1$  à une vitesse  $\omega_1'$  (fig. 20.48), le point A' correspondant au point A se trouve sur une parabole. On influence les caractéristiques d'un coupleur hydrodynamique en jouant sur son remplissage, c'est-à-dire sur la quantité d'huile qu'il contient. Il n'y a naturellement aucune transmission lorsque le coupleur est vide; le couple transmis augmente, ou le glissement diminue, lorsque le remplissage croît (fig. 20.49). Ces propriétés sont précieuses pour faciliter le démarrage d'une machine ou pour régler sa vitesse. On fait circuler l'huile par un circuit extérieur avec un débit variable et on en profite pour la refroidir et évacuer la chaleur de perte provoquée par le glissement.

Tout comme les autres coupleurs, les coupleurs hydrodynamiques sont aussi réversibles et peuvent fonctionner dans les quatre quadrants.

### Convertisseur de couple

On constitue un convertisseur de couple en insérant un aubage directeur fixe dans le circuit torique d'huile d'un coupleur hydraulique. Cet élément de réaction transforme le coupleur en un mécanisme qui fonctionne à la manière d'un réducteur: la



**Fig. 20.49** Caractéristique d'un coupleur hydrodynamique en fonction du glissement et du remplissage.

vitesse de l'arbre secondaire diminue et le couple disponible augmente. Les convertisseurs de couple se rencontrent surtout en combinaison avec les boîtes de vitesses automatiques de véhicules à cause de leur progressivité.

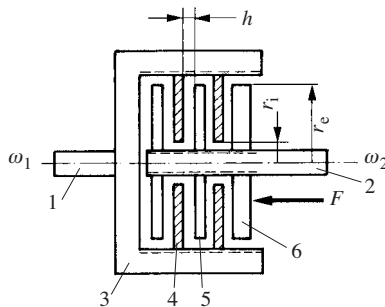
### Viscocoupleur

A l'instar des embrayages multidisques, un viscocoupleur (fig. 20.50) se compose de disques extérieurs (4) coulissant dans une cloche (3) et de disques intérieurs (5) coulissant sur l'arbre (2). Un plateau (6) comprime le paquet de disques. Mais les disques ne se touchent en principe pas, car ils sont séparés par de l'huile très visqueuse. La contrainte de cisaillement newtonienne appliquée à la surface des disques vaut

$$\tau = \eta \frac{dv}{dx} = \eta \frac{r(\omega_1 - \omega_2)}{h}$$

avec :

- $\eta$  viscosité dynamique de l'huile
- $r$  rayon
- $h$  distance entre deux disques
- $\omega_1, \omega_2$  vitesse des arbres



**Fig. 20.50** Schéma d'un viscocoupleur.

Le couple transmis par un anneau élémentaire vaut

$$dM_E = r \tau 2\pi r dr$$

On trouve le couple transmis en intégrant entre le rayon intérieur et le rayon extérieur de la surface de contact des disques. Pour  $n$  espaces, il vient

$$M_E = \frac{\pi}{2} n \eta \frac{r_e^4 - r_i^4}{h} (\omega_1 - \omega_2) \quad (20.65)$$

Cette formule est valable en écoulement laminaire, ce qui est habituellement le cas lorsque la distance entre les disques est petite. Le couple transmis est proportionnel à la vitesse de glissement (fig. 20.51), on peut le régler en jouant sur la distance  $h$  au moyen du plateau presseur. Il augmente lorsque  $h$  diminue. Lorsque la distance est si faible que les disques viennent à se toucher, on est en présence d'un frottement mixte comme dans les paliers hydrodynamiques (courbe de Stribeck fig. 2.35). Un viscocoupleur peut donc parfaitement fonctionner au synchronisme et se comporte alors comme un embrayage multidisques.

Le couple transmis dépend directement de la viscosité de l'huile. Or, celle-ci diminue fortement lorsque la température augmente, c'est pourquoi on prévoit normalement, pour les grandes puissances, un refroidissement de l'huile par un circuit extérieur avec une thermostatisation automatique.

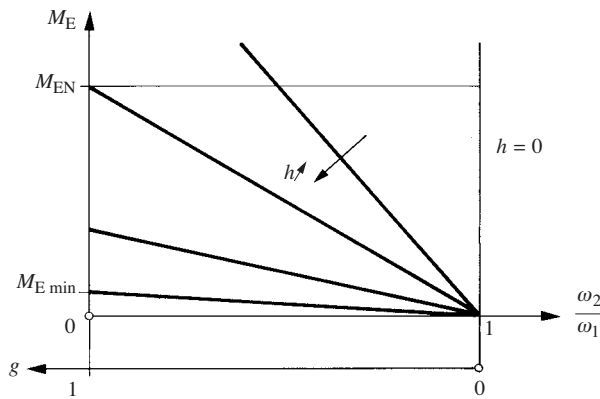


Fig. 20.51 Caractéristiques d'un viscocoupleur.

Dans les véhicules tout terrain, on installe parfois un viscocoupleur pour transférer un couple d'équilibrage entre les essieux avant et arrière. On en utilise aussi pour bloquer très progressivement le différentiel d'un essieu en cas de patinage d'une roue. Ces coupleurs comportent une série de disques liés alternativement aux carters et au moyeu (fig. 20.52). Les disques sont libres axialement et baignent dans une huile de silicone dont le comportement est non newtonnien. En cas de glissement, l'échauffement dilate l'huile et augmente sa pression en accroissant sa viscosité selon la loi

$$\eta = \eta_0 e^{\alpha p} \quad (2.47)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de piézo-viscosité de l'huile. Mais l'échauffement abaisse aussi la valeur de la viscosité nominale  $\eta_0$ . La viscosité de service résulte finalement de l'effet combiné température-pression. On contrôle le phénomène en laissant dans le carter une bulle d'air d'un volume judicieusement choisi.

L'échauffement croît avec l'énergie dissipée par le glissement. Mais lorsque la pression est assez forte, le couple transmissible croît et le glissement diminue. Tout se passe comme si le coupleur s'enclenchait à la façon d'un embrayage. Outre la viscosité, il semble que ces coupleurs ont encore d'autres particularités :

- la pression du fluide est plus forte dans la région centrale des disques qu'à leur périphérie;
- une paire de disques sur deux se touchent au centre et contribuent à transmettre le couple tandis que la paire voisine ne se touche pas;
- à faible glissement, le fluide se comporte comme s'il était newtonnien; mais avec une grande différence de vitesse, les longues chaînes hélicoïdales du silicone s'enroulent les unes sur les autres en formant des «rouleaux» qui s'introduisent dans les trous et dans les fentes des disques en les reliant. Ce phénomène explique probablement l'action rapide des viscocoupleurs.

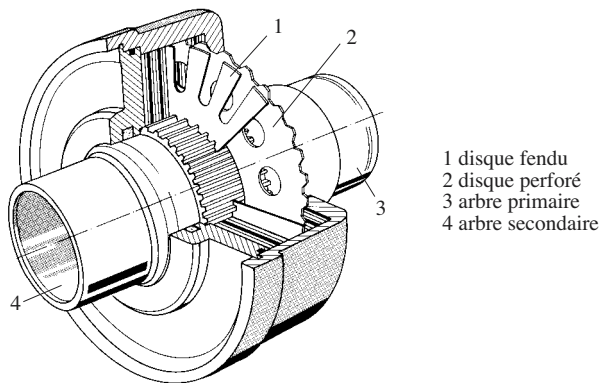


Fig. 20.52 Viscocoupleur de véhicule.

### Coupleurs électrorhéologiques

En se basant sur les propriétés des fluides électrorhéologiques (§ 4.2.1), on a conçu des coupleurs dont la disposition ressemble à celle des viscocoupleurs [20.4]. Le couple transmis s'ajuste en jouant sur la tension créant le champ électrostatique.

### Association d'un coupleur et d'un moteur

Cherchons la caractéristique du couple en fonction de la vitesse de l'arbre de sortie d'un coupleur entraîné par un moteur. La caractéristique du coupleur est supposée connue (fig. 20.53a), ainsi que la caractéristique  $M_m(\omega_1)$  du moteur (fig. 20.53b). Supposons que le coupleur transmette  $M_E$ , sa caractéristique fournit le rapport de vitesses  $\omega_2 / \omega_1$  au point de fonctionnement A. La vitesse  $\omega_1$  du moteur se trouve au

point de fonctionnement B sur sa caractéristique de couple et la vitesse de sortie du coupleur vaut alors

$$\omega_2 = \omega_1 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$$

Elle donne avec  $M_E$  le point C de la caractéristique  $M_2(\omega_2)$  à l'arbre de sortie. On remarque que :

- le moteur n'est jamais chargé au-delà du couple maximal transmissible par le coupleur;
- la vitesse de marche à vide du coupleur est égale à la vitesse de marche à vide du moteur;
- la vitesse de sortie s'adapte automatiquement à la charge.

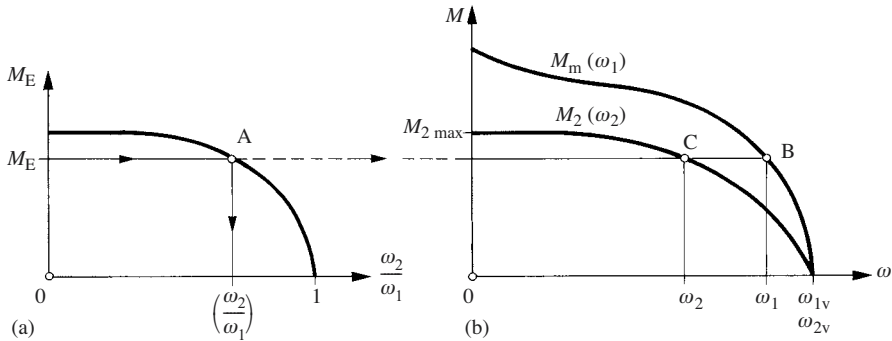


Fig. 20.53 Caractéristiques: (a) coupleur; (b) coupleur associé à un moteur.

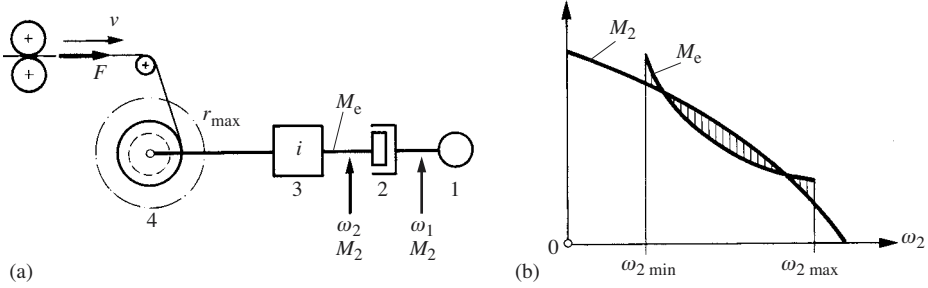
Les coupleurs à glissement contrôlé se comportent apparemment comme des variateurs de vitesse, mais ils ne convertissent pas le couple; ce sont des *transmetteurs de couple à vitesse variable*.

### Exemples d'applications

La figure 20.54(a) représente un bobinoir à fil. Le fil qui arrive à vitesse constante doit s'enrouler avec une force de traction également constante. Il s'agit donc d'entraîner la bobine (4) avec une puissance constante, mais le couple nécessaire est inversement proportionnel à sa vitesse de rotation selon le rayon d'enroulement (fig. 20.54b). En choisissant convenablement la vitesse du moteur (1), le rapport de transmission du réducteur (3) et le coupleur à courant de Foucault (2), on peut approcher l'hyperbole idéale par la caractéristique du coupleur, mais il existe une erreur  $M_2 - M_e$  qu'on répartit de part et d'autre de l'hyperbole (fig. 20.54b). A l'aide d'un régulateur convenable, on agit sur le coupleur de manière que le couple qu'il transmet soit toujours égal au couple théorique. En cas d'arrêt de la machine principale et de blocage du fil, le coupleur glisse avec son couple maximal sans danger de casser le fil.

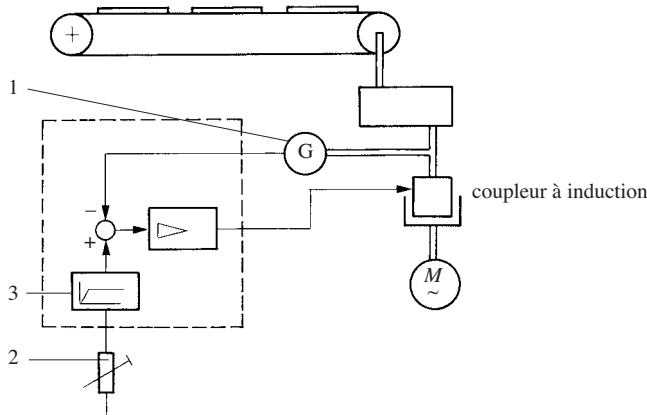
La figure 20.55 représente la commande d'un convoyeur de plaques de verres. Il s'agit de les transporter avec une vitesse variable réglable et de démarrer le convoyeur avec une accélération constante limitée afin que les plaques ne glissent pas. Un tachy-





**Fig. 20.54** Entraînement d'un bobinoir: (a) schéma; (b) caractéristique de couples.

mètre (1) mesure la vitesse de la bande et la compare à la valeur de consigne affichée en (2). La différence de vitesse excite la bobine du coupleur à induction. Le démarrage s'effectue au moyen d'un générateur de rampe (3) qui contrôle l'accélération.



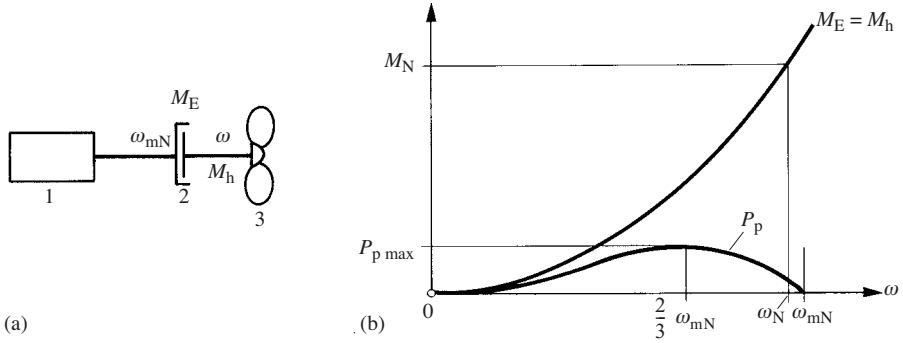
**Fig. 20.55** Commande d'un convoyeur.

Les chalutiers doivent remorquer leurs chaluts encore plus lentement que la plus petite vitesse possible avec un moteur diesel. Selon la figure 20.56(a), on installe un coupleur hydrodynamique ou un viscocoupleur réglable (2) entre le moteur (1) et l'hélice (3). A la vitesse nominale  $\omega_N$  de l'hélice existe un glissement nominal  $g_N$  tel que

$$\omega_N = (1 - g_N) \omega_{mN}$$

où  $\omega_{mN}$  est la vitesse du moteur à son régime nominal. La caractéristique parabolique d'hélice donne le couple transmis par le coupleur en fonction de sa vitesse

$$M_E = M_h = M_N \left( \frac{\omega}{\omega_N} \right)^2 = \frac{M_N}{(1 - g_N)^2} \left( \frac{\omega}{\omega_{mN}} \right)^2$$



**Fig. 20.56** Commande d'une hélice de bateau par un coupleur: (a) schéma; (b) caractéristiques.

La puissance perdue dans le coupleur se calcule par (20.61):

$$P_p = M_h(\omega_{mN} - \omega) = \frac{M_N}{(1 - g_N)^2} \left( \frac{\omega}{\omega_{mN}} \right)^2 (\omega_{mN} - \omega)$$

et finalement, avec la puissance nominale du moteur  $P_N = M_N \omega_{mN}$  (fig. 20.56b), on obtient la perte

$$P_p = \frac{P_N}{(1 - g_N)^2} \left( \frac{\omega}{\omega_{mN}} \right)^2 \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_{mN}} \right) \quad (20.66)$$

Elle est maximale pour  $\omega = \frac{2}{3} \omega_{mN}$  et vaut

$$P_{p \max} = \frac{4}{27} \frac{P_N}{(1 - g_N)^2} \quad (20.67)$$

En admettant un glissement permanent à la vitesse nominale de 2,5%,  $P_{p \max} = 0,156 P_N$ ; mais la perte ne vaut que 0,01  $P_N$  au dixième de la vitesse maximale. Un régulateur maintient constante la vitesse du moteur tandis qu'on agit sur le coupleur pour varier la vitesse de l'hélice.

On a décrit une autre application de coupleurs pour faciliter le démarrage de moteurs au paragraphe 14.5.3.

## 20.6 POSITIONNEMENT

### 20.6.1 Introduction

Les commandes et mécanismes de positionnement se rencontrent notamment dans les robots, les machines-outils et les engins de manutention pour déplacer avec précision un objet d'un point à un autre. Le mouvement résulte souvent de la combi-

raison de plusieurs mouvements élémentaires dont chacun est commandé par un système structuré selon la figure 20.57. La commande centrale (1) donne l'ordre de mouvement par la consigne de position  $q_c$ , elle coordonne les mouvements et gère toutes les fonctions. La position du récepteur (5) est mesurée par un capteur approprié (6). Le régulateur (2) compare la position effective à la consigne et génère les signaux de pilotage de l'actionneur (3). Ce dernier est structuré comme décrit au paragraphe 20.5.3, son moteur commande le récepteur par l'intermédiaire d'une transmission (4).

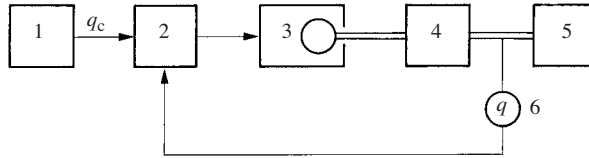


Fig. 20.57 Schéma d'une commande de position.

On souhaite généralement que le récepteur effectue un mouvement d'amplitude connue dans un temps donné, souvent le plus bref possible. Le problème consiste :

- à chercher la loi du mouvement appropriée;
- à déterminer le rapport de vitesses le plus favorable;
- à choisir le moteur adéquat.

La durée d'un mouvement dépend de l'accélération, donc de la masse, et de la distance à parcourir. Les commandes de robots sont particulières en ce sens que la trajectoire parcourue par la pince et la masse transportée varie souvent d'un cycle à l'autre; en outre, l'inertie réduite à l'arbre du moteur dépend du déploiement du bras. Il existe des systèmes de commande autoadaptatifs qui ajustent constamment en temps réel les paramètres de la boucle d'asservissement et ceux de la loi de mouvement de manière à obtenir les mouvements les plus rapides et les plus précis possibles.

## 20.6.2 Lois du mouvement

Dans les commandes de positionnement, on rencontre les lois de mouvements suivantes :

- lois à accélération constante en cas de mouvements assez lents pour que des surcharges dynamiques ne soient pas à craindre;
- lois à jerk constant ou limité pour diminuer l'amplitude des mouvements vibratoires à l'origine d'imprécision de positionnement et de surcharges dynamiques dangereuses;
- lois polynomiales, cycloïdales ou trigonométriques pour de très grandes vitesses de positionnement.

La distance à parcourir étant donnée, on rencontre deux types de problèmes :

- déterminer la durée du mouvement lorsque les caractéristiques de l'actionneur sont connues; ou
- déterminer les caractéristiques de l'actionneur nécessaire pour effectuer le mouvement dans un intervalle de temps donné.

## Mouvements à accélération constante

### Vitesse en trapèze

Ce mouvement est caractérisé par (fig. 20.58):

- l'accélération est constante pendant le démarrage et le ralentissement;
- la décélération est égale à l'accélération;
- le jerk est infini ou nul;
- il existe une période de mouvement permanent à vitesse constante.

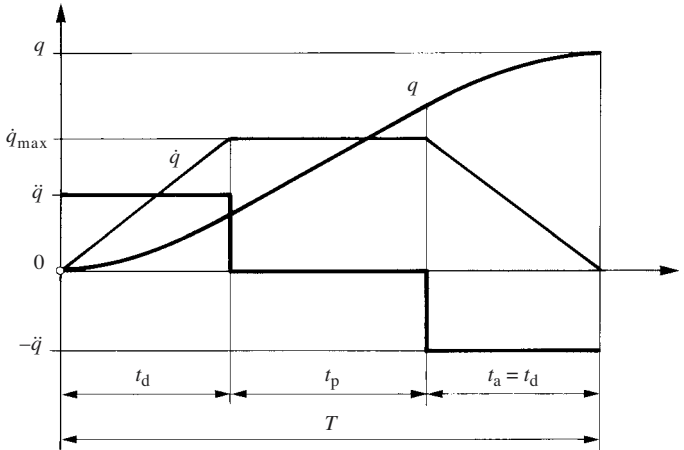


Fig. 20.58 Mouvement de positionnement à accélération constante et vitesse en trapèze.

A la fin du démarrage, on a la vitesse maximale

$$\dot{q}_{\max} = \ddot{q} t_d$$

et la distance parcourue est

$$q_d = \frac{1}{2} \ddot{q} t_d^2 = \frac{\dot{q}_{\max}^2}{2 \ddot{q}}$$

L'accélération et la vitesse maximale sont imposées par l'actionneur. Par conséquent, le temps de démarrage est

$$t_d = \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}}$$

La décélération est égale à l'accélération, donc  $t_a = t_d$  et  $q_a = q_d$ . L'espace parcouru vaut

$$q = q_d + q_p + q_a = \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}} + \dot{q}_{\max} t_p \quad (20.68)$$

et le mouvement complet dure

$$T = t_d + t_p + t_a = 2 \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}} + t_p \quad (20.69)$$

Introduisons  $t_p$  tiré de (20.68) dans cette expression. Il vient

$$T = \frac{q}{\dot{q}_{\max}} + \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}} \quad (20.70)$$

*Vitesse en trapèze optimal*

La durée du mouvement permanent est a priori quelconque. Mais on verra (§ 20.6.5) qu'il est avantageux de faire  $t_p = t_d = t_a$  pour minimiser l'échauffement du moteur. Dans ce cas, on a l'espace parcouru

$$q = 2 \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}} \quad (20.71)$$

et la durée du mouvement

$$T = 3 \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}} = \frac{3}{2} \frac{q}{\dot{q}_{\max}} \quad (20.72)$$

*Vitesse en triangle*

Il existe une vitesse optimale pour laquelle la durée du mouvement exprimée par (20.70) est minimale. Par la condition  $dT/d\dot{q}_{\max} = 0$ , on trouve

$$\dot{q}_{\text{opt}} = \sqrt{q \ddot{q}} \quad (20.73)$$

et la durée du mouvement est

$$T_{\min} = 2 \sqrt{\frac{q}{\ddot{q}}} \quad (20.74)$$

On voit, en portant ces expressions dans (20.69), que la durée du mouvement permanent est nulle. Le ralentissement succède immédiatement au démarrage, la vitesse évolue en triangle (fig. 20.59). Les aires des polygones de vitesse sont égales et représentent la distance parcourue.

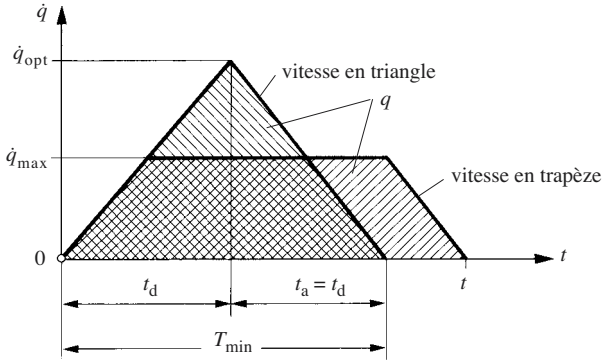


Fig. 20.59 Durée d'un mouvement à accélération constante.

### Mouvements à jerk constant

#### Accélération en triangle

Le mouvement à jerk constant a été étudié au paragraphe 10.3.1. Selon la figure 20.60, il a les caractéristiques suivantes:

- le jerk change de signe à la moitié du temps de démarrage ou de ralentissement;
- l'intensité du jerk est la même pendant le démarrage que durant le ralentissement;
- la décélération maximale est égale à l'accélération maximale;
- il existe une période de mouvement permanent à vitesse constante;
- comparé au mouvement à accélération constante (fig. 20.58), la fonction de la vitesse présente des arrondis favorables à un bon comportement dynamique du système.

Il n'y a pas de régime permanent si  $t_p = 0$ .

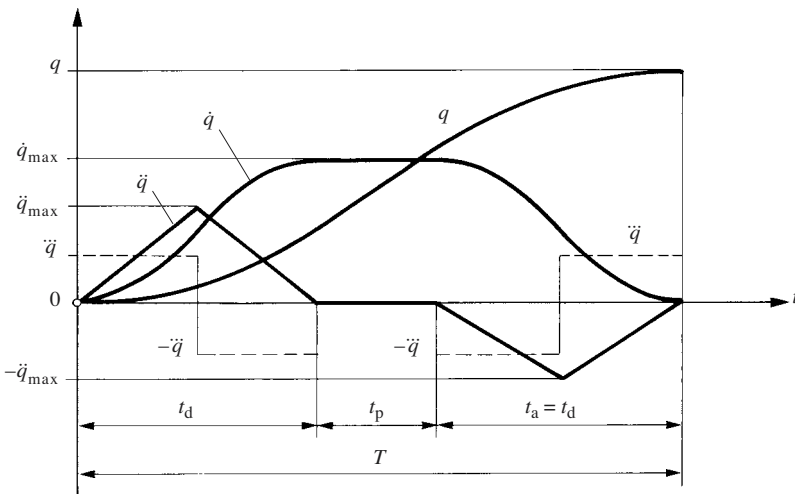
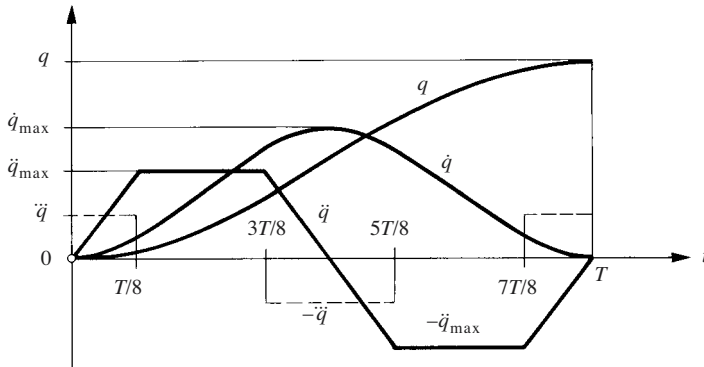


Fig. 20.60 Mouvement de positionnement à jerk constant et accélération en triangle.

*Accélération en trapèze*

La répartition dans le temps des diverses phases du mouvement selon la figure 20.61 résulte d'un bon compromis sanctionné par l'expérience. Pour un mouvement donné, l'accélération maximale vaut  $2/3$  de ce qu'elle est dans le cas de l'accélération triangulaire.



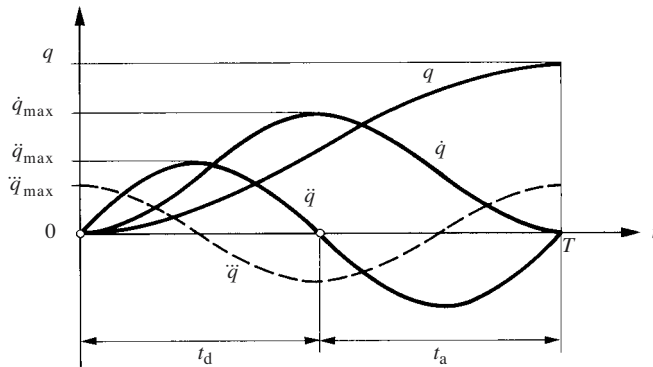
**Fig. 20.61** Mouvement de positionnement à jerk constant et accélération en trapèze.

**Mouvement cycloïdal**

La loi du mouvement est trigonométrique (fig. 20.62):

$$q(t) = q \left( \frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right) \quad (20.75)$$

Elle est très favorable du point de vue dynamique.



**Fig. 20.62** Mouvement cycloïdal.

**Amplitude et durée des mouvements**

Le tableau 20.63 donne le déplacement et sa durée obtenus avec diverses lois du mouvement lorsque la vitesse et l'accélération maximale sont imposées par l'action-

neur. Dans le cas à jerk constant, on tient compte de la relation (10.35) pour l'accélération en triangle et de la loi de mouvement décrite à la figure 20.61 pour l'accélération en trapèze.

**Tableau 20.63** Amplitude et durée de mouvements

Lois	$t_p$	$q$	$T$
<i>Accélération constante</i>			
• vitesse en triangle	0	$\frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}}$	$2 \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}}$
• vitesse en trapèze	$t_p$	$\frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}} + \dot{q}_{\max} t_p$	$2 \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}} + t_p$
• vitesse en trapèze optimal	$\frac{T}{3}$	$2 \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}}$	$3 \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}}$
<i>Jerk constant</i>			
• accélération en triangle	$t_p$	$2 \left( \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} + t_p \right) \dot{q}_{\max}$	$4 \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} + t_p$
	0	$2 \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}}$	$4 \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}}$
• accélération en trapèze	$t_p$	$\dot{q}_{\max} \left( \frac{4}{3} \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} + t_p \right)$	$\frac{8}{3} \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} + t_p$
	0	$\frac{4}{3} \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}}$	$\frac{8}{3} \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}}$
<i>Cycloïde</i>			
• vitesse en «trapèze»	$t_p$	$\frac{\pi}{2} \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}} + \dot{q}_{\max} t_p$	$\pi \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} + t_p$
• vitesse en «triangle»	0	$\frac{\pi}{2} \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}}$	$\pi \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}}$

### Caractéristiques du mouvement nécessaire

Le tableau 20.64 donne les grandeurs cinématiques nécessaires pour qu'un déplacement  $q$  s'effectue dans un intervalle de temps  $T$  donné. Ces valeurs se déduisent facilement des expressions développées plus haut.



**Tableau 20.64** Caractéristiques cinématiques de mouvements.

Lois	$t_p$	$\ddot{q}_{\max}$	$\dot{q}_{\max}$	$\dot{q}_{\max}$
<i>Accélération constante</i>				
• vitesse en triangle	0	$\infty$	$4 \frac{q}{T^2}$	$2 \frac{q}{T}$
• vitesse en trapèze optimal	$\frac{T}{3}$	$\infty$	$\frac{9}{2} \frac{q}{T^2}$	$\frac{3}{2} \frac{q}{T}$
<i>Jerk constant</i>				
• accélération en triangle	0	$32 \frac{q}{T^3}$	$8 \frac{q}{T^2}$	
• accélération en trapèze	0	$\frac{128}{3} \frac{q}{T^3}$	$\frac{16}{3} \frac{q}{T^2}$	$2 \frac{q}{T}$
<i>Cycloïde</i>	0	$4\pi^2 \frac{q}{T^3}$	$2\pi \frac{q}{T^2}$	$2 \frac{q}{T}$

On est obligé d'insérer une phase de mouvement permanent lorsque la vitesse ou l'accélération dépassent les possibilités de l'actionneur. Sa durée se tire des formules d'espace contenues dans le tableau 20.63.

### Conclusions

On tiendra compte des conclusions et remarques suivantes pour choisir la loi et la durée d'un mouvement de positionnement :

- la vitesse et l'accélération sont limitées par les caractéristiques de l'actionneur;
- l'accélération est limitée par la capacité de transmission d'effort d'un éventuel organe non positif inséré dans la chaîne cinématique;
- l'accélération est parfois limitée par la résistance du produit manipulé par l'outil;
- les mouvements rapides provoquent des vibrations et des imprécisions de positionnement;
- l'allongement d'une séquence de positionnement dans le cycle d'une machine permet d'accroître la cadence pour une même erreur de positionnement (§ 15.9.2);
- une loi cycloïdale ou à jerk constant est favorable pour des mouvements rapides précis.

### 20.6.3 Rapport de vitesses optimal

Un moteur de commande entraîne une inertie quelconque  $I$  par l'intermédiaire d'un organe dont le rapport de vitesses est constant (fig. 20.65). Une force statique

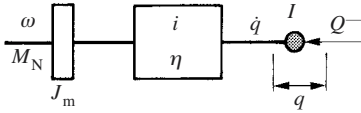
résistante  $Q$  s'oppose au mouvement, le moteur est caractérisé par son moment d'inertie  $J_m$ . On optimise le rapport de vitesses selon l'un ou l'autre des critères suivants :

- l'accélération la plus grande et donc le mouvement le plus bref pour un moteur donné;
- le moteur le plus petit pour une accélération donnée.

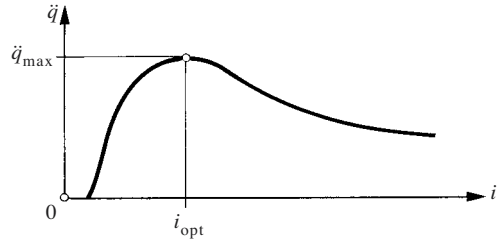
### Accélération maximale

Exprimons l'accélération du récepteur en réduisant le couple et l'inertie du moteur à l'arbre de sortie avec un modèle cinétostatique (§ 13.7.2) :

$$\ddot{q} = \frac{\eta i M_N - Q}{\eta i^2 J_m + I} \quad (20.76)$$



**Fig. 20.65** Schéma d'un mécanisme de positionnement.



**Fig. 20.66** Accélération en fonction du rapport de transmission.

Le mouvement est d'autant plus rapide que l'accélération est plus forte. Il existe une valeur du rapport de vitesses pour laquelle  $\ddot{q}$  est maximal (fig. 20.66). Sa valeur optimale se trouve en faisant  $d\ddot{q}/di = 0$ . On obtient :

$$i_{\text{opt}} = \frac{Q}{\eta M_N} + \sqrt{\left(\frac{Q}{\eta M_N}\right)^2 + \frac{I}{\eta J_m}} \quad (20.77)$$

L'effort résistant est souvent très petit par rapport à l'effort moteur disponible  $\eta i M_N$  de sorte qu'on peut le négliger en première approximation dans la formule (20.76). La valeur du rapport de vitesses optimal vaut alors simplement

$$i_{\text{opt}} \approx \sqrt{\frac{I}{\eta J_m}} \quad (20.78)$$

et l'accélération correspondante est :

$$\ddot{q}_{\text{max}} = \frac{\eta i_{\text{opt}} M_N}{\eta i_{\text{opt}}^2 J_m + I} = \frac{M_N}{2} \sqrt{\frac{\eta}{I J_m}} \quad (20.79)$$

Calculons encore le moment d'inertie de la machine réduit à l'arbre du moteur avec la valeur (20.78) du rapport de vitesses optimal :

$$J_e = \frac{I}{\eta i_{\text{opt}}^2} = J_m \quad (20.80)$$

*L'adaptation du moteur au mécanisme est optimale en vue du mouvement le plus rapide, pour un effort résistant négligeable, lorsque le moment d'inertie du mécanisme réduit à l'arbre moteur est égal au moment d'inertie du moteur.* Cette règle guidera le projeteur pour étudier un mécanisme de positionnement.

Par (20.74) et (20.79), la durée du mouvement vaut, pour une *marche en triangle à accélération constante optimale*,

$$T_{\text{opt}} = 2 \sqrt{\frac{q}{\ddot{q}_{\text{max}}}} = 2\sqrt{2} \left( \frac{IJ_m}{\eta} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{q}{M_N}} \quad (20.81)$$

Etudions la sensibilité de la durée du mouvement à la valeur du rapport de vitesses en calculant le rapport de la durée du mouvement donnée par (20.74) à la durée obtenue avec l'adaptation optimale des inerties. On introduit les accélérations (20.79) et (20.76) où on pose  $Q = 0$ . On trouve :

$$\frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{\ddot{q}_{\text{max}}}{\ddot{q}}} = \sqrt{\frac{i_{\text{opt}}}{i} \frac{\eta i^2 J_m + I}{\eta i_{\text{opt}}^2 J_m + I}}$$

Introduisons l'inertie  $I$  tirée de (20.78), il vient

$$\frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{i}{i_{\text{opt}}} + \frac{i_{\text{opt}}}{i} \right)} \quad (20.82)$$

On constate que la durée du mouvement est assez peu sensible à la valeur du rapport de vitesses, elle augmente seulement de 11,8% lorsque le rapport de vitesses vaut la moitié ou le double de sa valeur optimale. Ce résultat révèle que le choix du rapport de vitesses n'est pas pointu. On choisira de préférence une valeur un peu supérieure au rapport optimal afin de tenir compte du couple statique d'entraînement.

Une fois le rapport de vitesses choisi, on vérifie que la vitesse du moteur ne dépasse pas sa vitesse maximale admissible, normalement la vitesse nominale. Cette condition s'écrit, avec (20.73),

$$i \dot{q}_{\text{max}} = i \sqrt{q \ddot{q}} \leq \omega_{\text{max}} \quad (20.83)$$

Le mouvement doit s'effectuer en trapèze si cette condition n'est pas satisfaite. C'est le cas lorsque

$$q > \frac{\omega_{\max}^2}{i^2 \ddot{q}} \quad (20.84)$$

### Couple moteur le plus petit

Calculons le couple moteur nécessaire pour communiquer l'accélération  $\ddot{q}$  à l'inertie menée (fig. 20.65):

$$M_m = \left( J_m + \frac{I}{\eta i^2} \right) i \ddot{q} + \frac{Q}{\eta i} \quad (20.85)$$

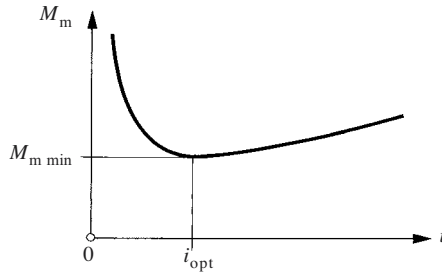


Fig. 20.67 Couple moteur en fonction du rapport de vitesses.

Le couple présente un minimum (fig. 20.67) pour une valeur optimale du rapport de vitesses trouvée par la condition  $dM_m / di = 0$ . On obtient

$$i_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{I \ddot{q} + Q}{\eta J_m \ddot{q}}} \quad (20.86)$$

Portons cette valeur dans l'expression du couple, il vient

$$M_{m \text{ min}} = 2 \sqrt{\frac{1}{\eta} (I \ddot{q} + Q) J_m \ddot{q}} \quad (20.87)$$

Combinons avec (20.86), on obtient

$$\left. \begin{aligned} M_{m \text{ min}} &= 2 J_m i_{\text{opt}} \ddot{q} \\ M_{m \text{ min}} &= 2 \frac{I \ddot{q} + Q}{\eta i_{\text{opt}}} \end{aligned} \right\} \quad (20.88)$$

Lorsque l'effort d'entraînement statique est négligeable par rapport à la force d'inertie,  $Q \ll I \ddot{q}$ , on trouve la même valeur du rapport de vitesses optimal que celui (20.78) qui maximise l'accélération. Il permet le mouvement le plus rapide avec le moteur le plus petit.

Cette étude montre clairement qu'il faut alléger toute la construction pour obtenir des mouvements de positionnement brefs.

### Exemple

Considérons un mécanisme à vis de mouvement (fig. 20.68). L'inertie de la vis et de la masse en mouvement réduites à l'arbre du moteur valent

$$J_e = \frac{J_v}{\eta_l i_l^2} + \frac{m}{\eta_l \eta_v (i_l i_v)^2}$$

En égalant au moment d'inertie du moteur pour obtenir l'adaptation optimale, on obtient le rapport de transmission cherché :

$$i_{l \text{ opt}} = \sqrt{\frac{1}{\eta_l J_m} \left( J_v + \frac{m}{\eta_v i_v^2} \right)} \quad (20.89)$$

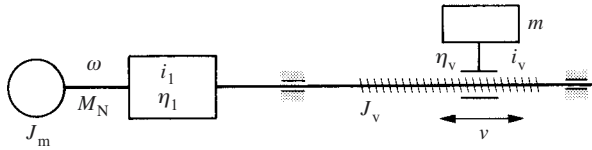


Fig. 20.68 Schéma d'une commande à vis de mouvement.

Avec un moteur moderne à faible inertie et une vis à billes, on trouve souvent que le rapport de transmission optimal se trouve entre 0,5 et 2. Il est alors préférable d'accoupler la vis directement au moteur pour simplifier le mécanisme et diminuer le coût, mais surtout pour supprimer le jeu de transmission.

Philipp [20.5] relate l'essai de moteurs linéaires à enroulements triphasés asynchrones qui offrent un comportement dynamique encore très supérieur à celui des commandes à vis à billes; ils permettent des commandes extrêmement performantes de tables de machines-outils.

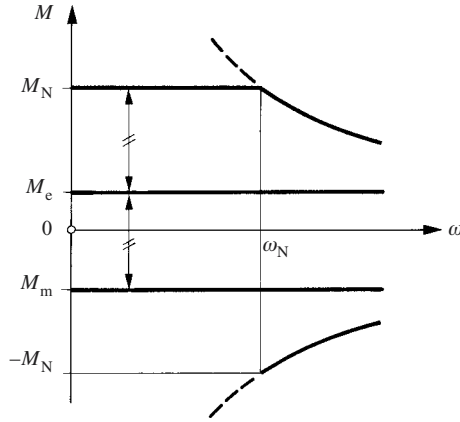
## 20.6.4 Choix d'un actionneur

### Caractéristiques de l'actionneur

Un moteur de commande est caractérisé par son couple nominal  $M_N$  (fig. 20.69), habituellement constant jusqu'à sa vitesse nominale  $\omega_N$ . Au-delà de cette vitesse, le couple diminue hyperboliquement à puissance constante (§ 20.5.3). Le moteur peut aussi s'exploiter pour freiner un mouvement avec un couple négatif, c'est-à-dire de sens opposé à la vitesse.

Supposons que le couple d'entraînement  $M_e$  soit constant (§ 14.4.1), il comprend un couple de frottement et parfois un couple de gravité. Appelons encore :

- $J_m$  le moment d'inertie du moteur
- $J_e$  le moment d'inertie du système entraîné réduit à l'arbre du moteur
- $i$  le rapport de vitesses de la transmission supposée uniforme



**Fig. 20.69** Caractéristiques d'un actionneur et couple d'entraînement.

L'accélération nominale de démarrage du récepteur vaut

$$\ddot{q}_{dN} = \frac{M_N - M_e}{(J_m + J_e)i} \quad (20.90)$$

Le moteur exerce maintenant un couple  $M_m$  pour arrêter le mouvement. La décélération vaut

$$\ddot{q}_a = \frac{M_m - M_e}{(J_m + J_e)i} \quad (20.91)$$

La décélération des mouvements de positionnement est en principe égale à l'accélération afin que les durées d'arrêt et de démarrage soient égales. Il faut donc

$$\ddot{q}_a = -\ddot{q}_{dN}$$

Avec les expressions ci-dessus des accélérations on trouve

$$M_m = -(M_N - 2M_e) \quad (20.92)$$

Le moteur travaille dans le 2<sup>e</sup> quadrant si ce couple est négatif.

### Conditions de dimensionnement

La vitesse et l'accélération nécessaires résultent de l'étude du mouvement, tableau 20.64.

L'actionneur doit satisfaire les conditions suivantes pour que le réglage soit aisé:

- La vitesse nominale doit être supérieure à la vitesse maximale requise par le mouvement. On admet:

$$\dot{q}_N = (1 \dots 3)\dot{q}_{\max} \quad (20.93)$$

- L'accélération nominale doit être supérieure à l'accélération théorique nécessaire :

$$\ddot{q}_N > \ddot{q}_{\max} \quad (20.94)$$

- Pour une adaptation optimale, le moment d'inertie du moteur doit être égal au moment d'inertie réduit de l'entraînement. On admet cependant :

$$J_m = (0,1 \dots 1) J_e \quad (20.95)$$

Une valeur inférieure de  $J_m$  peut provoquer des instabilités de la commande.

### Démarche de dimensionnement du moteur

- Choisir la vitesse nominale  $\omega_N$  du moteur. Tous les moteurs d'un même type ont à peu près la même vitesse nominale.
- Calculer le rapport de vitesses de la transmission; avec la condition (20.93) il vaut

$$i = \frac{\omega_N}{(1 \dots 3) \dot{q}_{\max}} \quad (20.96)$$

- Calculer le moment d'inertie réduit  $J_e$  et le couple d'entraînement  $M_e$  de la machine avec le rapport de vitesse choisi.
- Chercher par tâtonnement le moteur dont le moment d'inertie  $J_m$  et le couple nominal donne une accélération qui satisfait la relation (20.94). Avec (20.90), il faut

$$M_N > M_e + (J_m + J_e) i \ddot{q}_{\max} \quad (20.97)$$

- Vérifier que la condition (20.95) est satisfaite. Si ce n'est pas le cas, modifier la valeur de  $i$  ou choisir un autre type de moteur.
- La puissance nominale du moteur est

$$P_N = M_N \omega_N$$

Le cas échéant, corriger cette valeur pour tenir compte des conditions environnementales de fonctionnement (§ 20.3.2).

### Comparaisons des moteurs

Reprenons l'expression de l'accélération de l'inertie entraînée par un réducteur optimal :

$$\ddot{q}_{\max} = \frac{M_N}{2} \sqrt{\frac{\eta}{I J_m}} \quad (20.79)$$

Elevons au carré et groupons les grandeurs relatives au moteur :

$$\frac{M_N^2}{J_m} = \frac{4}{\eta} I \ddot{q}_{\max}^2$$

On appelle «power rate» du moteur la quantité

$$PR_m = \frac{M_N^2}{J_m} \quad (20.98)$$

et «power rate» de la charge :

$$PR_e = I \ddot{q}_{\max}^2 \quad (20.99)$$

Donc

$$PR_m = \frac{4}{\eta} PR_e \quad (20.100)$$

Les grandeurs  $PR_m$  et  $PR_e$  ont la dimension [W/s], d'où le nom de «power rate» qu'on leur a donné dans la littérature anglo-saxonne. Aucun terme français adéquat ne s'est imposé jusqu'ici.

Faisons apparaître la «power rate» du moteur dans l'expression (20.81) de la durée optimale du mouvement :

$$T_{\text{opt}} = \sqrt{8q} \left( \frac{I/\eta}{PR_m} \right)^{1/4} \quad (20.101)$$

La durée d'un mouvement est inversement proportionnelle à la racine quatrième de la «power rate» du moteur. On a intérêt à construire des moteurs ayant la plus grande valeur de  $PR_m$  possible, c'est-à-dire le plus grand rapport du couple nominal au moment d'inertie. C'est dans cette perspective qu'on a développé de nombreux types de moteurs : moteurs-disques à bobinages imprimés (fig. 20.70), moteurs à rotors longs (fig. 20.71). Les fabricants les appellent moteurs-couples, servomoteurs (désignation impropre) ou moteurs d'asservissement.

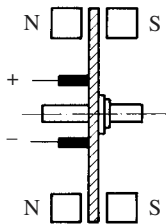


Fig. 20.70 Moteur-disque.

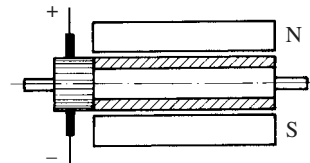


Fig. 20.71 Moteur à rotor long.

On peut envisager d'autres sources d'énergie que les moteurs électriques pour des commandes de positionnement. La définition de la «power rate» s'applique aussi aux vérins pour lesquels on a, de manière analogue,

$$PR_m = \frac{F_N^2}{m} \quad (20.102)$$



avec :

$F_N$  force exercée par le fluide de commande  
 $m$  masse du piston et de sa tige

Une étude comparative de divers moteurs du commerce révèle que la «power rate» des moteurs et des vérins hydrauliques est 100 à 200 fois plus grande que celle des moteurs électriques. C'est pourquoi les moteurs hydrauliques permettent des performances encore plus élevées que les meilleurs moteurs électriques. Selon (20.101), la durée d'un mouvement commandé hydrauliquement est environ le tiers de ce qu'elle serait avec une commande électrique.

### 20.6.5 Energie dissipée

Un moteur électrique réglé permet une décélération égale à l'accélération. Supposons un mouvement en trapèze (fig. 20.72),  $t_d = t_a$ , et calculons l'angle parcouru par le rotor.

$$\varphi = 2 \frac{1}{2} \omega_{\max} t_d + \omega_{\max} (T - 2t_d) = \omega_{\max} (T - t_d)$$

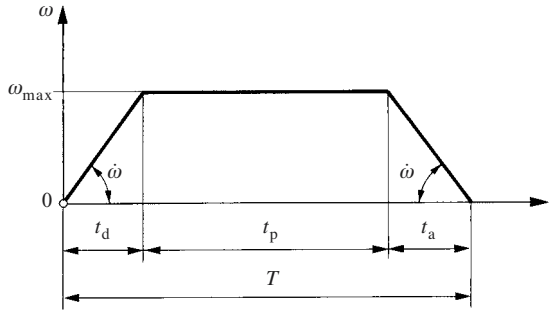


Fig. 20.72 Mouvement en trapèze.

L'accélération étant donnée,  $\omega_{\max} = \dot{\omega} t_d$ . En négligeant le couple d'entraînement statique, on a :

$$\varphi = \dot{\omega} t_d (T - t_d) = \frac{M_N}{J_m + J_e} t_d (T - t_d)$$

Le couple fourni par un moteur à courant continu est proportionnel au courant  $I$ , alors

$$\varphi = \frac{b I}{J_m + J_e} t_d (T - t_d)$$

où  $b$  est une constante du moteur. Cette équation fournit le courant d'alimentation nécessaire :

$$I = \frac{\varphi(J_m + J_e)}{b} \frac{1}{t_d(T - t_d)}$$

L'énergie Joule totale dissipée dans la résistance  $R$  du bobinage, durant l'accélération et la décélération, vaut,

$$W_p = 2 R I^2 t_d$$

En substituant le courant, il vient

$$W_p = 2 R \frac{\varphi^2 (J_m + J_e)^2}{b^2} \frac{1}{t_d (T - t_d)^2} \quad (20.103)$$

Le moteur présente une perte minimale pour  $dW_p / dt_d = 0$ . On trouve les solutions

$$t_d = \frac{1}{3} T \quad \text{et} \quad t_d = T$$

Seule, la première a un sens. L'énergie dissipée dans le moteur est minimale pour une marche en trapèze avec  $t_d = t_a = t_p = T/3$ . En portant ces valeurs dans (20.103), on obtient

$$W_{p \min} = \frac{27}{2} R \frac{\varphi^2 (J_m + J_e)^2}{b^2 T^3} \quad (20.104)$$

Comparons cette perte à celle qu'on aurait pour parcourir le même angle dans le même temps total, mais avec une accélération plus faible telle que le mouvement s'effectue en triangle. Il suffit de poser  $t_d = T/2$  dans (20.103), on a

$$W_{p\Delta} = 16 R \frac{\varphi^2 (J_m + J_e)^2}{b^2 T^3}$$

et finalement

$$\frac{W_{p \min}}{W_{p\Delta}} = \frac{27}{32} \approx 0,844$$

On constate que, pour une durée donnée, il est préférable d'effectuer le mouvement en trapèze optimal plutôt qu'en triangle, car le moteur chauffe moins.

### 20.6.6 Directives de conception

Voici des règles à observer pour créer un mécanisme de positionnement rapide et précis, notamment pour la construction de robots. Elles résultent des paragraphes précédents et des chapitres 15 et 17.

**Mouvement**

Choisir une loi du mouvement cycloïdale, à jerk minimum ou toute autre loi favorable du point de vue vibratoire, si possible sans phase de régime permanent.

En revanche, si le temps disponible le permet, effectuer le mouvement en trapèze optimal afin de diminuer l'échauffement du moteur.

**Inertie**

Diminuer les inerties du mécanisme pour réduire la taille du moteur ou, à taille égale, accélérer le mouvement. Cette mesure accroît aussi les pulsations propres, favorise l'amortissement des vibrations transitoires et améliore la précision du positionnement.

**Rigidité**

Construire le plus rigide possible pour accroître les pulsations propres du mécanisme.

**Amortissement**

Viser à obtenir un fort amortissement des structures par un choix adéquat des matériaux, prévoir des dispositifs idoines pour abréger l'amortissement des vibrations transitoires.

**Rapport de vitesses**

Construire la transmission avec le rapport de vitesses optimal pour obtenir l'accélération la plus forte et le mouvement le plus bref.

**Jeu**

Construire toutes les liaisons avec le plus petit jeu compatible avec le fonctionnement. Si possible supprimer les jeux par précontrainte.

**Commande**

Utiliser des algorithmes de commande et de réglage permettant le positionnement le plus précis. Des systèmes autoadaptatifs sont favorables lorsque les masses varient.

**Moteur**

Choisir un moteur avec un gros couple et une petite inertie, plus précisément avec une «power-rate» élevée.

**20.7 VÉHICULES****20.7.1 Résistance à l'avancement**

En régime permanent, la résistance à l'avancement se compose principalement de trois forces :

- La *résistance au roulement* sur une pente ayant un angle de montée  $\alpha$  :

$$F_r = m g f \cos \alpha \quad (20.105)$$

avec:

- $m$  masse du véhicule
- $f$  facteur de résistance (frottements mécaniques, résistance des pneus)

Cette résistance est petite comparativement aux autres forces ( $f \approx 0,01$ ); on admet  $\cos \alpha \approx 1$ .

- La **résistance de pente**:

$$F_p = m g \sin \alpha \quad (20.106)$$

Le sinus de l'angle de montée peut se calculer à partir de la pente  $p = \tan \alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Pour les pentes habituelles, on admet

$$F_p \approx m g p \quad (20.107)$$

L'erreur n'est sensible que pour les très fortes pentes, mais elle conduit heureusement à un calcul pessimiste.

- La **résistance aérodynamique** de l'air:

$$F_a = C_x A \frac{\rho}{2} v^2 \quad (20.108)$$

avec:

- $C_x$  facteur de résistance aérodynamique frontal
- $A$  aire du maître-couple
- $\rho$  masse volumique de l'air
- $v$  vitesse du véhicule par rapport à l'air

La résistance totale ou force propulsive nécessaire vaut

$$F_e = m g (f + p) + C_x A \frac{\rho}{2} v^2 \quad (20.109)$$

$F_e = F_e(v, p)$  est une parabole (fig. 20.73) dont l'ordonnée à l'origine augmente linéairement avec la pente. On admet habituellement dans ces calculs que la vitesse du vent est nulle.

La puissance de propulsion

$$P_e = F_e v = \left[ m g (f + p) + C_x A \frac{\rho}{2} v^2 \right] v \quad (20.110)$$

augmente très vite avec la vitesse, pratiquement avec le cube de la vitesse en palier. Cette loi, grossièrement valable pour tous les engins se déplaçant dans un fluide,

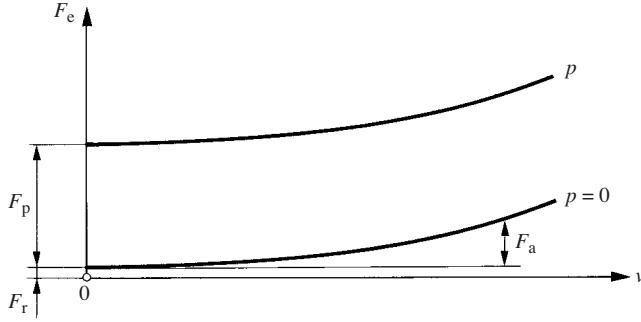


Fig. 20.73 Résistance à l'avancement d'un véhicule en fonction de sa vitesse et de la pente.

explique le plafonnement de la vitesse des avions et des navires pour des raisons économiques et techniques.

## 20.7.2 Caractéristique motrice

### Caractéristique idéale

Le moteur et la transmission entraînent une roue (fig. 20.74) à la vitesse  $\omega_R$  et lui appliquent un couple  $M_R$ . Supposons que la transmission comporte un coupleur hydrodynamique présentant un glissement  $g_H$  et des organes de transmission positifs dont le rapport de transmission est  $i$ . La vitesse du moteur étant  $\omega$ , on a par la définition (20.62) du glissement

$$\omega_R = \frac{\omega}{i} (1 - g_H)$$

La vitesse du véhicule se trouve à partir de (5.34) et de (5.36); avec le glissement au point de contact de la roue  $g_R$ , on a

$$v = R_0 (1 - g_H) (1 - g_R) \frac{\omega}{i} \quad (20.111)$$

Le moteur crée la force motrice

$$F = \frac{\eta_T i M}{r} \quad (20.112)$$

où:

- $\eta_T$  rendement des organes de transmission positifs
- $r$  rayon statique de la roue (fig. 20.74)
- $M$  couple du moteur

La puissance motrice disponible au point de contact de la roue vaut

$$P_C = F v = \eta_T (1 - g_H) \frac{R_0}{r} (1 - g_R) P \quad (20.113)$$

où  $P = \omega M$  est la puissance du moteur.

Le rendement global depuis le moteur jusqu'au point de contact vaut

$$\eta = \frac{P_C}{P} = \eta_T (1 - g_H) \frac{R_0}{r} (1 - g_R) \quad (20.114)$$

Les transmissions hydrodynamiques abaissent un peu le rendement, c'est pourquoi on a développé des dispositifs qui solidarisent leurs arbres ( $g_H = 0$ ) en marche économique sur autoroute. A grande vitesse de véhicules automobiles, on a mesuré un rendement global de l'ordre de 85% avec une transmission mécanique et 83% avec un convertisseur de couple.

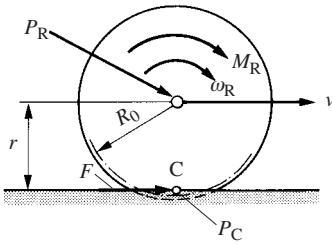


Fig. 20.74 Roue motrice.

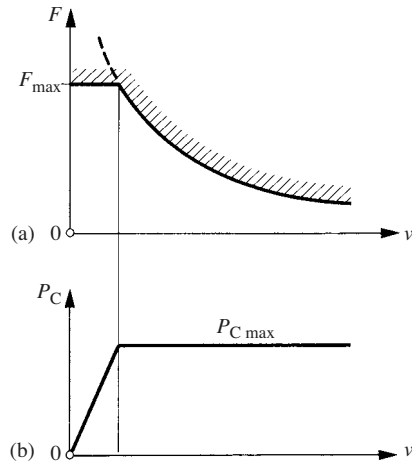


Fig. 20.75 Caractéristiques idéales au point de contact des roues: (a) force motrice; (b) puissance.

Il faudrait pouvoir exploiter la pleine puissance du moteur quelle que soit la vitesse du véhicule. La force motrice idéale

$$F = \frac{P_C}{v} = \frac{\eta P}{v} \quad (20.115)$$

serait représentée par une hyperbole (fig. 20.75) limitée par la force maximale  $F_{\max}$  d'adhérence de la roue. Les formules (20.111) et (20.112) permettent de tracer la caractéristique de la force motrice au point de contact de la roue, ce que les constructeurs de locomotives appellent la caractéristique à la jante. La relation entre le couple  $M$  et la vitesse  $\omega$  est donnée par la caractéristique du moteur.

Le moteur idéal devrait fonctionner à puissance constante pour offrir une caractéristique couple-vitesse hyperbolique. Ceci explique la faveur des moteurs électriques séries dans les engins de levage et pour la traction des chemins de fer. La caractéristique des machines à vapeur à piston est aussi voisine d'une hyperbole.

### Moteurs à piston

La figure 20.76 reproduit l'allure typique des caractéristiques des moteurs à piston, à allumage commandé ou à combustion interne. Le moteur fonctionne mal ou cale au-dessous de la vitesse minimale  $\omega_{\min}$ , la vitesse maximale  $\omega_{\max}$  est limitée par la résistance mécanique des organes et par l'affolement de la distribution.

La caractéristique de couple présente un maximum  $M_{\max}$ . Le couple diminue vers les vitesses élevées du fait des pertes de charge dans la tuyauterie d'air frais et dans l'échappement. La puissance passe par un maximum  $P_{\max}$  pour une vitesse un peu inférieure à la vitesse maximale. Comparées à la figure 20.75, ces caractéristiques, grossièrement à couple constant, conviennent mal aux véhicules.

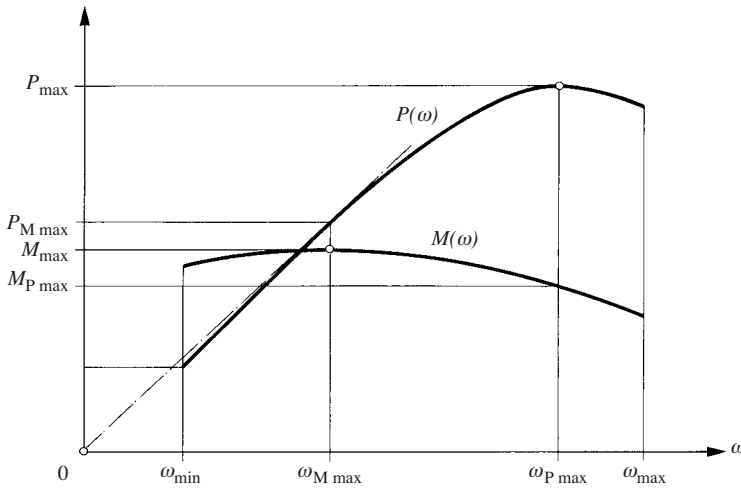


Fig. 20.76 Caractéristiques à plein gaz d'un moteur à piston.

La transmission doit adapter les caractéristiques du moteur aux exigences du véhicule. En augmentant le rapport de transmission, la vitesse du véhicule diminue, formule (20.111), tandis que la force propulsive croît (20.112). En faisant fonctionner le moteur à son régime de puissance maximale, le point  $F = F(v)$  décrit une hyperbole si le rapport de transmission varie en continu.

### 20.7.3 Rapport de transmission

#### Généralités

Étudions maintenant particulièrement le problème des véhicules routiers.

Les boîtes de vitesses donnent pour chaque rapport une autre caractéristique motrice au point de contact (fig. 20.77). On se rapproche d'autant mieux de l'hyperbole idéale et on exploite d'autant mieux la puissance du moteur que le nombre de rapports de transmission est plus grand. On tend aujourd'hui à élargir la gamme des rapports de transmission. D'une part parce qu'une forte accélération au démarrage nécessite de grands rapports, d'autre part parce que les moteurs modernes fonctionnent économiquement vers 2000 t/min seulement, ce qui implique de faibles démultiplications à la vitesse maximale. Il faudrait maintenant 6 à 9 vitesses, ce qui

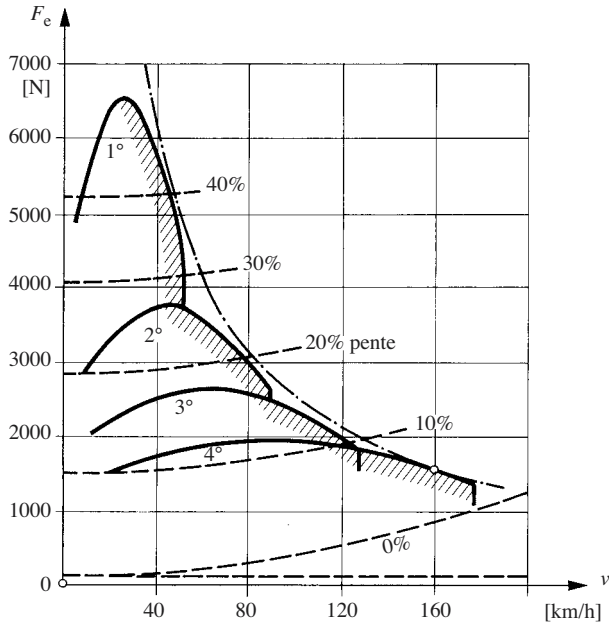


Fig. 20.77 Caractéristiques d'une voiture à 4 vitesses.

est ingérable par le conducteur moyen. Cette évolution pousse au développement de variateurs continus contrôlés électroniquement, mais ces transmissions ne sont pas encore au point pour transmettre la puissance des voitures des classes moyennes et supérieures. Les transmissions hydrostatiques se sont révélées jusqu'ici trop bruyantes et trop coûteuses.

Les véhicules utilitaires dont la masse varie dans de très larges proportions, au gré du chargement, exigent un grand nombre de vitesses, tout comme les machines de chantier et les tracteurs agricoles qui doivent pouvoir fonctionner dans une très large gamme de vitesses et d'efforts. Il existe des tracteurs avec 22 vitesses avant et 6 vitesses arrière.

On se limite à montrer le calcul des rapports de transmission extrêmes :

- le rapport minimal pour circuler à la vitesse maximale;
- le rapport maximal pour franchir la pente la plus forte ou pour obtenir l'accélération maximale.

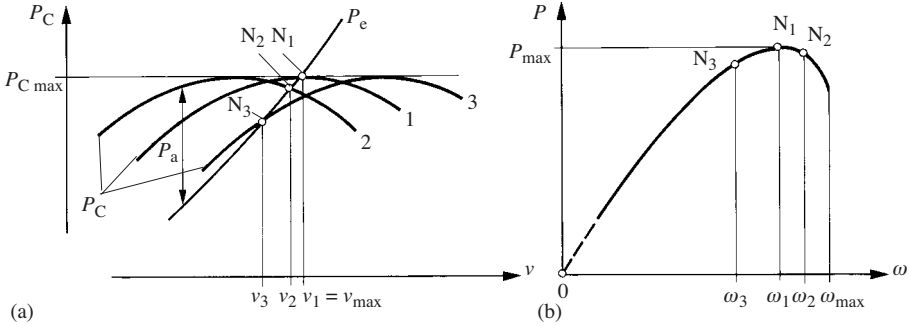
### Vitesse maximale en palier

Le moteur d'un véhicule doit donner toute sa puissance lorsqu'il circule à sa vitesse maximale en palier. Mais on peut se demander où situer le point de fonctionnement sur la caractéristique de puissance du moteur. On distingue trois cas (fig. 20.78) :

- *Courbe 1.* Le moteur fonctionne à sa puissance maximale et la vitesse du véhicule est la plus élevée qu'il puisse atteindre, point de fonctionnement  $N_1$ .
- *Courbe 2.* La vitesse maximale au point de fonctionnement  $N_2$  est obtenue pour une vitesse du moteur  $\omega_2$  supérieure à la vitesse  $\omega_1$  de puissance maximale, mais naturellement inférieure à la vitesse maximale admissible  $\omega_{\max}$ . La vitesse  $v_2$  du véhicule est inférieure à sa vitesse maximale possible.



- *Courbe 3.* Le point de fonctionnement  $N_3$  se trouve à gauche du point à puissance maximale; la vitesse est aussi inférieure.



**Fig. 20.78** Caractéristiques à la puissance maximale: (a) puissance au point de contact; (b) puissance du moteur en fonction de sa vitesse.

On choisit la position de la courbe de puissance sur la base de considérations pratiques. L'excédent de puissance  $P_a = P_C - P_e$  disponible avec la courbe (2) pour accélérer le véhicule ou pour gravir une faible pente est plus grand, mais le moteur tourne plus vite. Cette position de courbe est favorable pour un véhicule à caractère sportif. En revanche, le régime du moteur est plus lent avec la courbe (3), le moteur est ménagé et consomme moins de combustible. Ce point de fonctionnement s'utilise en marche économique à grande vitesse des voitures de tourisme sur autoroute tandis que le rapport immédiatement inférieur sert à franchir de petites pentes ou pour accélérer rapidement à grande vitesse. Il correspond à ce qu'on appelait autrefois une vitesse surmultipliée (overdrive).

Le point de fonctionnement étant choisi, par exemple  $N_3$ , on a la puissance du moteur  $P_3$  et la puissance au point de contact de la roue par (20.113). En égalant cette puissance à celle d'entraînement (20.110), on obtient une équation dont on tire la vitesse  $v_3$  du véhicule. Le rapport de transmission souhaité s'obtient enfin à partir de (20.111)

$$i = \frac{\omega_3 R_0}{v_3} (1 - g_H) (1 - g_R) \quad (20.116)$$

### Vitesse maximale en pente

Traçons la caractéristique de la force motrice  $F(v)$  disponible au point de contact de la roue pour un certain rapport de transmission. On peut raisonner en terme de puissance ou en terme d'effort. Supposons tout d'abord que le véhicule doive franchir le plus rapidement possible une pente  $p_1$  (fig. 20.79). La caractéristique  $F(v)$  de l'effort moteur doit passer par un point de fonctionnement  $N_1$  tel que le moteur fournisse sa puissance maximale. Ce point se trouve à l'intersection de la parabole  $F_{e1}$  avec l'hyperbole de puissance maximale  $P_{C \max}$ . Selon la figure 20.76, le moteur fournit sa puissance maximale pour une vitesse  $\omega_{P \max}$  avec le couple

$$M_{P \max} = \frac{P_{\max}}{\omega_{P \max}}$$

La force motrice obtenue avec ce couple se calcule par (20.112). En l'égalant à l'effort résistant donné par (20.109), on obtient:

$$m g (f + p_1) + C_x A \frac{\rho}{2} v_1^2 = \frac{\eta_T i}{r} M_{P \max} \quad (20.117)$$

Compte tenu du fait que les vitesses  $v_1$  et  $\omega_{P \max}$  sont liées par (20.111), cette équation permet de calculer le rapport de transmission cherché.

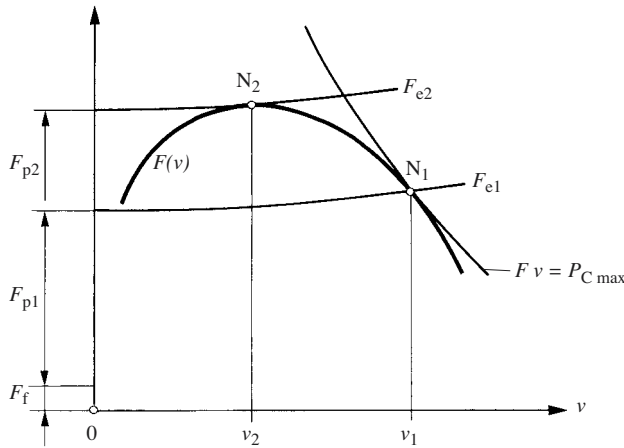


Fig. 20.79 Points de fonctionnement aux pentes maximales.

A petite vitesse, normale en forte montée, on peut négliger la résistance aérodynamique. Par conséquent, le rapport de transmission nécessaire en première vitesse vaut simplement

$$i = \frac{r m g (f + p_1)}{\eta_T M_{P \max}} \quad (20.118)$$

### Pente maximale

Supposons maintenant que le moteur fonctionne au couple maximal  $M_{\max}$ , point  $N_2$ , de la figure 20.79, il permet au véhicule de franchir la pente

$$p_2 = \frac{\eta_T i M_{\max}}{r m g} - f \quad (20.119)$$

En introduisant le rapport de transmission calculé ci-dessus, on obtient

$$p_2 = \frac{M_{\max}}{M_{P \max}} (f + p_1) - f \quad (20.120)$$

On estime qu'un véhicule doit pouvoir franchir la route montagneuse présentant la plus forte pente existante. En Europe, il s'agit du col de la Turacher Höhe, en Autriche, avec une pente de 32%. Les véhicules modernes permettent de gravir des pentes encore plus fortes.

Le rapport de transmission en première vitesse est proportionnel à la masse du véhicule; c'est pourquoi les poids lourds ont de fortes démultiplications. La première vitesse est aussi d'autant plus «courte» que le moteur est moins puissant.

### Accélération maximale

La force accélératrice est la différence entre la force motrice  $F$  et la force résistante  $F_e$ . Elle se lit directement dans le diagramme vitesse-force. L'accélération du véhicule vaut

$$a = \frac{1}{m^*} (F - F_e) \quad (20.121)$$

La masse réduite  $m^*$  au niveau du véhicule tient compte de toutes les masses tournantes, elle est fonction du rapport de transmission; voir la formule (13.83).

Désignons par:

- $J_1^*$  le moment d'inertie de tous les organes situés en amont de la boîte à vitesses réduit à l'arbre du moteur;
- $J_2^*$  le moment d'inertie réduit à l'essieu moteur de tous les organes situés en aval de la boîte à vitesses y compris la masse du véhicule; le calcul s'effectue avec le modèle cinétostatique.

Le rapport de transmission optimal pour obtenir la plus forte accélération se calcule en appliquant (20.78). On trouve:

$$i_{\text{opt}} = (1 - g_H) \sqrt{\frac{J_2^*}{\eta_T (1 - g_H) J_1^*}} \quad (20.122)$$

Cette valeur est généralement supérieure au rapport calculé pour le franchissement de la pente. L'effort au point de contact est limité par l'adhérence des pneus, mais le grand rapport de transmission nécessaire pour accélérer rapidement le véhicule est habituellement exploitable sur route asphaltée sèche.

### Rapports de transmission intermédiaire

Les rapports de transmission intermédiaires peuvent se déterminer en cherchant à accélérer une voiture jusqu'à 100 km/h le plus rapidement possible tout en tenant compte de la coupure d'accélération lors des changements de vitesse. Mais l'étagement résulte surtout du désir de rendre agréable la conduite dans la pratique de la circulation routière.

## 20.8 CONCLUSIONS PRINCIPALES

L'étude de l'entraînement d'une machine a pour but de choisir le genre, le type, la puissance nominale et la vitesse du moteur. Ce choix est lié à celui des caractéristiques principales de la transmission, notamment au rapport de vitesses.

La puissance d'entraînement requise se détermine en partant du récepteur situé au bout de la chaîne cinématique, puis en remontant vers le moteur en ajoutant toutes les pertes dans la transmission.

La puissance nominale d'un moteur est la puissance qu'il peut fournir en régime continu, dans les conditions normales d'emploi, sans subir aucun dommage. Elle dépend étroitement du refroidissement; la puissance nominale des moteurs électriques est définie pour une température ambiante de  $40^{\circ}\text{C}$  et une altitude de 1000 m. Elle diminue au-delà de ces limites.

La puissance nominale d'un moteur doit en principe être égale ou supérieure à la puissance d'entraînement. Mais un moteur électrique est surchargeable en cas de marche à régime variable (service temporaire, service intermittent) tant que ses éléments critiques ne dépassent pas leur température admissible. Dans ces cas, il est avantageux de choisir un moteur dont la puissance nominale est plus petite.

Une durée de démarrage courte ou un espace de démarrage limité conditionnent aussi la puissance requise du moteur. Ce critère est parfois déterminant par rapport au critère de la puissance d'entraînement, spécialement pour l'entraînement de récepteurs doués d'une grosse inertie et nécessitant peu de puissance en régime permanent.

Lors de démarrages répétés se succédant rapidement, on vérifie que l'échauffement du moteur ne dépasse pas la limite admissible. Ce problème est analogue à celui rencontré avec les embrayages et les coupleurs.

En cas d'efforts d'entraînement très fortement variables, on associe avantageusement le moteur à un volant afin de régulariser la vitesse et d'étaler la fourniture d'énergie du moteur dans le temps. Un volant est d'autant plus efficace que la caractéristique de couple du moteur est moins rigide; il existe des moteurs spéciaux à fort glissement pour cet usage.

Lorsqu'une machine est entraînée par plusieurs moteurs en tandem, il importe qu'ils aient tous la même caractéristique de couple afin de répartir également la puissance entre eux.

La vitesse du moteur devrait en principe être égale à la vitesse requise par la machine. Mais, lorsqu'il faut intercaler un réducteur, on choisit la vitesse du moteur de telle manière que le coût total du moteur et du réducteur soit minimal.

Un réducteur est indispensable avec les moteurs électriques ou à piston s'il faut fournir un gros effort à faible vitesse.

On varie à volonté la vitesse du récepteur, soit en jouant sur la vitesse du moteur, soit en intercalant un variateur mécanique ou hydrostatique. Le démarrage progressif d'un récepteur à forte inertie s'opère avantageusement par un coupleur. Les coupleurs glissent toujours un peu, dissipent de l'énergie et chauffent; les coupleurs centrifuges à frictions et les coupleurs synchrones font exception. Les coupleurs se comportent comme des organes non positifs, ils font aussi office de limiteur de couple.

La construction des mécanismes de positionnement et des robots est dominée par le souci d'effectuer les mouvements dans le temps le plus bref. Ce résultat est atteint en ralentissant immédiatement le mouvement après le démarrage (marche en triangle)

et en visant des accélérations et décélérations élevées. Si la vitesse maximale est supérieure à la vitesse praticable, il convient d'intercaler une période de mouvement permanent (marche en trapèze). Pour un moteur donné, la plus forte accélération est obtenue avec une transmission dont le rapport de vitesse est tel que l'inertie du mécanisme réduite à l'arbre du moteur est égale au moment d'inertie du moteur (vrai seulement pour un couple d'entraînement statique nul). Il faut en plus :

- diminuer le plus possible l'inertie du mécanisme;
- utiliser des moteurs de commande spéciaux à faible inertie appelés moteur-couple ou moteur d'asservissement.

La durée du mouvement au voisinage de l'adaptation optimale n'est pas très sensible au rapport de transmission. Il est préférable de choisir un rapport de vitesses un peu supérieur au rapport optimal afin de tenir compte du couple statique d'entraînement. L'utilisation de moteurs hydrauliques peut réduire de  $2/3$  la durée du démarrage par rapport à un moteur électrique.

Le choix d'un moteur de positionnement s'opère avantageusement à l'aide de la notion de «power rate».

## CHAPITRE 21

# STABILITÉ

### 21.1 INTRODUCTION

Un système est en *équilibre stable* s'il revient à son état d'équilibre après en avoir été temporairement écarté par une quelconque perturbation. Il faut pour cela qu'un phénomène stabilisateur s'oppose à la perturbation pour ramener le système vers son état d'équilibre. Exemple classique, le poids d'un pendule écarté de sa position verticale donne lieu à une force de rappel vers l'état d'équilibre. En revanche, un système est *instable* s'il ne revient pas à son état d'équilibre après en avoir été temporairement écarté, et qu'il tend, au contraire, à s'en écarter encore plus.

L'étude de la stabilité des systèmes s'est beaucoup développée pour les besoins du réglage automatique. Du point de vue mathématique, un système linéaire est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert ont leur partie réelle négative.

Les instabilités sont souvent dangereuses, comme le flambage, mais elles sont parfois mises à profit pour obtenir certains effets intéressants. Ce chapitre a uniquement pour but d'attirer l'attention du concepteur sur des phénomènes importants; les démonstrations se trouvent dans la littérature. Il est structuré comme suit:

- Section 21.2    Instabilités de position.
- Section 21.3    Instabilités de forme, flambage et voilement.
- Section 21.4    Instabilités thermiques.
- Section 21.5    Auto-excitation de vibrations.
- Section 21.6    Conclusions principales.

### 21.2 INSTABILITÉ DE POSITION

La position des mécanismes est généralement stable ou indifférente. Mais il existe des cas où un système peut passer subitement d'un état d'équilibre stable dans un autre état d'équilibre stable; on dit qu'il est *bistable*. Voici quelques exemples d'application.

Une manette est tirée par un ressort dans l'une ou l'autre de ses positions extrêmes (fig. 21.1). Dans un interrupteur à bascule (fig. 21.2), le contact est maintenu par un ressort jusqu'à ce que la manette passe la position centrale, puis le ressort culbute brusquement le contact dans l'autre position.

Les soupapes de sûreté s'ouvrent progressivement sous l'effet de la pression qui agit sur l'obturateur. Si le fluide est un gaz ou une vapeur, on obtient immédiatement une ouverture complète en disposant un disque sur la tige de la soupape (fig. 21.3); la vapeur qui s'échappe agit dynamiquement sur le disque et ouvre brusquement complètement la soupape.

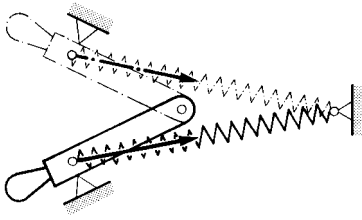


Fig. 21.1 Manette bistable.

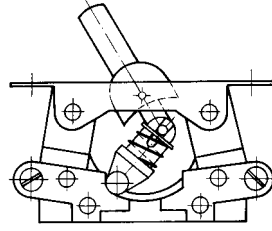


Fig. 21.2 Interrupteur à bascule.

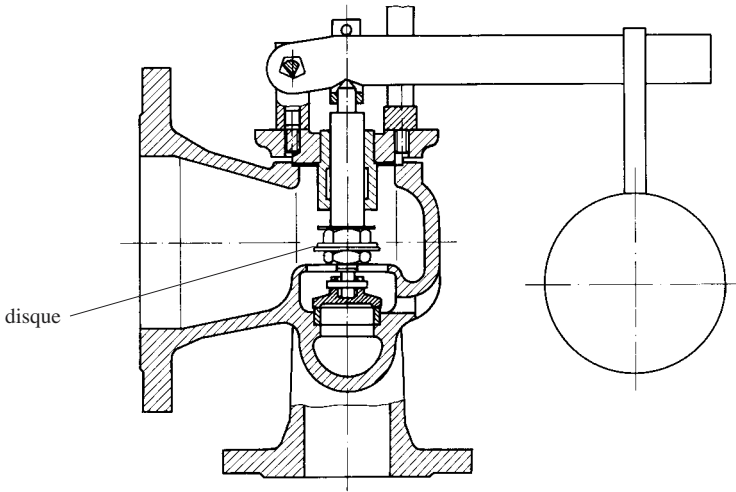


Fig. 21.3 Soupape de sûreté à grand débit et à contrepoids.

Les turbines à vapeur sont toujours équipées d'un dispositif de protection contre les survitesses (fig. 21.4) consistant en un doigt (1) logé dans l'arbre (3). Le centre de gravité du doigt se trouve initialement à la distance  $e$  de l'axe de rotation. La force centrifuge  $me\omega^2$  s'oppose à la précontrainte  $F_0$  d'un ressort (2); ces forces sont égales pour la vitesse limite

$$\omega_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{F_0}{me}}$$

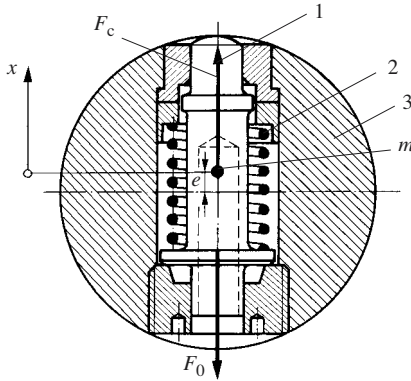
Au-delà de cette vitesse, le doigt glisse radialement d'une quantité  $x$  en comprimant le ressort dont la rigidité est  $k$ . Le doigt est soumis aux forces suivantes:

- la force centrifuge  $F_c = m(e + x)\omega^2$
- la force du ressort  $F_R = F_0 + kx$

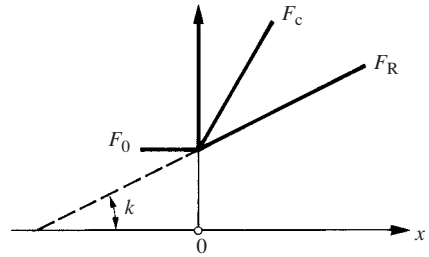
On s'arrange pour que le mécanisme soit instable afin que le doigt sorte brusquement de l'arbre et vienne heurter au passage une pièce qui commande la fermeture d'urgence de l'arrivée de vapeur. Il suffit pour cela que la force centrifuge croisse plus vite que la force de rappel du ressort (fig. 21.5), c'est-à-dire que

$$\frac{dF_c}{dx} > \frac{dF_R}{dx} = k \quad (21.1)$$

à la vitesse limite de déclenchement. Cette condition est satisfaite pour  $m\omega_{\text{lim}}^2 > k$ . Le seuil de déclenchement se règle par la tension initiale du ressort.

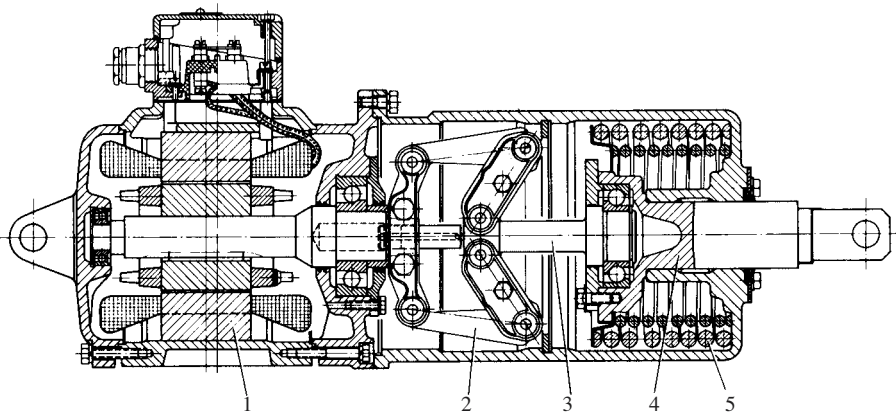


**Fig. 21.4** Doigt de déclenchement centrifuge en cas de survitesse.



**Fig. 21.5** Caractéristiques de force du dispositif de la figure 21.4.

Le même principe est appliqué dans la construction de vérins électrodynamiques utilisés pour desserrer des freins d'engins de levage (fig. 21.6). Un moteur électrique (1) met en rotation des masselottes (2) qui s'écartent en poussant sur l'axe (3). Ce dernier est guidé par un roulement à billes qui transmet la poussée à la tige de commande (4) et comprime les ressorts (5) chargés de ramener les organes dans la position de repos à l'arrêt du moteur.



**Fig. 21.6** Vérin à commande centrifuge.

Un coupleur synchrone transmet normalement un couple sans glissement entre les deux arbres. Le glissement débute brusquement lorsque le couple résistant atteint ou dépasse la valeur  $M_{E \text{ max}}$  (fig. 20.41). La transmission est instable parce que le



couple transmis diminue lorsque le glissement augmente; par conséquent l'arbre secondaire s'arrête tant que le couple résistant est supérieur au couple transmis par le coupleur.

## 21.3 INSTABILITÉ DE FORME

### 21.3.1 Généralités

On observe que des pièces sollicitées en compression par des charges croissantes peuvent brusquement changer de forme. Ce changement intervient pour une certaine valeur de la charge, dite **charge critique**, à laquelle correspond une **contrainte critique** dans le matériau. Considérons, par exemple, une poutre droite comprimée. On distingue deux sortes de changement de forme :

- le **flambage** est un changement brutal de la forme de la fibre neutre de la poutre; initialement rectiligne, celle-ci se courbe et s'effondre sur elle-même sans que la section de la poutre change de forme (sous réserve des parties fortement pliées) (fig. 21.7);
- le **voilement** est un changement brutal de la forme des sections sans que la forme de la fibre neutre ne soit affectée (fig. 21.8).

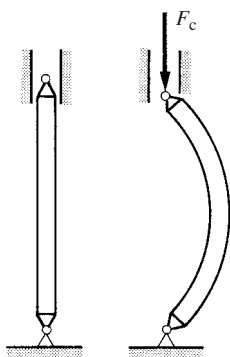


Fig. 21.7 Flambage.

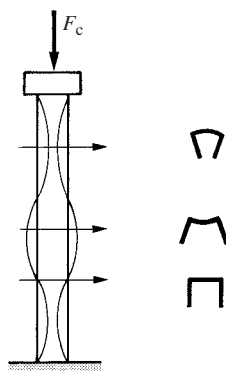


Fig. 21.8 Voilement d'un fer en U.

Toutes les structures minces et longues (poutres droites ou en arc de cercle, plaques, coques) sont susceptibles de flamber ou de voiler. On se limite ici à quelques cas simples, mais démonstratifs. Si le flambage conduit très souvent à la ruine de l'ouvrage, le voilement permet parfois une brève poursuite de l'exploitation. On a vu des sous-marins revenir à la surface avec une coque voilée localement, des avions atterrir avec le revêtement de la carlingue complètement plissé.

### 21.3.2 Poutres droites

#### Flambage

On sait qu'une poutre droite comprimée flambe pour une charge critique donnée par la formule d'Euler :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2} \quad (21.2)$$

où  $I$  est le moment quadratique de surface le plus petit de la section de la poutre. La longueur de flambage  $\ell_0$  dépend des liaisons de la poutre ; elle est donnée par la figure 21.9.

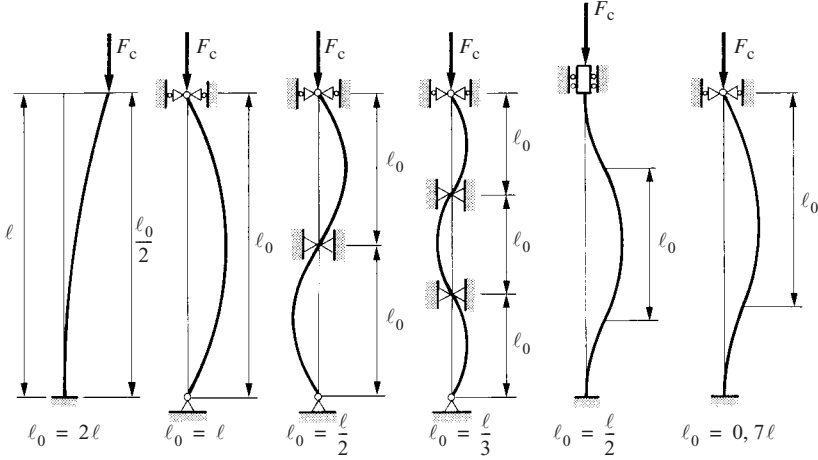


Fig. 21.9 Longueur de flambage de poutres droites.

La contrainte critique de flambage vaut

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A} = \frac{\pi^2 E i^2}{\ell_0^2} \quad (21.3)$$

où

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (21.4)$$

est le **rayon de giration** minimal de la section de la poutre. On appelle **élancement** de la poutre le rapport

$$\lambda = \frac{\ell_0}{i} \quad (21.5)$$

Alors

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (21.6)$$

C'est une fonction hyperbolique de l'élancement (fig. 21.10) valable seulement dans le domaine de proportionnalité du matériau. La valeur de l'élancement à

laquelle la contrainte critique est égale à la limite de proportionnalité du matériau vaut

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{R_p}} \quad (21.7)$$

Ainsi, le diagramme est partagé en deux domaines :

- $\lambda \geq \lambda_p$ ,  $\sigma \leq R_p$ , domaine du *flambage élastique*;
- $\lambda < \lambda_p$ ,  $\sigma > R_p$ , domaine du *flambage plastique*.

Dans le domaine plastique, l'incurvation de la poutre décharge le matériau situé du côté convexe et augmente la contrainte du côté concave. Du fait de la plastification croissante, le module d'élasticité tangent diminue et la partie fortement comprimée participe relativement moins à un nouvel accroissement de la charge. La contrainte critique décrit alors la branche A-B en fonction de l'élancement, elle dépend de la forme de la section de la poutre et de l'allure de la relation  $\varepsilon - \sigma$  du matériau. Plusieurs théories ont été proposées pour calculer la courbe en question, notamment par Engesser-Karmann et par Tetmayer.

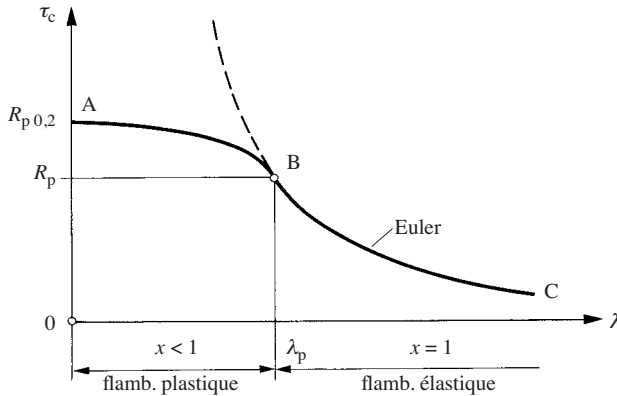


Fig. 21.10 Contrainte critique en fonction de l'élancement.

On peut calculer la contrainte de flambage par une formule unique, à condition de remplacer le module d'élasticité par une valeur réduite :

$$E' = \chi E \quad (21.8)$$

où  $\chi$  est un facteur qui tient compte de la plasticité du matériau.  $\chi = 1$  dans le domaine du flambage élastique,  $\chi < 1$  dans celui du flambage plastique; il dépend du matériau, de la forme de la section et de l'élancement. La charge critique s'écrit alors :

$$F_c = \frac{\pi^2 \chi EI}{\ell_0^2} \quad (21.9)$$

Exprimons la contrainte critique de manière à faire apparaître clairement les données de dimensionnement d'une poutre au flambage, c'est-à-dire la charge critique et la longueur de flambage. Opérons le changement d'écriture suivant :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A} = \frac{\ell_0 \sqrt{F_c}}{A} \frac{\sqrt{F_c}}{\ell_0}$$

Introduisons une fois  $F_c$  par l'expression (21.9); on a :

$$\sigma_c = \frac{\pi \sqrt{I}}{A} \sqrt{\chi E} \frac{\sqrt{F_c}}{\ell_0} \quad (21.10)$$

La première fraction ne dépend que de la forme de la section de la poutre, elle vaut par exemple :

- $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,8862$  pour un cercle (barre ronde);
- $0,6267 \sqrt{\frac{D}{e}}$  pour un anneau mince de diamètre extérieur  $D$  et d'épaisseur  $e$  (tube circulaire).

$\sqrt{F_c} / \ell_0$  est le véritable paramètre de base du flambage. On trouve des courbes donnant  $\sigma_c$  en fonction de ce paramètre pour divers matériaux et pour divers profils.

Dimensionner une poutre au flambage consiste à chercher sa section en fonction de la charge critique  $F_c$  souhaitée et de la longueur de flambage  $\ell_0$ . Le profil de la poutre et le matériau étant choisis; la courbe donne la contrainte critique qui fournit ensuite l'aire de la section nécessaire :

$$A \geq \frac{F_c}{\sigma_c} \quad (21.11)$$

### 21.3.3 Voilement d'un tube comprimé

Un tube à paroi très mince soumis à une charge axiale est susceptible de voiler sans flamber. Il se forme une série de bosses alternativement convexes et concaves et des plissements. Ce problème est étudié en détail dans l'ouvrage de Flügge [21.1] et résumé par Timoshenko [21.2]. Pour des tubes plus longs que leur diamètre extérieur  $D$ , la contrainte critique de voilement est donnée par la formule :

$$\sigma_c = \frac{2E}{\sqrt{3(1 - \mu^2)}} \frac{e}{D} \quad (21.12)$$

Il convient de procéder à un calcul plus détaillé lorsque le cylindre est plus court que son diamètre.

Cependant, afin de tenir compte des imperfections géométriques qui provoquent le voilement déjà pour une contrainte inférieure, on calcule en pratique seulement avec

la moitié de cette valeur théorique. Lorsque la contrainte excède la limite de proportionnalité, il faut encore faire intervenir le facteur de plasticité  $\chi$ , de sorte que

$$\sigma_c = \frac{\chi E}{\sqrt{3(1 - \mu^2)}} \frac{e}{D} \quad (21.13)$$

La charge critique

$$F_c \approx \pi e D \sigma_c = \frac{\pi}{\sqrt{3(1 - \mu^2)}} \chi E e^2 \quad (21.14)$$

est proportionnelle au carré de l'épaisseur du tube, mais indépendante du diamètre et de la longueur.

Un tube sollicité en flexion présente un danger de voilement analogue.

### Tube comprimé optimal

Un tube est le profil le plus efficace car sa masse est plus petite que celle de tout autre profil pour la même charge de flambage. La formule (21.11) donne la section nécessaire d'un tube, mais on ne peut pas le faire aussi fin qu'on veut puisque la minceur de la paroi est limitée par le voilement. Le tube optimal est celui qui flambe ou voile pour la même charge axiale.

Egalons (21.10) à (21.13); pour un tube à paroi mince avec le coefficient de Poisson  $\mu = 0,3$ , il vient:

$$0,6267 \left( \frac{D}{e} \right)^{1/2} (\chi E)^{1/2} \frac{\sqrt{F_c}}{\ell_0} = 0,605 \chi E \frac{e}{D}$$

Cette équation fournit l'épaisseur relative  $(e/D)_{\text{opt}}$  que l'on peut ensuite introduire dans l'une ou l'autre des expressions (21.10) ou (21.13) pour trouver la contrainte de compression optimale:

$$\sigma_{c \text{ opt}} = 0,619 (\chi E)^{2/3} \left( \frac{\sqrt{F_c}}{\ell_0} \right)^{2/3} \quad (21.15)$$

Cette contrainte est donnée par des diagrammes en fonction de  $\sqrt{F_c} / \ell_0$  pour divers matériaux en tenant compte du facteur de plasticité ( $\chi = 1$  dans le domaine du flambage élastique).

Avec les relations

$$\frac{e}{D} = \left( \frac{e}{D} \right)_{\text{opt}}$$

et

$$\sigma \approx \frac{F_c}{\pi e D} = \sigma_{c \text{ opt}}$$

on trouve les dimensions de la section cherchée. Le diamètre vaut :

$$D_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{F_c}{\pi (e/D)_{\text{opt}} \sigma_{c \text{ opt}}}} \quad (21.16)$$

et l'épaisseur :

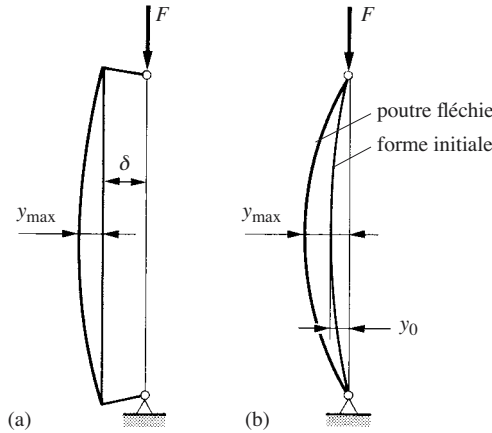
$$e_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{(e/D)_{\text{opt}} F_c}{\pi \sigma_{c \text{ opt}}}} \quad (21.17)$$

### 21.3.4 Poutre comprimée courbe ou sous charge excentrée

La force qui comprime une poutre est souvent décentrée d'une quantité  $\delta$  par rapport à la fibre neutre (fig. 21.11a). On trouve dans les ouvrages classiques de résistance des matériaux que la flèche maximale, au milieu de la poutre, vaut alors

$$\frac{y_{\text{max}}}{\delta} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_c}}\right)} - 1 \quad (21.18)$$

où  $F/F_c$  est le rapport de la force effective à la charge critique de flambage.



**Fig. 21.11** Poutre comprimée: (a) charge excentrée; (b) poutre avec une flèche initiale.

Des défauts de fabrication donnent toujours aux poutres une certaine flèche initiale  $y_0$  (fig. 21.11b). La flèche croît avec la charge appliquée selon

$$\frac{y_{\max}}{y_0} = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_c}} \quad (21.19)$$

Dans le cas idéal, la poutre reste droite puis s'effondre brusquement lorsque la charge critique est atteinte (fig. 21.12). En réalité, la déformation croît progressivement avec la charge. Les formules (21.18) et (21.19) permettent de dimensionner une poutre si la flèche maximale est limitée par des considérations constructives. C'est aussi pour anticiper ces déformations initiales que l'on prend habituellement une très forte marge de sécurité pour choisir la charge critique de dimensionnement.

### 21.3.5 Flambage sous charge pulsée

Les bielles soumises à des compressions pulsées sont susceptibles d'entrer en résonance paramétrique et de vibrer latéralement assez fortement pour flamber dynamiquement. Ce problème est étudié en détail par Klotter [21.3]. Admettons que la force de compression résulte de la superposition d'une force alternée  $F_a$  à une charge constante  $F_m$ , soit

$$F = F_m + \hat{F}_a \cos \Omega t \quad (21.20)$$

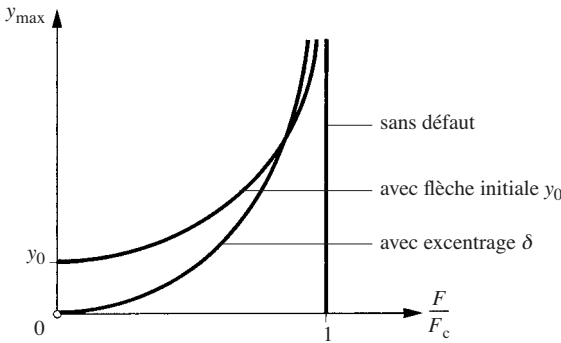


Fig. 21.12 Flèche d'une poutre comprimée.

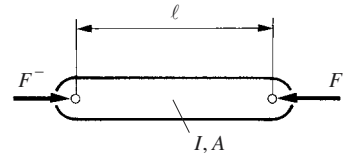


Fig. 21.13 Barre comprimée.

La bielle (fig. 21.13) est une poutre à masse uniformément répartie. Sa première pulsation propre est donnée par

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (13.7)$$

avec :

- $E$  module d'élasticité du matériau
- $\rho$  masse volumique du matériau
- $I$  moment quadratique de surface le plus petit de la section
- $A$  aire de la section
- $\ell$  distance entre les articulations

Le flambage élastique statique survient pour une charge critique  $F_c$  calculée par (21.2) avec  $\ell_0 = \ell$ . L'analyse de la vibration latérale de la bielle conduit à une équation de Mathieu du type (17.116) avec les paramètres :

$$\delta = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \left( 1 - \frac{F_m}{F_c} \right)$$

et

$$\gamma = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \frac{\hat{F}_a}{F_c}$$

Supposons que le domaine de stabilité soit délimité par deux droites parce que la valeur de  $\gamma$  est petite (fig. 17.44). Par (17.118), leurs équations s'écrivent

$$\frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \left( 1 - \frac{F_m}{F_c} \right) = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \frac{\hat{F}_a}{F_c}$$

La bielle ne flambe pas tant que

$$\frac{F_m}{F_c} \leq 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\hat{F}_a}{F_c} \quad (21.21)$$

en ayant choisi le signe du dernier terme qui donne la force moyenne de flambage la plus petite. Cette fonction est représentée à la figure 21.14; on voit que le flambage dynamique se produit pour une charge nettement plus basse que la charge critique statique, même lorsque la variation de la charge est petite, lorsque la pulsation excitatrice dépasse  $\omega_1$  (régime surcritique). Il convient de tenir compte de ce phénomène dans le dimensionnement des bielles auxquelles on donnera une pulsation propre de flexion relativement élevée (§ 25.4.3).

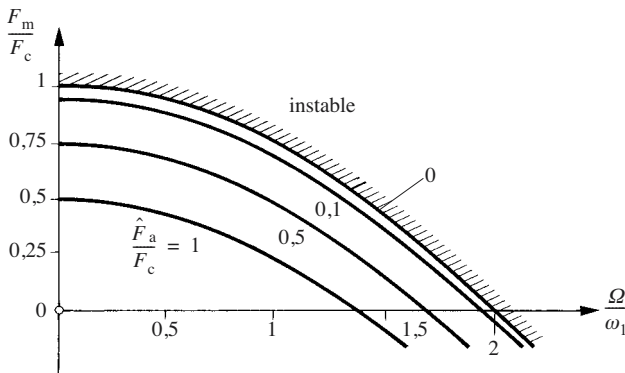


Fig. 21.14 Flambage dynamique.



### 21.3.6 Tube en torsion

Une barre cylindrique ou un tube soumis à un moment de torsion peut flamber latéralement pour un couple critique donné par :

$$M_{tc} = 2\pi \frac{EI}{\ell} \quad (21.22)$$

ou, pour la contrainte de torsion critique :

$$\tau_{tc} = \frac{M_{tc}}{I} \frac{D}{2} = \pi E \frac{D}{\ell} \quad (21.23)$$

On se rend compte que ce mode de flambage n'est possible qu'avec des fils très fins et n'est absolument pas à craindre avec les arbres de machine. En revanche, le voilement de tubes à paroi mince en torsion survient pour [21.4] :

$$\tau_{tc} = 1,256 E \frac{(e/D)^{5/4}}{(\ell/D)^{1/2}} \quad (21.24)$$

Il convient de multiplier en pratique cette valeur par 0,7 pour tenir compte des inévitables imperfections géométriques des tubes réels.

Ce phénomène limite l'amincissement des arbres creux effectué en vue d'en diminuer la masse.

### Application numérique

Considérons l'arbre creux d'une transmission à cardans. Par exemple,  $\ell = 2000$  mm,  $D = 100$  mm,  $E = 200\,000$  N/mm<sup>2</sup>,  $\tau_t = 55$  N/mm<sup>2</sup> et  $\tau_{tc} = 155$  N/mm<sup>2</sup> avec une sécurité de 3. On évite le voilement si le tube est plus épais que 0,9 mm.

### 21.3.7 Flambage des ressorts hélicoïdaux

Un ressort hélicoïdal comprimé (fig. 21.15) est susceptible de flamber au même titre qu'une poutre. La déformation critique de flambage d'un ressort cylindrique en fil rond en acier est donnée par [21.5] :

$$f_c = 0,8144 \ell_0 \left[ 1 - \sqrt{1 - 6,84 \left( \frac{D}{\nu \ell_0} \right)^2} \right] \quad (21.25)$$

avec :

- $\ell_0$  longueur du ressort détendu
- $D$  diamètre moyen du ressort
- $\nu$  facteur tenant compte des appuis (fig. 21.16)

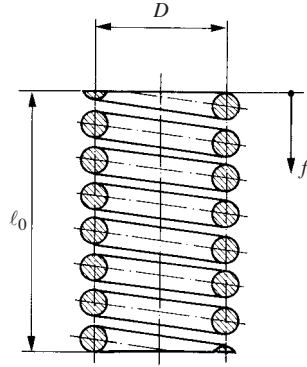


Fig. 21.15 Ressort hélicoïdal.

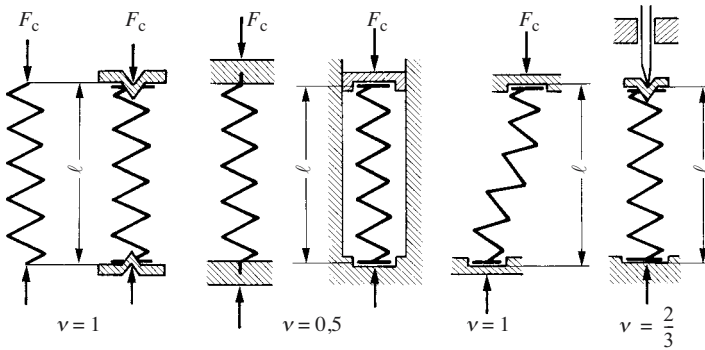


Fig. 21.16 Facteur d'appuis de ressorts.

La charge critique de flambage est

$$F_c = k f_c \quad (21.26)$$

où  $k$  est la rigidité du ressort. La longueur du ressort lorsque la charge critique est atteinte vaut

$$l = l_0 - f_c \quad (21.27)$$

On limite le flambage en guidant le ressort radialement, dans un tube ou autour d'une tige centrale, mais le frottement perturbe alors son fonctionnement normal.

## 21.4 INSTABILITÉS THERMIQUES

### 21.4.1 Butées et paliers hydrodynamiques

Dans le domaine de fonctionnement hydrodynamique des paliers lisses et des butées planes, le coefficient de frottement apparent peut s'écrire sous la forme :

$$\mu' = a \left( \frac{\eta \omega}{F} \right)^n \quad (21.28)$$

avec :

- $\eta$  viscosité dynamique du lubrifiant
- $\omega$  vitesse de l'arbre
- $F$  charge radiale sur le palier ou axiale sur la butée
- $n = 0,5$  pour les butées
- $n = 0,5$  à 1 pour les paliers, les valeurs supérieures sont valables pour des nombres de Sommerfeld inférieurs à l'unité
- $a$  coefficient fonction du jeu relatif et des dimensions du palier

L'échauffement du palier est proportionnel à la puissance dissipée; avec la résistance thermique  $R_T$  entre le coussinet et l'air ambiant de refroidissement, on a l'échauffement :

$$\Delta T = R_T P_p = R_T \frac{d}{2} \mu' F \omega = a R_T \frac{d}{2} \eta^n F^{1-n} \omega^{1+n} \quad (21.29)$$

où  $d$  est le diamètre de l'arbre d'un palier radial ou le diamètre moyen des patins d'une butée.

Parmi toutes les formules permettant d'exprimer la viscosité de l'huile en fonction de sa température [21.6], celle de Vogel donne, par exemple pour de l'huile SAE 30 :

$$\eta = 1,981 \times 10^{-4} e^{\frac{1}{0,122 + 0,001356 (T_a + \Delta T)}}$$

Introduisons cette valeur dans l'expression de l'échauffement, puis regroupons les constantes numériques et les paramètres caractéristiques du palier dans un coefficient  $C$ . On trouve

$$\frac{\Delta T}{\exp \left[ \frac{n}{0,122 + 0,001356 (T_a + \Delta T)} \right]} = C F^{1-n} \omega^{1+n} \quad (21.30)$$

La représentation du second membre de cette équation (fig. 21.17) montre que l'échauffement augmente avec le produit  $(F^{1-n} \omega^{1+n})$ ; il est particulièrement sensible à la vitesse.

Le raisonnement suivant repose sur les particularités de la lubrification hydrodynamique des paliers présentées au paragraphe 2.4.2. Supposons que la charge sur le palier augmente, la température s'accroît et la viscosité de l'huile baisse. Alors le coefficient de frottement et l'épaisseur minimale  $h_0$  du film lubrifiant diminuent (fig. 21.18). Parvenu dans la zone de transition, l'arbre touche le coussinet, le coefficient de frottement et la température montent alors très vite, la viscosité de l'huile

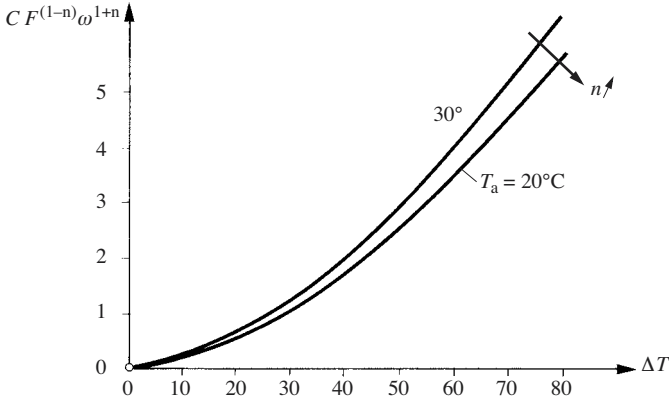


Fig. 21.17 Représentation de l'équation (21.30).

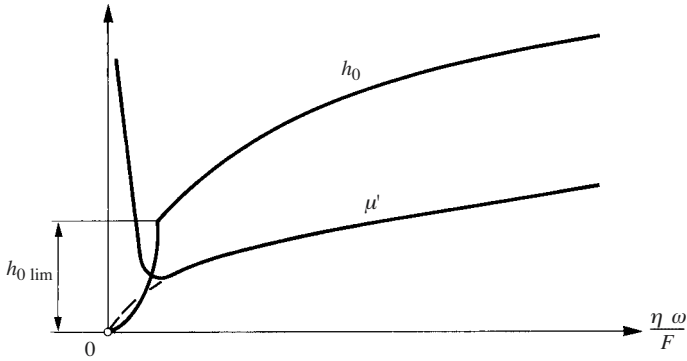


Fig. 21.18 Coefficient de frottement et épaisseur minimale du film d'huile d'un palier hydrodynamique.

tombe encore puis le film porteur s'effondre complètement. On est en présence d'une instabilité thermique avec danger de grippage.

#### 21.4.2 Roulements préchargés

Etudions le comportement thermique d'un palier à roulements préchargés par le serrage d'un écrou comme celui qui est représenté à la figure 21.19. En ne considérant qu'un seul roulement pour présenter le principe du phénomène, la boucle de pré-contrainte se compose du roulement en série avec des éléments dont la rigidité résultante vaut  $k$  (fig. 21.20).

La déformation au contact bille-bague est proportionnelle à  $F^{2/3}$  (§ 6.4.3). On peut écrire, pour le roulement :

$$f_R = c F^{2/3} \quad (21.31)$$

où le coefficient  $c$  contient le nombre de billes, l'angle de contact et d'autres grandeurs géométriques. Cette déformation s'ajoute à celle des autres éléments élastiques de la boucle précontrainte.

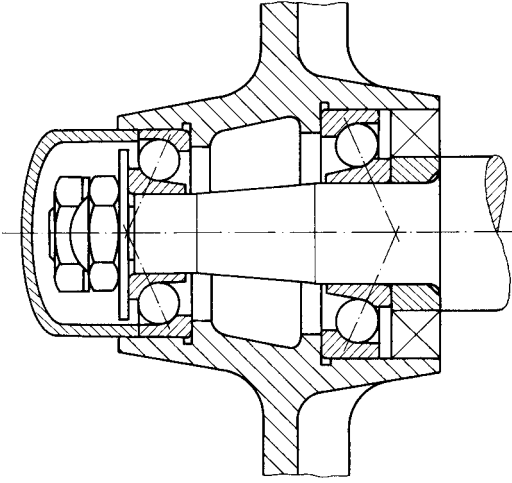


Fig. 21.19 Palier avec roulements précontraints.

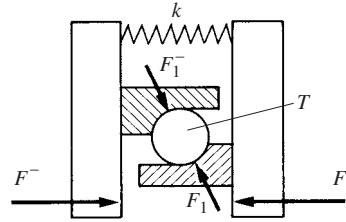


Fig. 21.20 Schéma statique d'un roulement précontraint.

Le système subit une précontrainte géométrique  $f_0$  ; en outre, l'échauffement  $\Delta T$  du roulement provoque la dilatation thermique

$$f_{0T} = \alpha d_R \Delta T \quad (21.32)$$

où :

$\alpha$  coefficient de dilatation thermique de l'acier

$d_R$  longueur équivalente calculée à partir du diamètre des billes et de l'angle de contact

La relation géométrique de précontrainte exprimée par l'équation (7.7) s'écrit finalement :

$$c F^{2/3} + \frac{1}{k} F = f_0 + \alpha d_R \Delta T \quad (21.33)$$

Cette équation fournit la charge axiale du roulement en fonction de son échauffement.

Par ailleurs, le couple de frottement du roulement se compose d'un couple  $M_0$  provenant du frottement des billes dans leur cage auquel s'ajoute la perte par malaxage des graisses ou la perte hydrodynamique dans l'huile et d'un couple de frottement proportionnel à la charge transmise. On peut écrire :

$$M_f = M_0(\omega) + \mu \frac{d}{2} F \quad (21.34)$$

Le premier terme augmente légèrement avec la vitesse.

La puissance dissipée en chaleur vaut

$$P_p = M_f \omega = \left[ M_0(\omega) + \mu \frac{d}{2} F(\Delta T) \right] \omega \quad (21.35)$$

On suppose maintenant que  $M_0$  est constant et que les pièces sont très rigides par rapport au roulement ( $k = \infty$ ). On tire la force de l'équation (21.33) et on l'introduit dans l'expression de la perte, il vient:

$$P_p = M_0 \omega + \mu \frac{d}{2} \left[ \frac{1}{c} (f_0 + \alpha d_R \Delta T) \right]^{3/2} \omega \quad (21.36)$$

On voit que la puissance dissipée et donc la production de chaleur augmentent avec l'échauffement parce que la dilatation des billes et de la bague intérieure accroît la charge de précontrainte; elle augmente aussi avec la précontrainte initiale.

La chaleur évacuée du système peut s'écrire sous la forme (§ 19.4.2):

$$\dot{Q} = \frac{h A}{\xi} \Delta T \quad (21.37)$$

avec:

- $h$  coefficient de transmission de chaleur à l'air
- $A$  aire équivalente de refroidissement
- $\xi$  facteur d'échauffement intérieur

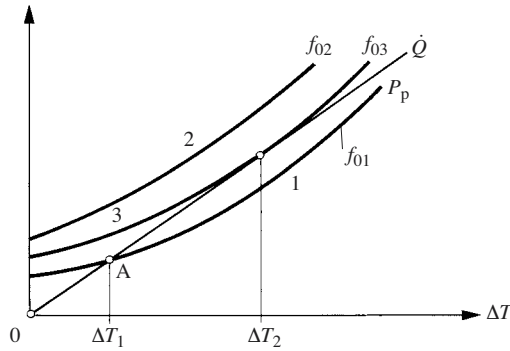
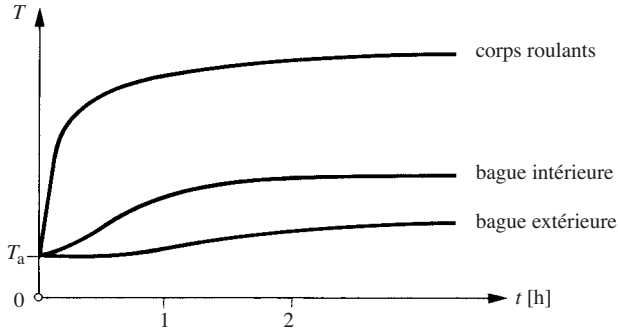


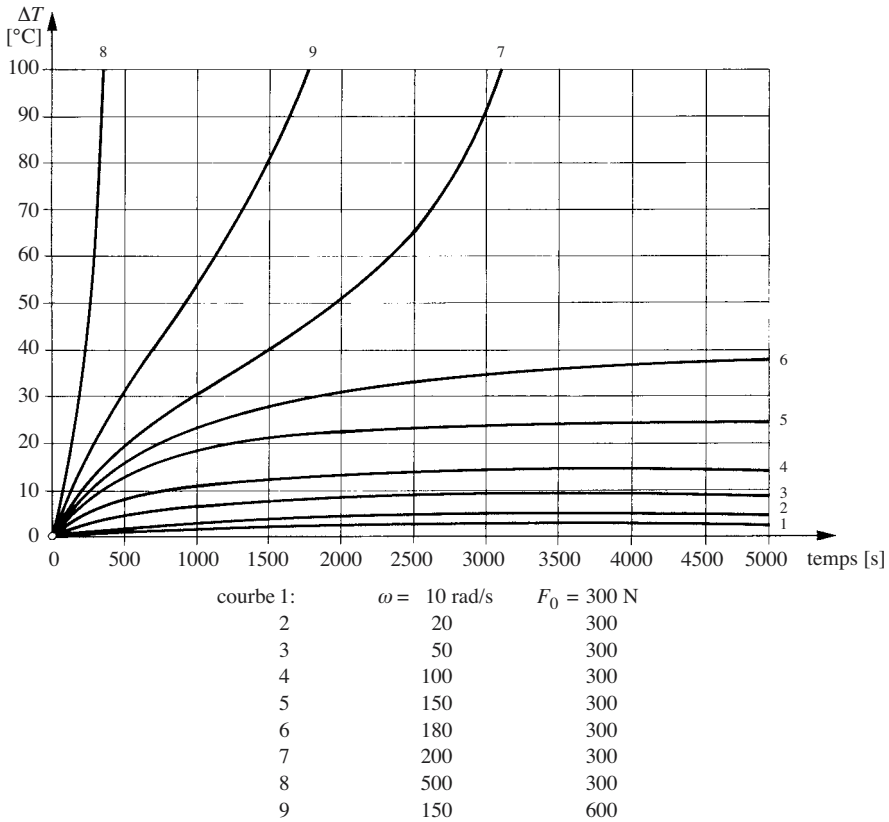
Fig. 21.21 Echauffement d'équilibre et précontrainte.

Représentons la puissance évacuée et la production de chaleur en fonction de l'échauffement (fig. 21.21). Avec une certaine précontrainte  $f_{01}$ , la courbe (1) de  $P_p$  coupe la droite de refroidissement en un point A où l'échauffement  $\Delta T_1$  est stable. Augmentons maintenant la précontrainte à une valeur  $f_{02}$ , la courbe (2) est partout au-dessus de la droite de refroidissement; cela signifie que le système thermique est déséquilibré et que l'échauffement tend vers l'infini. On constate qu'il y a instabilité thermique avec le cercle vicieux suivant: échauffement, accroissement de la précontrainte, augmentation de l'échauffement. La courbe (3) se trouve à la limite de stabilité.



**Fig. 21.22** Evolution de la température des pièces d'un roulement après le démarrage.

Pruvot [21.7, 21.8] a étudié la dynamique du phénomène. Les corps roulants reçoivent la moitié de la production de chaleur; mais leur masse étant petite, ils chauffent beaucoup plus vite que les autres pièces du palier (fig. 21.22). L'instabilité thermique survient à vitesse élevée et/ou à forte précontrainte (fig. 21.23). Selon les conditions, l'échauffement va très vite et le roulement surchargé est rapidement hors d'usage.



**Fig. 21.23** Echauffement des billes d'un roulement à lubrification pauvre, selon F. Pruvot [21.7].

Les roulements à galets sont beaucoup plus rigides que les roulements à billes et donc encore plus sensibles à la précontrainte. C'est pourquoi il ne faut les précharger qu'avec beaucoup de précaution et seulement s'ils tournent à petite vitesse et s'ils sont bien refroidis.

On observe aussi des instabilités thermiques si l'arbre chauffe du fait d'un engrenage voisin ou s'il porte le rotor d'une turbine à gaz, par exemple.

Le moyen le plus efficace pour stabiliser la température d'un roulement consiste à améliorer son refroidissement par une lubrification à injection (le coefficient de transmission de chaleur  $h$  augmente). Cependant, la puissance dissipée augmente fortement (terme  $M_0$  du moment de frottement) et l'épaisseur d'un matelas d'huile élasto-hydrodynamique aux points de contact accroît encore la précontrainte.

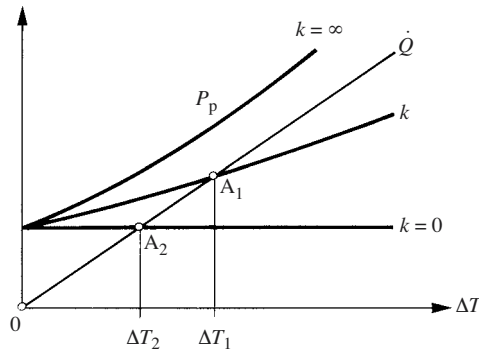


Fig. 21.24 Effet de la rigidité sur l'échauffement.

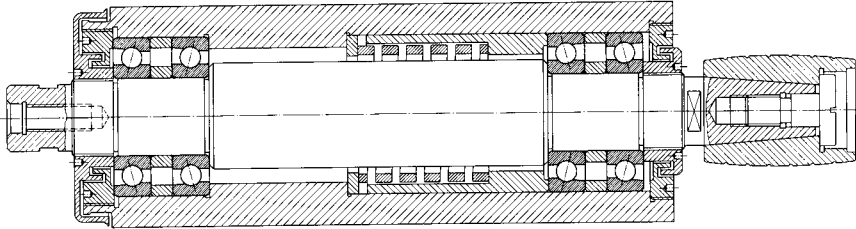
L'accroissement de la charge d'un roulement par la dilatation est d'autant plus faible que le système est plus souple. On voit (fig. 21.24) qu'un régime instable, lorsque  $k = \infty$ , se stabilise en augmentant la souplesse (point  $A_1$ ). Le mécanisme est toujours stable en cas de précontrainte par une force imposée ( $k = 0$ ); c'est avec ce mode de précontrainte que l'échauffement est le plus petit (point  $A_2$ ). L'assouplissement nécessaire peut s'obtenir soit en agissant sur la boucle de précontrainte axiale, soit en permettant la dilatation radiale du roulement.

La précontrainte axiale par un élément souple permet les dilatations thermiques sans modification importante de la précharge. Une précharge par ressort convient parfaitement, elle présente en outre l'avantage que la précontrainte n'est presque pas affectée par les tolérances d'usinage si la course de compression initiale du ressort est de 10 mm et plus. A une tolérance de  $\pm 0,1$  mm correspond alors une variation absolument négligeable de la précontrainte de  $\pm 1\%$ .

La figure 21.25 montre, par exemple, une broche à rectifier les intérieurs tournant à 16 000 t/min. Un ressort hélicoïdal assure la précontrainte. Le système nécessite cependant un montage coulissant des roulements et du fourreau du ressort dans le corps de broche, l'usinage de ce système doit donc être extrêmement précis. Le coulisement peut être gêné ou même empêché par des impuretés. Le petit jeu existant entre le corps de broche et les bagues extérieures augmente considérablement la résistance thermique; au démarrage, la bague extérieure des roulements se dilate plus vite que le corps de broche et peut ainsi bloquer le coulisement à l'instant même où il

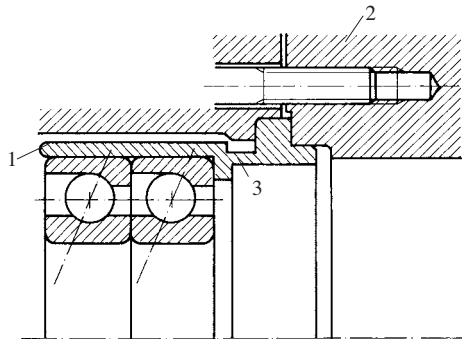


serait nécessaire pour éviter l'instabilité thermique. Les bagues de roulement retrouvent leur liberté lorsque le corps de broche s'échauffe à son tour et se dilate un peu. Le montage est finalement peu fiable. La figure 7.98 illustre un montage avec une rondelle élastique.



**Fig. 21.25** Broche à rectifier les intérieurs.

Pruvot [21.8] préconise de monter les roulements dans un *boîtier élastique* (1) (fig. 21.26). Ce boîtier léger est isolé thermiquement du corps de broche (2) par une partie à faible section (3). La dilatation thermique radiale du boîtier est beaucoup plus rapide que celle d'un carter massif; en outre, du fait de sa minceur, la rigidité radiale élastique du boîtier vis-à-vis de la dilatation des billes est plus petite que celle qu'on aurait si le roulement était logé dans un carter massif. Contrairement à ce qu'on pourrait croire, la rigidité du boîtier vis-à-vis d'une charge radiale appliquée à l'arbre est grande car la partie mince (3) est courte.



**Fig. 21.26** Montage de roulements en tandem dans un boîtier élastique.

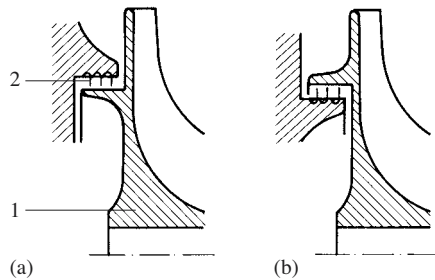
La précharge des roulements double leur rigidité radiale (§ 7.6.6) et une petite déformation du boîtier sous l'effet d'une force radiale ne diminue que très peu la raideur obtenue. En fin de compte, un roulement monté dans un boîtier élastique est plus rigide qu'un montage ordinaire sans précharge des roulements. Ce système permet aussi de monter des roulements à galets coniques avec une certaine précharge sans risque d'instabilité thermique, même à grande vitesse.

Les montages de roulements à contacts obliques opposés sont toujours préchargés en vue de supprimer le jeu radial et accroître leur rigidité. La dilatation des corps roulants accroît la précharge; en revanche, la dilatation thermique axiale de l'arbre

influence différemment la précharge selon le montage des roulements. En se basant sur l'étude du jeu axial de ces montages présentée au paragraphe 19.7.2, on peut dire que les montages dont le jeu axial diminue avec l'échauffement voient croître la dissipation d'énergie et qu'ils sont sujets à une instabilité thermique.

### 21.4.3 Labyrinthes

Les joints à labyrinthe des turbines à vapeur et des turbocompresseurs chauffent fortement s'ils entrent en contact. La disposition représentée à la figure 21.27(a) est instable parce que l'échauffement dilate le tambour (1) et le rapproche des lamelles (2) en accentuant encore l'échauffement. En revanche, l'échauffement du tambour de la figure 21.27(b) l'éloigne des lamelles en diminuant l'éventuelle pression de contact; l'échauffement tend vers un état d'équilibre.



**Fig. 21.27** Labyrinthe du tambour d'équilibrage d'un turbocompresseur: (a) disposition thermiquement instable; (b) disposition stable.

## 21.5 AUTO-EXCITATION DE VIBRATIONS

### Généralités

Des vibrations d'un système sont dites auto-excitées lorsqu'elles prennent naissance sans qu'un quelconque mouvement vibratoire ou qu'une force périodique lui soit imposé de l'extérieur. La croissance et l'entretien d'une vibration nécessitent de l'énergie, mais les vibrations auto-excitées la puisent dans l'environnement en commandant elles-mêmes l'apport d'énergie au système. Cet apport croît avec l'amplitude de la vibration. Le régime vibratoire se stabilise lorsque l'énergie dissipée est égale à l'énergie reçue. Il est donc certes possible de limiter l'amplitude en accroissant l'amortissement, mais on ne peut supprimer une auto-excitation qu'en intervenant sur ses causes physiques.

L'auto-excitation correspond à une instabilité d'un système oscillant qui vibre spontanément avec sa fréquence propre tandis qu'en régime forcé, la fréquence vibratoire est égale à la fréquence de l'excitation. La vibration n'existe souvent pas à basse vitesse, mais elle apparaît brusquement au-delà d'une certaine limite en ne s'amortissant plus, si l'on l'augmente encore la vitesse. Les vibrations auto-entretenues se distinguent d'autres vibrations d'instabilité qui, elles, n'existent que dans une certaine gamme de vitesse, comme, par exemple, les vibrations paramétriques (sect. 17.6).

Les systèmes non linéaires, notamment ceux dont le frottement présente des discontinuités, sont susceptibles de provoquer des oscillations auto-entretenues.

Les systèmes décrits par des équations linéaires du second ordre sont instables et donnent lieu à des oscillations auto-entretenues lorsqu'au moins une solution de l'équation caractéristique contient une partie réelle positive ou si une racine double est purement imaginaire. Ces cas se rencontrent lorsqu'un terme d'amortissement au moins est négatif.

Nous avons déjà rencontré quelques exemples de vibrations auto-excitées :

- Mouvement saccadé provoqué par le frottement (§ 15.6.1). Le stick-slip engendre des vibrations dans les chaînes cinématiques et excite des vibrations haute fréquence des pièces occasionnant du bruit désagréable, par exemple le grincement des freins. Des remèdes ont été proposés au paragraphe 15.6.3.
- Instabilité des rotors lorsque le rapport entre l'amortissement interne et l'amortissement externe est trop élevé (§ 18.2.4).
- Fouettement des paliers hydrodynamiques (§ 18.2.2).
- Vibrations paramétriques (sect. 17.6 et § 18.2.5).

### Broutement

Un coulisseau (1) est guidé par une tige verticale (4) (fig. 21.28a), il porte une masse (2) au bout d'un bras souple (3). Supposons que le coulisseau se trouve en situation d'autoblocage parce que le poids de l'ensemble se trouve à une distance  $b$  de la colonne telle que (§ 10.7.4)

$$b > \frac{\ell}{2\mu_0} \quad (10.149)$$

Il touche la tige aux points B et D.

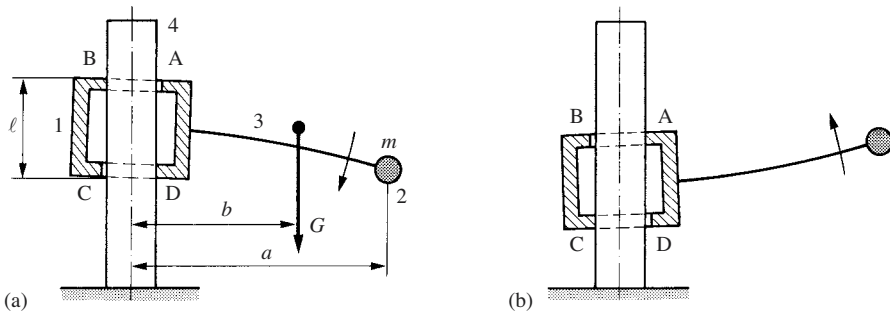


Fig. 21.28 Mécanisme du broutement: (a) contact B-D; (b) contact A-C.

Supposons maintenant qu'une quelconque perturbation excite une vibration verticale de la masse avec sa pulsation propre  $\omega_0$  et une amplitude  $\hat{x}$ . Le moment du poids  $G$  et de la force d'inertie de la masse vibrante par rapport à l'axe du guidage vaut

$$M = bG + ma\omega_0^2 \hat{x} \sin \omega_0 t = m(bg + a\omega_0^2 \hat{x} \sin \omega_0 t) \quad (21.38)$$

Selon l'amplitude de la vibration, ce moment peut s'annuler et devenir négatif. Le coulisseau bascule alors et vient en contact en A et C avec la tige (fig. 21.28b). Pendant le passage d'un contact à l'autre, le coulisseau tombe et s'arrête dès que le contact

est rétabli; il tombe aussi pendant le mouvement inverse du bras. Lors de la chute, la gravité apporte de l'énergie à la masse et entretient sa vibration. Le déplacement saccadé du coulisseau est appelé broutement.

On distingue:

- l'oscillateur qui effectue le mouvement saccadé;
- le support de l'oscillateur.

Les caractéristiques du broutement sont les suivantes:

- un mouvement saccadé provoqué par la vibration de l'oscillateur;
- une permutation alternée des contacts de surface;
- la vibration entretenue par de l'énergie apportée par un système voisin, la gravité dans l'exemple ci-dessus, mais commandée par le mouvement lui-même;
- l'élasticité du support n'influence pas le phénomène.

On peut éviter le broutement en empêchant toute situation d'arc-boutement, en diminuant les jeux, en raidissant le mécanisme menant; c'est impossible en jouant sur la pulsation propre du système. On rencontre aussi le broutement lors du démarrage de mécanismes irréversibles; ce phénomène a déjà été examiné au paragraphe 14.8.1.

Le balancier des montres et horloges mécaniques est un oscillateur auto-entretenu par le mouvement de la roue d'échappement. On y retrouve la permutation périodique des contacts avec l'ancre, typique du broutement.

## 21.6 CONCLUSIONS PRINCIPALES

On évite habituellement soigneusement toute instabilité. Font exception les systèmes bistables qui possèdent deux positions d'équilibre stable qu'on met à profit pour commander des dispositifs de sécurité et certains mécanismes à vibrations auto-entretenues.

Les structures sollicitées en compression changent brusquement de forme lorsque la charge critique est dépassée. Le flambage est le changement brutal de la forme de la ligne neutre d'une structure, le voilement est le changement brutal de sa forme extérieure sans modification de la ligne neutre.

Le flambage survient soit parce que la structure est instable, la contrainte restant dans le domaine élastique du matériau, soit parce que le matériau entre dans le domaine plastique. Dans le cas idéal, la forme de la structure reste inchangée jusqu'au flambage; mais les inévitables courbures initiales et excentrages de la charge provoquent des flexions précédant le flambage proprement dit.

Des tubes fins comprimés peuvent voiler; la charge critique de voilement est proportionnelle à l'épaisseur du tube, mais indépendante de son diamètre et de sa longueur. Les tubes fins sollicités en torsion peuvent aussi voiler; ce phénomène limite l'amincissement des arbres creux en vue de les alléger pour élever leur vitesse critique. Un tube optimal flambe et voile pour la même charge critique.

Une bielle comprimée sous charge variable est susceptible d'effectuer une vibration paramétrique latérale pour une fréquence d'excitation très proche de sa première fréquence propre de vibration de flexion. Elle flambe alors pour une charge moyenne inférieure à sa charge critique de flambage élastique statique.

Les longs ressorts hélicoïdaux flambent aussi: il convient de les guider latéralement.

On rencontre des instabilités thermiques. La surcharge d'un palier hydrodynamique rapproche les pièces et élève la température de l'huile, ce qui diminue la viscosité de l'huile, puis l'épaisseur du film lubrifiant; l'arbre risque alors de venir toucher le coussinet. Le frottement et l'échauffement augmentent ensuite très rapidement; cette instabilité thermique provoque un danger de grippage.

Les mécanismes comportant des roulements préchargés sont aussi sujets à une instabilité thermique. L'échauffement est grossièrement proportionnel à la charge. Selon le montage, la dilatation des pièces accroît la précontrainte, puis encore l'échauffement. A grande vitesse, ce cercle vicieux peut conduire à une instabilité thermique avec destruction rapide des roulements. On prévient ce danger en donnant aux pièces une certaine souplesse.

Le stick-slip est une sorte de vibration auto-entretenue. Tout comme le broutement, il tire son énergie du système voisin.

# ÉTANCHÉITÉ

## 22.1 INTRODUCTION

Les dispositifs d'étanchéité remplissent une des fonctions mécaniques de base (sect. 1.6), ils séparent deux espaces de manière qu'aucun fluide ou autre substance ne puisse passer de l'un à l'autre. La notion d'étanchéité est très relative car l'étanchéité absolue n'existe pas. C'est un idéal vers lequel tend la technique. On se contente habituellement des définitions suivantes :

- *étanche aux liquides* ; aucune trace de liquide n'est visible à la surface de la paroi ;
- *étanche aux gaz* ; un gaz en surpression ou en dépression dans le système ne voit pas sa pression évoluer de manière appréciable en l'espace de quelques jours.

On s'est souvent satisfait de cette vision très simple, mais l'industrie moderne manipule aujourd'hui beaucoup de produits dangereux (toxiques, inflammables, radioactifs) qui nécessitent une connaissance beaucoup plus précise des fuites. Le souci d'éviter la pollution de l'environnement et de protéger les personnes conduit à quantifier les fuites et à leur fixer des limites.

Le problème de l'étanchéité ne se pose en principe qu'entre deux éléments voisins. En ne considérant que les cas les plus fréquents, on distingue :

- l'**étanchéité statique** entre deux éléments immobiles l'un par rapport à l'autre ;
- l'**étanchéité dynamique** entre deux éléments mobiles l'un par rapport à l'autre. Ce cas se subdivise encore en *étanchéité dynamique de translation* et *étanchéité dynamique de rotation*.

On classe les solutions technologiques en quatre familles :

- **étanchéité directe**, les pièces se touchent sans l'interposition d'un joint ou sont séparées par un petit jeu en cas de mouvement ;
- **étanchéité indirecte**, les pièces sont séparées par un troisième élément solide intercalé entre elles ;
- **étanchéité semi-directe**, les pièces sont enduites d'une pâte spéciale avant leur assemblage ou un fluide de barrage est maintenu entre des surfaces en mouvement qui ne se touchent pas ;
- **étanchéité permanente**, les pièces sont indémontables sans destruction de l'étanchéité.

L'étanchéité est un domaine en pleine évolution qui exige une vaste expérience. On ne montrera que les principes fondamentaux.

Ce chapitre est structuré comme suit :

- Section 22.2 Définition d'une fuite, technique de recherche des fuites.
- Section 22.3 Étanchéité statique, principes et technologie d'étanchéité.
- Section 22.4 Étanchéité dynamique, l'accent est mis sur les étanchéités de rotation.
- Section 22.5 Conclusions principales.

## 22.2 FUITES

### 22.2.1 Débit de fuite

Un débit de fuite s'exprime en débit-masse  $\dot{m}_f$  ou en débit-volume  $\dot{V}_f$ . La fuite effective devant être inférieure au débit de fuite limite admissible, il faut satisfaire aux conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{m}_f \leq \dot{m}_{f \text{ adm}} \\ \dot{V}_f \leq \dot{V}_{f \text{ adm}} \end{array} \right\} \quad (22.1)$$

Les débits de fuite maximaux tolérés sont souvent prescrits par des règlements et intégrés dans les spécifications des contrats de fourniture. Mais s'il est relativement facile de fixer un débit limite, d'ailleurs souvent arbitraire, surgissent immédiatement deux grandes difficultés :

- le constructeur ne dispose presque d'aucune donnée fiable qui détermine une relation entre la fuite et la construction des dispositifs d'étanchéité;
- la mesure des petites fuites est souvent presque impossible.

### 22.2.2 Recherche des fuites

La recherche des fuites est plus difficile qu'il n'y paraît de prime abord. Dans le cas de liquides, on se contente le plus souvent de constater que les parties extérieures d'un récipient ou d'une machine restent sèches. Mais une petite fuite d'un liquide volatil passe inaperçue parce que le liquide s'évapore dès qu'il débouche à l'extérieur. Le contrôle de l'étanchéité au gaz est encore beaucoup plus délicat. L'auteur se souvient que, malgré plusieurs mois de travail acharné, il fut impossible de trouver la fuite d'hélium d'une grande installation d'où le gaz s'échappait probablement en quantité imperceptible par des milliers de raccords de tubes.

La recherche de fuites de gaz s'opère en deux temps : vérification de l'étanchéité, puis localisation des fuites. Laissons de côté le cas banal de fuites importantes pour ne parler que de la recherche de petites fuites.

#### Contrôle de l'étanchéité

Un gaz occupe le volume  $V_0$  à la pression atmosphérique  $p_a$  et à la température  $T_0$ . Comprimons-le dans une enceinte de volume  $V_e$  initialement déjà à la pression atmosphérique. Après égalisation des températures (compression isotherme), sa pression devient

$$p_0 = \frac{V_e + V_0}{V_e} p_a \quad (22.2)$$

Supposons qu'il existe un débit de fuite  $\dot{V}_{f0}$  défini dans l'état initial. Le volume de gaz encore contenu dans le récipient est alors  $V_0 - \dot{V}_{f0} t$ . Supposons encore que la température du gaz comprimé varie et devienne  $T = T_0 + \Delta T$ ; la nouvelle pression dans l'enceinte est alors

$$p = \frac{V_e + V_0 - \dot{V}_{f0} t}{V_e} \frac{T_0 + \Delta T}{T_0} p_a$$

ou

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{\dot{V}_{f0}}{V_e + V_0} t \right) \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) \quad (22.3)$$

On peut en principe mettre une fuite en évidence en suivant l'évolution de la pression absolue dans l'enceinte, mais la température constitue une grandeur d'influence importante susceptible de masquer une petite fuite. On observe que la pression peut fort bien monter temporairement au-dessus de la pression initiale (fig. 22.1). En mesurant la différence entre la pression dans l'enceinte et la pression atmosphérique, ce que font d'ailleurs tous les manomètres ordinaires, la mesure est encore directement influencée par les variations de la pression ambiante. Une élévation de la pression barométrique fait croire à une baisse de la pression intérieure. En attendant longtemps, on décèle cependant une pente moyenne correspondant à la fuite. Les choses se compliquent encore si l'on tient compte de la dilatation thermique de l'enveloppe et des variations de son volume du fait des fluctuations de la pression atmosphérique. Cette méthode ne permet pas de mettre en évidence des fuites minimales.

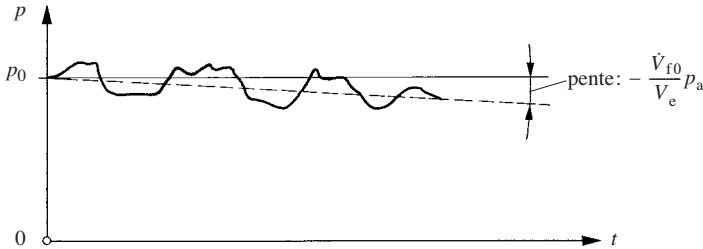


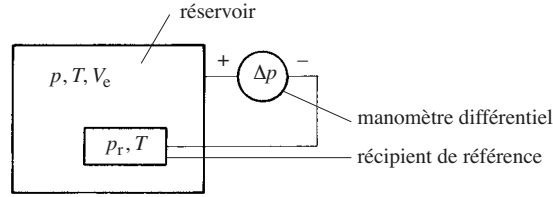
Fig. 22.1 Evolution de la pression dans une enceinte avec fuite.

On abaisse le seuil de détection d'une fuite en utilisant un montage différentiel. On place un petit récipient de référence étanche et rigide à l'intérieur du réservoir principal et on mesure la différence de pression entre les deux espaces (fig. 22.2).

En supposant que la température dans le récipient soit toujours en équilibre avec celle qui règne dans le réservoir, le manomètre indique

$$\Delta p = p - p_{r0} \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right)$$





**Fig. 22.2** Mesure différentielle des variations de pression.

En introduisant l'expression (22.3), si les pressions initiales du récipient de référence et de l'enceinte sont égales,  $p_{r0} = p_0$ , on a

$$\Delta p = - \frac{\dot{V}_{f0}}{V_e + V_0} t \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) p_0 \quad (22.4)$$

Le manomètre indique une diminution de pression seulement si l'enceinte fuit, il n'enregistre pas les variations de la température ni les variations de la pression atmosphérique. En outre, on peut utiliser un manomètre très sensible.

Dans les très grandes enceintes ( $> 1000 \text{ m}^3$ ), la température du gaz est peu homogène. On mesure alors la température en un grand nombre de points et on calcule la dilatation thermique du gaz au voisinage de chaque thermomètre à l'aide d'un ordinateur. Cette méthode a été développée pour vérifier l'étanchéité des enceintes de confinement abritant des réacteurs atomiques. La pose d'un réseau de fibre optique permettrait aujourd'hui de mesurer plus facilement les variations de la température moyenne.

### Localisation des fuites

Les grosses fuites de gaz se décèlent à l'ouïe dans un environnement calme. On découvre des fuites plus petites en badigeonnant les soudures, les joints et autres endroits critiques avec un liquide qui fait des bulles. On cherche les très petites fuites en introduisant dans le système un gaz traceur tel que du fréon ou de l'hélium, puis en promenant sur les endroits dangereux une sonde aspirante reliée à un détecteur chimique ou à un spectrographe de masse. Mais cette méthode n'est praticable que dans les endroits bien ventilés où le traceur ne peut pas s'accumuler.

## 22.3 ÉTANCHÉITÉ STATIQUE

### 22.3.1 Limitation des fuites

On dit qu'une étanchéité est *statique* lorsque les pièces en contact sont immobiles l'une par rapport à l'autre. Des surfaces pressées l'une contre l'autre se touchent par l'intermédiaire de leurs aspérités (§ 2.2.3) et le fluide peut en principe s'écouler en se faufilant entre les îlots de contact (fig. 22.3). L'espace offert au passage du fluide s'apparente à une fente dans laquelle l'écoulement est généralement laminaire. Dans le cas d'un fluide incompressible, en négligeant la pression dynamique de vitesse, le débit-volume résulte de la loi de Poiseuille (fig. 22.4):

$$\dot{V} = \frac{h^3 b}{12 \eta \ell} (p_1 - p_2) \quad (22.5)$$

avec :

$h$  épaisseur de la fente  
 $b$  largeur de la fente  
 $\ell$  longueur de la fente  
 $\eta$  viscosité dynamique  
 $p_1$  pression amont  
 $p_2$  pression aval

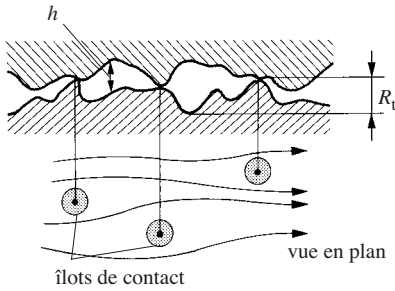


Fig. 22.3 Aspérités en contact avec écoulement.

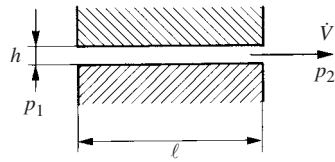


Fig. 22.4 Fente rectiligne.

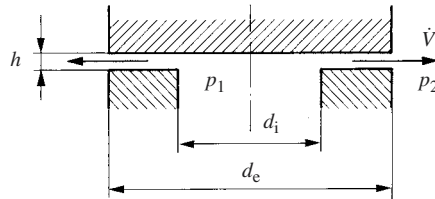


Fig. 22.5 Fente radiale.

On rencontre souvent des fentes circulaires radiales (fig. 22.5); leur débit vaut

$$\dot{V} = \frac{\pi h^3}{6 \eta \ln \frac{d_e}{d_i}} (p_1 - p_2) \quad (22.6)$$

Dans le cas de fluides compressibles, les formules ci-dessus s'appliquent avec une bonne approximation seulement si  $p_1 / p_2 < 1,3$ . Au-delà, il faut tenir compte de la détente du fluide et se rappeler que la vitesse ne peut pas dépasser celle du son [22.1] lorsque

$$\frac{p_1}{p_2} \geq \left( \frac{1 + \chi}{2} \right)^{\frac{\chi}{\chi - 1}} \quad (22.7)$$

Pour de l'air et les gaz diatomiques, l'exposant adiabatique  $\chi$  vaut  $c = 1,4$  et  $p_1 / p_2 \geq 1,9$ .

Les lois de l'écoulement laminaire montrent que le débit de fuite est:

- proportionnel à la différence de pression;
- proportionnel au cube de l'épaisseur de la fente;
- inversement proportionnel à la longueur de la fente.

Ces résultats incitent à diminuer le plus possible l'épaisseur de la fente en comprimant fortement les surfaces afin d'écraser les aspérités.

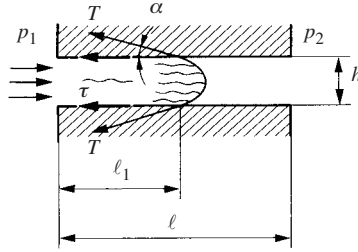


Fig. 22.6 Pénétration d'un liquide non mouillant.

Avec des liquides, lorsque l'espace est très étroit, les forces de capillarité jouent un rôle non négligeable. Il existe en outre des effets d'interaction moléculaire entre le liquide et les parois. Considérons une fente à parois lisses (fig. 22.6). Pour une largeur de fente  $b$ , les forces appliquées au liquide sont:

- la force de pénétration du liquide dans la fente:  $(p_1 - p_2)hb$
- la force d'interaction moléculaire sur les parois:  $2\ell_1 b \tau$
- la force de tension superficielle:  $2Tb \cos \alpha$

L'équilibre statique des forces s'exprime par

$$(p_1 - p_2)h = 2\ell_1 \tau + 2T \cos \alpha$$

La différence de pression maximale possible sans fuite, pour une fente de longueur  $\ell$ , résulte de l'équation ci-dessus; on a:

$$(p_1 - p_2)_{\max} = \frac{2}{h}(\ell \tau + T \cos \alpha) \quad (22.8)$$

On voit, là aussi, tout l'intérêt d'une fente très étroite.

Si les bords de la fente sont parallèles, seuls des liquides non mouillants peuvent en principe être retenus. Cependant, les liquides mouillants sont aussi retenus à la sortie des canaux (fig. 22.7). En effet, tant que le liquide se trouve dans le canal, ménisque (I), il progresse rapidement; parvenu à la sortie, la pression forme le ménisque convexe (II) retenu par la capillarité. Les changements de forme des canaux entre les aspérités arrêtent même des liquides mouillants tant que la différence de pression n'est pas trop élevée. Très mouillants, les huiles et les produits pétroliers suintent toujours un peu. Les gaz fuient facilement, car leur effet de capillarité est négligeable. Dans les fentes très étroites s'établit un écoulement moléculaire.

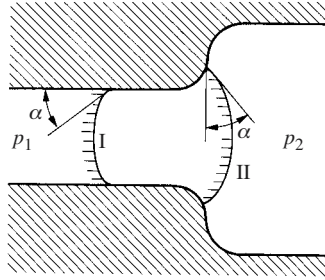


Fig. 22.7 Arrêt d'un liquide mouillant.

Ces mécanismes de fuite suggèrent deux méthodes pour obtenir l'étanchéité souhaitée :

- rapprocher les surfaces (étanchéité directe);
- remplir les canaux de fuite par un joint (étanchéité indirecte).

### 22.3.2 Étanchéité directe

En pressant très fortement deux surfaces métalliques l'une contre l'autre, leurs aspérités s'écrasent et les îlots de contact s'élargissent. La distance entre les pièces diminue assez pour obtenir une bonne étanchéité jusqu'aux plus hautes pressions. Il est primordial que l'état de surface initial soit le meilleur possible (surfaces polies) et que les matériaux ne soient pas trop durs pour que les surfaces s'adaptent parfaitement l'une à l'autre. Les déformations locales égalisent aussi les ondulations de surface; si elles sont élastiques, elles permettent de nombreux montages et démontages. L'étanchéité directe est surtout réservée à des pièces de petites dimensions, par exemple des raccords de tubes et des brides jusqu'à 2500 bars (fig. 22.8). On l'utilise exceptionnellement entre des pièces de grandes dimensions telles que des bâches de turbines à vapeur ou à gaz (fig. 22.9).

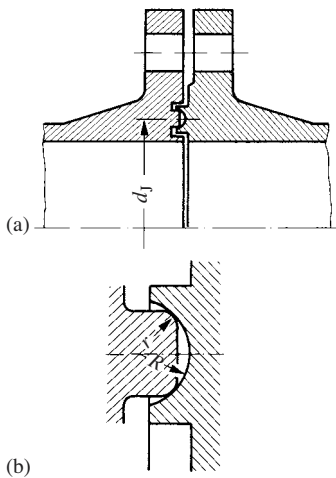


Fig. 22.8 Brides DILO: (a) ensemble; (b) détail du joint.

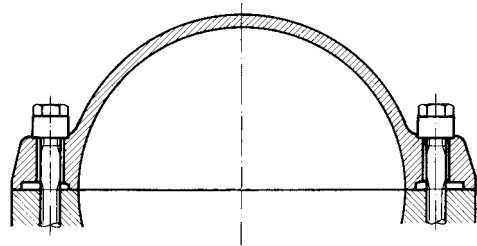


Fig. 22.9 Assemblage d'une bâche de turbomachine.

### 22.3.3 Etanchéité indirecte

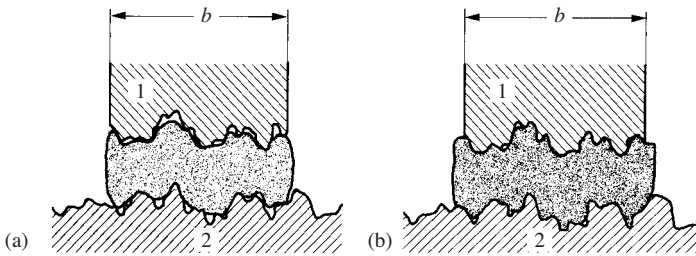
#### Principes

Un joint interposé entre deux pièces doit :

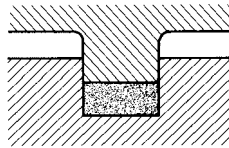
- remplir entièrement les dépressions entre les aspérités;
- supporter la température de service;
- résister à l'agression chimique par le fluide.

Pour obtenir une bonne étanchéité, il faut que :

- le matériau du joint présente un comportement plastique (fig. 22.10);
- le matériau soit tendre (fibres agglomérées, cuivre recuit, aluminium, fer doux);
- la surface de contact soit étroite afin de pouvoir comprimer le joint avec une force convenable.



**Fig. 22.10** Joint d'étanchéité: (a) remplissage imparfait par un joint élastique; (b) remplissage complet par un joint plastique.



**Fig. 22.11** Joint monté dans une gorge.

L'épaisseur des joints diminue progressivement du fait de leur compression et du fluage. On évite le fluage latéral des joints plats en les emprisonnant dans une gorge (fig. 22.11). Il faut remplacer un joint après chaque démontage, car un vieux joint en fibre est généralement durci et ne peut plus s'adapter une nouvelle fois aux surfaces; un joint en cuivre est écroui, on peut le recuire. Quoique élastiques, le caoutchouc et les élastomères ne s'utilisent que si les surfaces sont parfaitement polies.

#### Forces d'étanchéité

Le dimensionnement des joints et de leur dispositif de serrage implique de connaître la relation entre la pression du fluide et l'intensité de la force d'appui sur le joint nécessaire pour garantir l'étanchéité. On procède empiriquement: un couvercle ferme

un cylindre par l'intermédiaire d'un joint plat (fig. 22.12), on applique une force  $F_E$  sur le couvercle, puis on augmente progressivement la pression du fluide jusqu'à ce que le joint se mette à fuir.

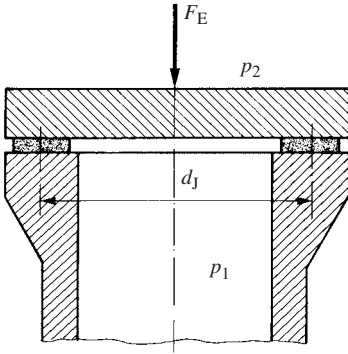


Fig. 22.12 Essai d'étanchéité.

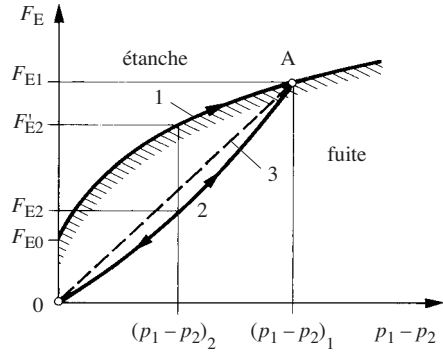


Fig. 22.13 Force d'étanchéité en fonction de la pression.

Lorsque le joint est neuf, il faut appliquer une force minimale  $F_{E0}$  pour obtenir un remplissage minimal des interstices (fig. 22.13). L'effort nécessaire de *première étanchéité* augmente avec l'accroissement de pression, courbe (1). La surpression  $(p_1 - p_2)_1$  étant atteinte, diminuons la surpression de service jusqu'à la valeur  $(p_1 - p_2)_2$ ; on observe que l'on peut maintenir l'étanchéité avec un effort  $F_{E2}$  inférieur à l'effort  $F'_{E2}$  qui serait nécessaire en situation de déformation initiale, courbe (2). Cette différence provient du comportement largement irréversible de l'écrasement plastique du joint. En augmentant à nouveau la pression du fluide, la charge d'étanchéité nécessaire suit la courbe (2), appelée *courbe de service*, en sens inverse jusqu'au point A, puis continue sur la courbe de déformation initiale (1). On assimile la courbe de service (2) à une droite (3) dont la mise en équation est facile. Dès que les surfaces sont entièrement conformes, c'est-à-dire que le joint remplit tous les interstices, la charge d'étanchéité  $F_E$  croît linéairement selon une droite passant par l'origine (fig. 22.14). La surpression  $(p_1 - p_2)_c$  pour laquelle la déformation plastique du joint est achevée est appelée *surpression critique*; il lui correspond la force d'appui d'étanchéité critique  $F_{Ec}$ .

L'effort d'étanchéité  $F_E$  équilibre non seulement la force de contact du joint, mais aussi la poussée statique exercée par le fluide sous pression sur le couvercle. Cette dernière se calcule simplement en faisant l'hypothèse que le fluide se faufile sous la moitié de la largeur du joint ou, ce qui revient au même, que la pression est distribuée linéairement sous le joint (fig. 22.15). La poussée statique, ou poussée intérieure, vaut sensiblement

$$F_i = \frac{\pi d_J^2}{4} (p_1 - p_2) \quad (22.9)$$

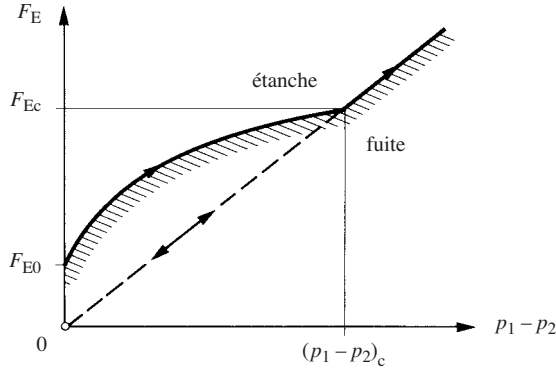


Fig. 22.14 Force d'étanchéité.

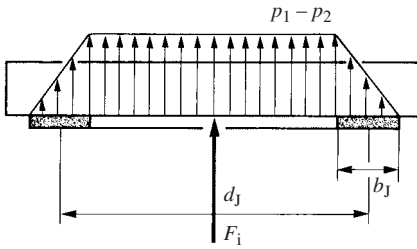


Fig. 22.15 Poussée du fluide.

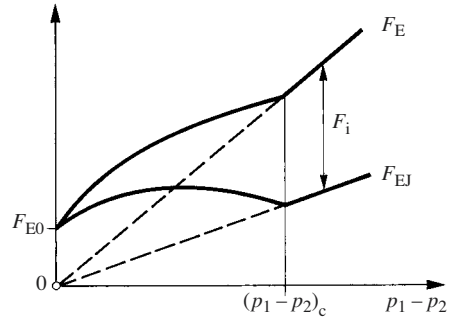


Fig. 22.16 Force d'étanchéité du joint en fonction de la surpression.

où  $d_J$  est le diamètre moyen du joint. La force réellement appliquée sur le joint est finalement

$$F_{EJ} = F_E - F_i \quad (22.10)$$

Elle est représentée à la figure 22.16.

La pression de serrage du joint requise à la limite d'étanchéité est proportionnelle à la surpression du fluide, soit

$$\sigma_{EJ} = k_1 (p_1 - p_2) \quad (22.11)$$

où  $k_1$  est un facteur empirique dépendant de la forme et de la matière du joint, voisin de l'unité pour les joints plats usuels.

Le dispositif de serrage, le plus souvent des boulons, doit exercer sur le joint un effort  $F_J$  supérieur ou égal à l'effort d'étanchéité  $F_{EJ}$  nécessaire. La condition d'étanchéité s'écrit:

$$F_J \geq F_{EJ} = \pi d_J b_J \sigma_{EJ} \quad (22.12)$$

avec :

- $d_J$  diamètre moyen de contact du joint
- $b_J$  largeur du joint
- $\sigma_{EJ}$  pression de serrage du joint à la limite d'étanchéité

On a intérêt à ce que le produit  $b_J \sigma_{EJ}$  ne soit pas excessif pour ne pas alourdir la construction par de gros boulons.

L'effort  $F_E$  est déterminant pour dimensionner l'assemblage.

### Débit de fuite

La courbe de la charge appliquée sur la plaque partage le diagramme 22.14 en principe en deux domaines : fuite ou étanche. Cette conception de fonctionnement prévalait jusqu'ici et se trouve encore à la base des normes de dimensionnement des joints. Mais on doit aujourd'hui, comme nous l'avons vu, aller beaucoup plus loin. Tückmantel a fait une série d'études pour établir une relation entre le débit de fuite, la pression et d'autres paramètres; une de ses publications [22.2] donne de précieuses références bibliographiques et nous lui empruntons le développement qui va suivre.

Tout joint présente une largeur efficace  $b_e$  qui, dans le cas du joint plat représenté à la figure 22.15, est égale à sa largeur effective  $b_J$ . En lui appliquant la charge d'étanchéité  $F_E$ , la pression de déformation initiale sur le joint vaut

$$\sigma_E = \frac{F_E}{\pi d_J b_e} \quad (22.13)$$

Le fluide fuit le long des deux faces du joint, mais, selon le matériau du joint, il peut aussi s'infiltrer à travers lui. Tückmantel a montré que la pression de déformation initiale nécessaire peut s'exprimer en fonction de la pression du fluide et du débit de fuite par la fonction

$$\sigma_E = a + b \ln \left( \frac{\dot{V}_{f1}}{\dot{V}_f} \frac{p - p_2}{p_1 - p_2} \right) \quad (22.14)$$

$a$  et  $b$  sont des paramètres qui dépendent du matériau du joint, de sa température, de l'état de surface des pièces et de la nature du fluide;  $\dot{V}_{f1}$  est le débit de fuite mesuré pour une surpression  $p_1 - p_2$  et  $\dot{V}_f$  le débit pour une pression  $p$  quelconque. La fonction logarithmique exprime le fait que l'accroissement de la surpression limite de fuite pour une certaine augmentation de la pression de serrage dépend du serrage lui-même. Selon cette formule, il serait impossible d'obtenir une fuite rigoureusement nulle, du moins pour des gaz où la tension superficielle est négligeable. La connaissance des constantes caractéristiques  $a$  et  $b$  de divers matériaux permet de choisir judicieusement un joint en tenant compte du débit de fuite prescrit et de calculer la force d'étanchéité nécessaire. Tückmantel a aussi développé la théorie de dimensionnement des brides et des assemblages tenant compte de ces nouvelles connaissances [22.3].



### Taille du joint

Selon la formule (22.12) un joint étroit offre l'avantage d'exiger une force de serrage relativement faible et d'alléger le boulonnage. Sa largeur minimale résulte de considérations de résistance.

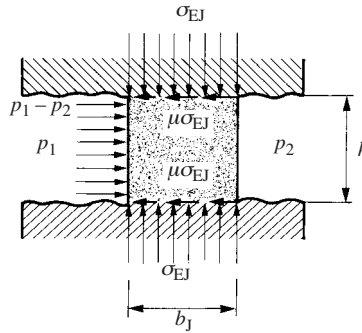


Fig. 22.17 Pressions et contraintes exercées sur un joint.

Considérons un joint plat serré entre deux surfaces par la pression  $\sigma_{EJ}$ . En supposant que la traction circonférentielle dans le joint soit nulle, celui-ci ne doit pas glisser sous l'effet de la pression. Le joint subit, par unité de longueur, la poussée statique  $(p_1 - p_2)h$  (fig. 22.17) et il est retenu par le frottement. La condition de non-glissement à la limite d'étanchéité s'exprime par

$$2\mu\sigma_{EJ}b_J > (p_1 - p_2)h$$

On en tire la largeur nécessaire; en introduisant (22.11),

$$b_J > \frac{h}{2\mu k_1} \quad (22.15)$$

La valeur du coefficient de frottement n'est généralement pas inférieure à 0,1. Pour un joint en fibre,  $k_1 \approx 1$ , alors

$$b_J > 5h \quad (22.16)$$

Cette étude montre qu'il faut faire les joints très minces, de l'ordre du millimètre, et relativement étroits.

Le montage d'un joint plat dans une gorge (fig. 22.11) permet de diminuer sa largeur. On dispose aussi de joints avec des arêtes d'étanchéité, par exemple des profils en losange, qui ne demandent pas un intense serrage.

L'assemblage d'un carter de mécanisme comme celui d'une boîte à vitesses, par exemple, est inconcevable avec un joint incapable de garantir la précision géométrique requise par le fonctionnement. On remplace alors le joint par un liquide badigeonné sur les surfaces avant montage qui remplit tous les interstices et possède la propriété de

polymériser lorsqu'il est à l'abri de l'air (polymérisation anaérobie). Il procure une étanchéité parfaite vis-à-vis de l'huile de graissage. On utilise aussi des laques photo-polymérisables.

#### 22.3.4 Joints déchargés par la pression

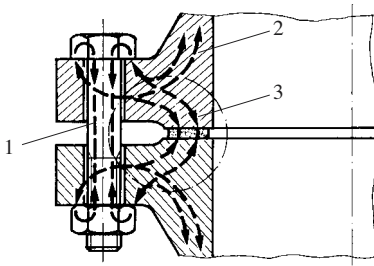
Les joints plats sont généralement montés entre deux brides où ils sont précontraints par des boulons (fig. 22.18). Il existe deux conditions d'étanchéité qui s'expriment facilement en considérant le diagramme caractéristique du joint (fig. 22.16) et un diagramme de précontrainte (fig. 22.19) de l'assemblage :

- Le serrage initial global exercé par le boulonnage doit être au moins égal à la force initiale de précontrainte nécessaire pour que la fuite ne dépasse pas une certaine valeur lorsque le fluide est sous pression. Pour  $n$  vis présentant chacune le serrage initial  $F_{V0}$

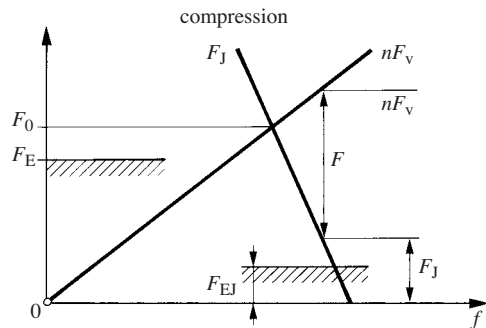
$$F_0 = n F_{V0} > F_E \quad (22.17)$$

- En service, la poussée statique  $F_i$  (22.9) exercée par la pression intérieure décharge le joint. En outre, il existe souvent encore des efforts supplémentaires provenant, par exemple, de contraintes thermiques dans la tuyauterie. L'action résultante  $F$  diminue l'effort sur le joint jusqu'à la valeur  $F_J$  qui doit rester supérieure à la charge d'étanchéité  $F_{EJ}$ . Alors

$$F_J > F_{EJ} \quad (22.18)$$



**Fig. 22.18** Serrage d'un joint plat: (1) traction  $F_V$  de la vis; (2) force  $F$  dans la tuyauterie; (3) force de serrage  $F_J$  du joint.



**Fig. 22.19** Conditions d'étanchéité d'un joint plat serré entre des brides.

Ces conditions sont à la base du dimensionnement des boulons et des brides. Mais les choses se compliquent dans les installations fonctionnant à haute température du fait du fluage et des dilatations thermiques. On distingue cinq phases de service, toutes représentées dans le diagramme 22.20.

##### Phase 1 : montage

Le serrage des  $n$  boulons précontraint tout l'assemblage par la force  $F_0$ . Le joint est chargé par la force  $F_J = F_0$ , il est étanche si  $F_0 > F_E$ .

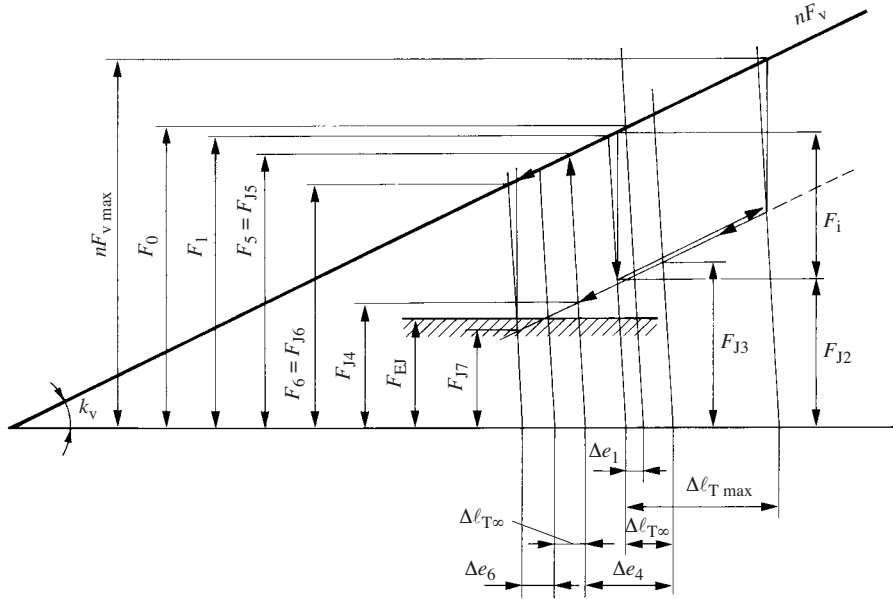


Fig. 22.20 Diagramme de serrage d'un assemblage à joint plat.

#### Phase 2 : fluage à froid

Lors du montage, le joint est comprimé par la force  $F_{J0} = F_0$ . Tous les joints, spécialement ceux en fibre, fluent et s'écrasent d'une petite quantité  $\Delta e_1$  après le serrage. Le serrage diminue et devient  $F_{J1} = F_1$ .

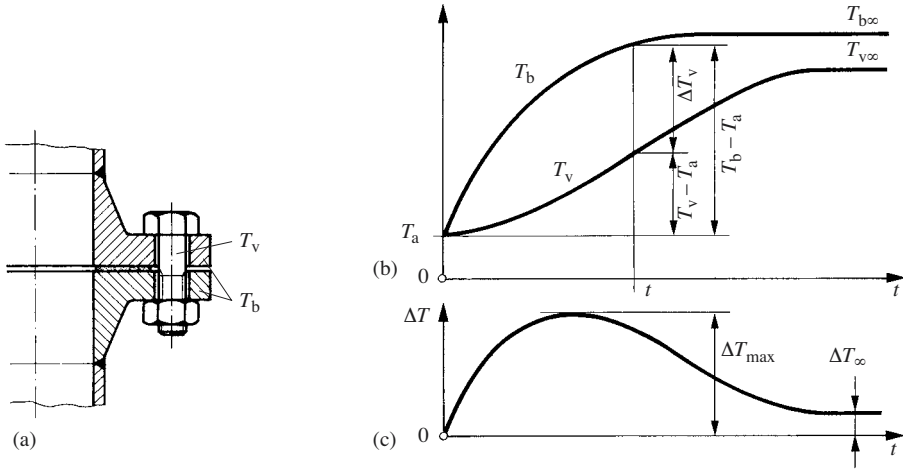
#### Phase 3 : mise sous pression

La pression charge l'assemblage par une traction  $F_1$ , le serrage du joint diminue et devient  $F_{J2}$ . L'étanchéité est garantie si  $F_{J2} > F_{EJ}$ .

#### Phase 4 : chauffage

Si le fluide chauffe, ou s'il est déjà chaud à la mise sous pression (vapeur), la température  $T_b$  des brides augmente progressivement (fig. 22.21). Le contact thermique des boulons avec les brides est relativement mauvais, c'est pourquoi la température des vis  $T_v$  évolue avec un certain retard. La différence de température  $\Delta T = T_b - T_v$  passe par un maximum, puis diminue, mais ne s'annule pas, car la tête de vis et l'écrou cèdent de la chaleur au milieu ambiant.

La dilatation des brides est plus forte que celle des vis à cause de la température et souvent aussi à cause des matériaux (vis en acier, brides en acier austénitique ou inoxydable). Le serrage du joint augmente et passe par un maximum pour s'établir finalement à la valeur  $F_{J3}$ . Cependant, l'échauffement du joint et l'augmentation de sa compression occasionnent progressivement un nouveau fluage  $\Delta e_4$  qui fait chuter la force de serrage jusqu'à la valeur  $F_{J4}$ .



**Fig. 22.21** Echauffement des brides et des vis: (a) montage; (b) température de la vis et des brides; (c) évolution de la différence de température.

#### Phase 5: suppression de la pression intérieure et refroidissement

On annule la surpression du fluide. Le serrage du joint augmente et devient égal à la nouvelle précontrainte,  $F_{J5} = F_5$ . Elle est inférieure à la force de départ  $F_1$  parce que le joint a flué. Mais l'augmentation du serrage survient pendant que le joint est encore chaud, il en résulte alors un nouveau fluage  $\Delta e_6$  qui a pour conséquence de diminuer la précontrainte jusqu'à la nouvelle valeur  $F_6$ .

Ces mécanismes expliquent comment la précontrainte de l'assemblage peut diminuer considérablement. Lors de la prochaine mise sous pression, le serrage du joint devient  $F_{J7}$  et le joint fuit si cette force est inférieure à la force d'étanchéité  $F_{EJ}$ . Un joint étanche la première fois ne l'est pas forcément lors des utilisations suivantes; il convient de resserrer une ou deux fois un joint plat après sa mise en service. L'assemblage est pratiquement insensible au fluage du joint si la vis est suffisamment souple. C'est pourquoi il est recommandé d'utiliser des vis élastiques à haute résistance et de prendre les mesures décrites à la section 7.7.

### 22.3.5 Joints autoclaves

Le montage d'un joint plat tel que décrit ci-dessus exige une forte précontrainte avec de grosses vis et des brides encombrantes; contrairement à ce qui est souhaitable, la compression du joint diminue lorsque la pression du fluide augmente. On réduit considérablement la taille des organes de serrage en mettant à profit la pression du fluide pour renforcer le serrage plutôt que pour le diminuer. C'est le principe de fonctionnement des joints à autoserrage, dits aussi autoclaves, application de l'auto-assistance (§ 11.5.2). L'étanchéité n'est pas affectée par le fluage.

La fermeture Uhde-Bredtschneider (fig. 22.22a) est une construction autoclave où la poussée statique sur le fond (1) du récipient est transmise à travers le joint (2) à un anneau en trois parties (4), qui prend appui dans une gorge du récipient (3). Le joint se dilate sous la poussée du couvercle par sa partie conique qui amplifie encore la pression de contact entre le joint et le couvercle d'une part, et entre le joint et le récipient

d'autre part. On obtient la pression initiale d'étanchéité du joint en serrant les écrous des goujons (5) sur le plateau (7). Cette construction offre encore l'avantage de réduire le moment de flexion dans la paroi cylindrique; en revanche, le couvercle devient épais car il est seulement appuyé à sa périphérie. Le trou d'homme représenté à la figure 22.22(b) fonctionne selon le même principe avec un joint plat.

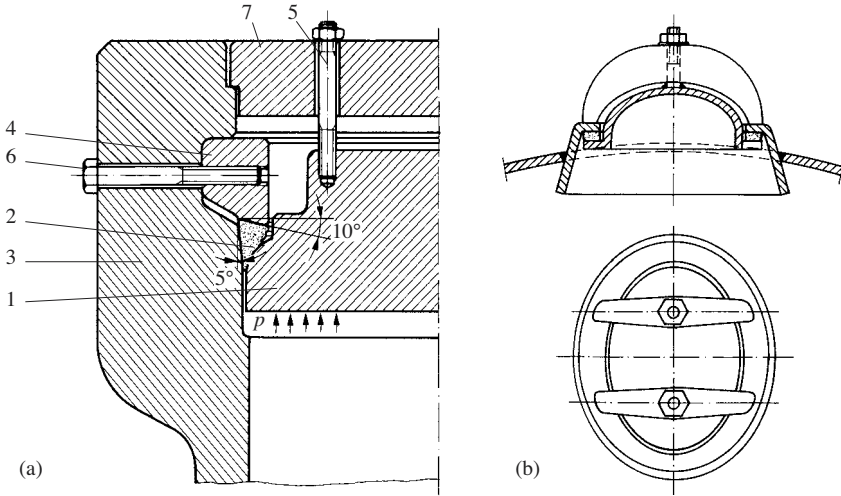


Fig. 22.22 Fermetures autoclaves : (a) Uhde-Bredtschneider; (b) trou d'homme.

Un **joint torique** se monte dans une gorge de laquelle il dépasse légèrement (fig. 22.23a). Le serrage des pièces écrase un peu le joint en donnant naissance à une pression de contact initiale  $\sigma_{j0}$  (fig. 22.23b). Le fluide sous pression s'insinue entre les pièces (fig. 22.23c), remplit la chambre et repousse le joint contre le bord de la gorge lorsque le frottement est vaincu. La pression de contact commence par diminuer du fait de l'extension circonférentielle du joint (fig. 22.24). A partir de la pression  $p'_1$ , la pression de contact augmente selon

$$\sigma_J = \sigma_J'' + a(p_1 - p_2) \quad (22.19)$$

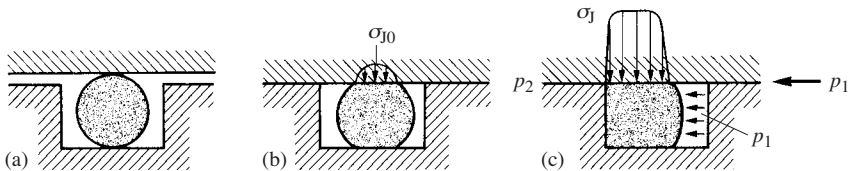


Fig. 22.23 Joint torique : (a) avant serrage; (b) serrage initial; (c) mise sous pression.

Pour le caoutchouc, essentiellement incompressible,  $a \approx 1$ . Le joint reste étanche pour autant que la pression minimale  $\sigma_J$  soit supérieure à la pression d'étanchéité  $\sigma_{EJ}$ . On voit qu'un joint autoserré augmente automatiquement sa pression de contact

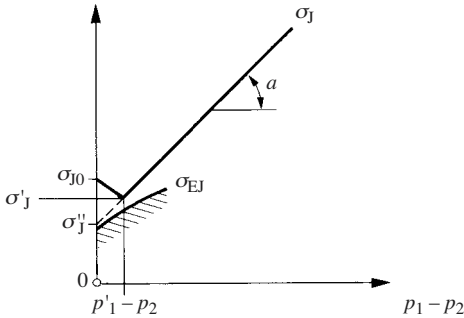


Fig. 22.24 Contrainte de contact d'un joint torique.

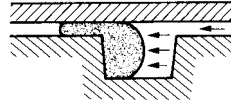


Fig. 22.25 Extrusion d'un joint.

avec la pression du fluide, c'est pourquoi ce principe est utilisé dans les récipients à très haute pression.

Il existe un risque d'extrusion du joint à travers l'interstice des pièces (fig. 22.25), c'est pourquoi on utilise à haute pression des joints toriques métalliques qui résistent aussi aux températures élevées.

### 22.3.6 Etanchéité permanente

On désigne ainsi un dispositif d'étanchéité indémontable sans destruction préalable. Par exemple, l'assemblage de tuyauterie représenté à la figure 22.26 consiste en deux anneaux minces soudés sur les pièces principales, puis reliés à l'extérieur par une petite soudure d'étanchéité. Comme ces pièces fines sont incapables de transmettre les efforts de traction exercés dans la tuyauterie, elles sont maintenues par un assemblage boulonné à bride folle. Pour un démontage exceptionnel, on meule la soudure. Après quelques démontages, il ne reste plus assez de matière pour souder, il faut remplacer les anneaux.

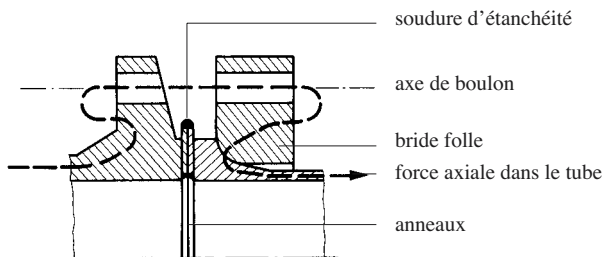
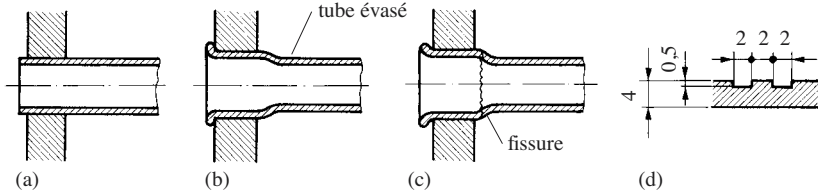


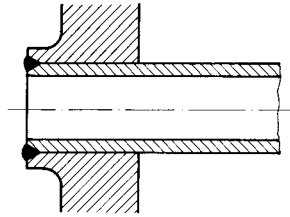
Fig. 22.26 Etanchéité permanente de tuyauterie.

On obtient souvent l'étanchéité nécessaire entre les tubes des échangeurs de chaleur et les plaques tubulaires par mandrinage. Ce procédé consiste à déformer plastiquement le tube et la zone voisine de la plaque (fig. 22.27b) en forçant dans le tube un outil appelé mandrin ou dudgeon. Le tube est solidement maintenu par les contraintes résiduelles, l'évasement d'extrémité est destiné à éviter le déboîtement du tube en cas de relaxation des précontraintes (fluage). Le métal fortement écroui devient relative-

ment fragile, c'est pourquoi des tubes peuvent se rompre au ras de la plaque tubulaire s'ils vibrent fortement (fig. 22.27c). On améliore encore la tenue du tube et l'étanchéité en ménageant des rainures circulaires dans la plaque (fig. 22.27d), le métal du tube y est refoulé lors du mandrinage.



**Fig. 22.27** Tube mandriné dans une plaque: (a) avant mandrinage; (b) après mandrinage; (c) rupture de tube; (d) rainures d'étanchéité.



**Fig. 22.28** Tubes soudés.

Dans les appareils de l'industrie chimique, on prévoit souvent par sécurité une soudure d'extrémité (fig. 22.28). Il faut prendre soin de dégager la plaque autour du col de soudure afin de pouvoir effectuer une bonne soudure sans que la plaque ne chauffe trop (contraintes thermiques). On mandrine parfois, puis on soude encore le tube; dans ce cas le mandrinage est superflu pour l'étanchéité, mais il est utile pour prévenir la corrosion provoquée par la stagnation de liquide dans la fente qui existerait entre le tube et la plaque.

Les industries alimentaires et pharmaceutiques exigent que les appareils ne présentent aucun interstice où des produits en fabrication pourraient s'infiltrer, stagner puis pourrir. Il convient de tenir compte de cet impératif et d'étudier en conséquence les assemblages et les étanchéités.

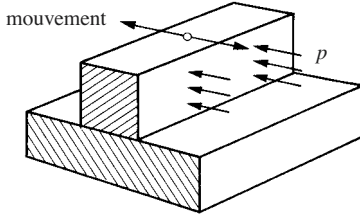
## 22.4 ÉTANCHÉITÉ DYNAMIQUE

### 22.4.1 Principes

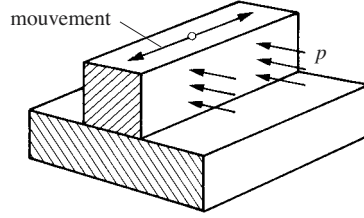
Une étanchéité est dite dynamique lorsqu'elle empêche le passage d'un fluide entre deux pièces en mouvement relatif. On distingue deux cas selon le sens du mouvement.

#### **Mouvement parallèle au gradient de pression** (fig. 22.29)

La pièce mobile découvre et recouvre périodiquement une partie de la surface de la pièce fixe. Si le fluide à étancher est un liquide, il existe toujours un film de quelques molécules d'épaisseur qui reste accroché à la surface exposée temporairement au



**Fig. 22.29** Mouvement parallèle au gradient de pression.

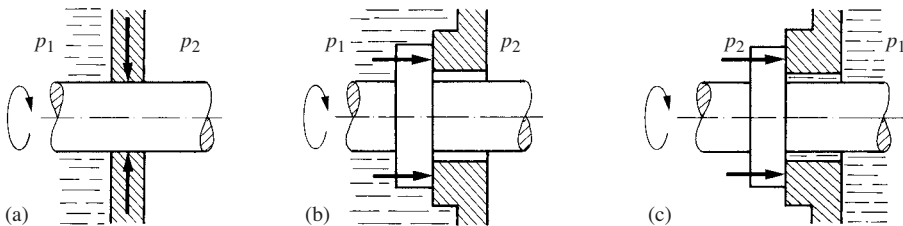


**Fig. 22.30** Mouvement perpendiculaire au gradient de pression.

liquide. En passant par dessus, la pièce mobile entraîne un peu de liquide dans son mouvement et agit comme une pompe à viscosité. On a constaté que le transport de liquide ne s'effectue pas seulement dans le sens du gradient de pression statique, mais aussi en sens inverse. Le film lubrifie les surfaces et diminue leur usure. Ce cas se rencontre dans les pistons et les tiges de piston.

### Mouvement perpendiculaire au gradient de pression (fig. 22.30)

Les passages d'arbres à travers des enveloppes conduisent à un mouvement perpendiculaire au gradient de pression. À défaut de mesures spéciales, les surfaces ne sont pas lubrifiées par le fluide alors que la vitesse relative est souvent très élevée, provoquant une forte usure. On distingue entre les *étanchéités radiales*, où la surface d'étanchéité est cylindrique, et les *étanchéités axiales* dans lesquelles la surface étanche se trouve dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation (fig. 22.31). Dans ce dernier cas, l'étanchéité est meilleure lorsque la force centrifuge du liquide dans l'interstice d'étanchéité s'oppose au gradient de pression (fig. 22.31b) que lorsqu'elle va dans le même sens que l'écoulement de pression (fig. 22.31c).



**Fig. 22.31** Disposition d'étanchéité pour arbres tournants : (a) radiale; (b) axiale centripète; (c) axiale centrifuge.  $p_1 > p_2$ .

### 22.4.2 Aspects tribologiques

Les surfaces d'étanchéité sont souvent appliquées l'une contre l'autre et frottent au cours du mouvement. Reprenant les considérations vues au paragraphe 2.4.1 au sujet de la lubrification, il faut distinguer, ici aussi, le frottement sec, le frottement limite, le frottement mixte où du liquide mouille les surfaces qui se touchent par leurs aspérités, et enfin le frottement fluide où les surfaces sont entièrement séparées par un film liquide. Le type de frottement dépend beaucoup de la nature du fluide, de la pression de contact, de la vitesse relative et de la configuration des surfaces. L'usure du



joint est nulle en cas de frottement fluide, mais la fuite est alors relativement importante. En revanche, une bonne étanchéité s'obtient avec un frottement mixte ou même sec, mais au prix d'une usure rapide.

Les joints fonctionnent habituellement dans un régime d'usure adhésive et abrasive; mais, la pression de contact étant relativement basse, on observe un transfert du matériau le plus tendre sur le corps le plus dur. On caractérise habituellement la limite de l'usure adhésive acceptable d'un joint par la valeur admissible de son produit caractéristique  $p_v$  (§ 3.6.1). Comme le montre la formule (3.20), l'intensité d'usure est d'autant plus basse que la dureté des surfaces est plus forte. C'est pourquoi on utilise des céramiques, des carbures de silicium ou de bore frottant contre des pièces en carbone imprégné de résine ou de bronze. Les surfaces d'arbres frottant contre des joints à lèvre en élastomères sont trempées et rectifiées. Ces joints sont en élastomères naturels (caoutchouc) ou synthétiques, l'utilisation de PTFE (Teflon) s'est généralisée parce que son coefficient de frottement est très bas et que ce matériau présente une bonne résistance à l'usure et à l'agression chimique. Les liquides, et particulièrement les huiles, lubrifient les surfaces en réduisant beaucoup l'usure. Il est avantageux de graisser la surface des joints devant assurer l'étanchéité aux gaz (sauf l'oxygène).

Les surfaces frottantes, après rodage, sont généralement très lisses. Mais il est préférable qu'elles présentent certaines ondulations pour que du liquide puisse s'insinuer entre elles et venir les lubrifier; c'est pourquoi on ménage souvent des stries de lubrification pour le passage du liquide. Le battement des surfaces de contact radiales du fait de la flexion des arbres et de désalignement des paliers se révèle utile tant qu'il est minime; on ne doit cependant pas compter sur lui pour assurer la lubrification, car il est difficilement maîtrisable.

L'usure abrasive détruit rapidement les joints. Elle se produit lorsque des particules solides s'insinuent entre les surfaces en mouvement relatif, généralement de la poussière ou du sable extérieur, parfois des particules d'usure métalliques provenant du mécanisme intérieur. Il est bon de protéger le joint principal par un joint auxiliaire extérieur, souvent un simple déflecteur ou un labyrinthe (fig. 22.32).

On évite toute usure et tout problème de lubrification avec des dispositifs d'étanchéité sans contact (étanchéité directe). Leur principe consiste à laisser un très petit espace entre les pièces mobiles afin qu'elles ne se touchent pas, mais il faut alors accepter une certaine fuite (§ 22.4.5).

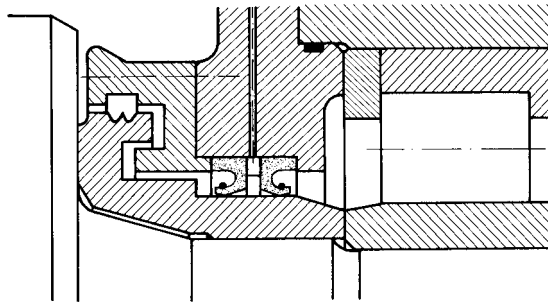


Fig. 22.32 Etanchéité d'un roulement de laminoir à froid.

### 22.4.3 Etanchéité dynamique indirecte

#### Joint à lèvre

Les joints à lèvre s'utilisent notamment pour l'étanchéité de pièces à mouvements alternatifs telles que pistons et tiges de vérins. Il existe une grande variété de joints à lèvre, mais tous consistent en un anneau dont la section en U présente une ou deux lèvres souples. Les lèvres exercent par leur élasticité propre une pression initiale  $p_0$  (précontrainte) (fig. 22.33) sur les parois cylindriques intérieures et extérieures. On démontre qu'il est important pour l'étanchéité que la pression de contact initiale soit concentrée dans une petite zone et présente un front très raide du côté de la pression à retenir. La pression du fluide agit sur les lèvres par l'intérieur et augmente la pression de contact du joint; c'est une application du principe d'auto-assistance. Le joint reste immobile par rapport à l'un des cylindres si la lèvre qui le touche est plus longue que l'autre. La figure 22.32 montre l'utilisation de deux joints à lèvre opposés, l'un vis-à-vis de l'extérieur pour empêcher la pénétration du liquide d'arrosage dans le palier, l'autre pour éviter la fuite de l'huile de graissage du roulement.

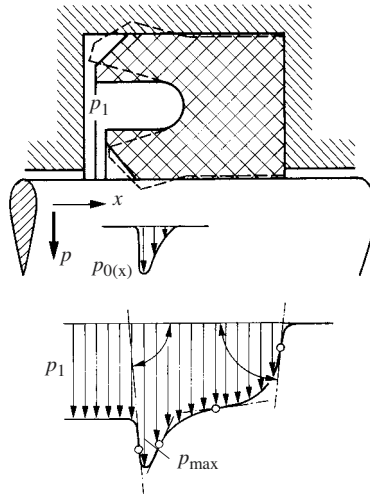


Fig. 22.33 Distribution de pression dans un joint de contact.

En cas de glissement axial, du liquide est entraîné par viscosité, mais il est partiellement ramené vers l'intérieur, à l'encontre du gradient de pression, lors du mouvement inverse [22.4]. La fuite à la tige de piston de vérins hydrauliques est même nulle si le mouvement de rentrée du piston est plus rapide que le mouvement de sortie. La marche à sec use beaucoup le joint qui finit par fuir du fait de la diminution de la précontrainte, ce problème se rencontre avec des gaz.

On prévoit habituellement deux joints montés en tandem: celui qui est disposé du côté du fluide sous pression garantit l'étanchéité principale; le second, ou joint racleur, retient l'inévitable film entraîné par le mouvement sortant de l'espace sous pression. Il le stocke temporairement dans l'espace intermédiaire avant que le liquide ne soit repris lors du mouvement de retour. Ce système n'est vraiment étanche que si les deux joints sont capables de ramener le fluide vers l'intérieur.

Les joints à lèvres destinés à l'étanchéité d'arbres vis-à-vis de l'huile d'un carter sont précontraints par un ressort à boudin enroulé autour de la lèvre souple (fig. 22.34) qui maintient la pression de contact sur l'arbre malgré l'usure de la lèvre.

Il existe des joints à lèvres destinés à retenir des fluides sous pression jusqu'à 10 bars, voire 100 bars dans certains cas.

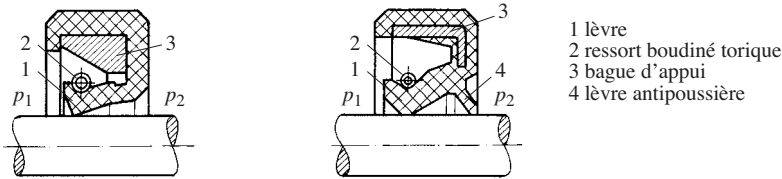


Fig. 22.34 Joint à lèvre pour arbres tournants; deux exécutions.

Le frottement dégage de la chaleur qui chauffe le joint et l'arbre (fig. 22.35) en diminuant considérablement la longévité du joint si sa température dépasse  $120^{\circ}\text{C}$ . Dans ce cas, il est bon de prévoir une lubrification active en munissant la lèvre de stries qui créent un film hydrodynamique utile si l'arbre trempe dans l'huile.

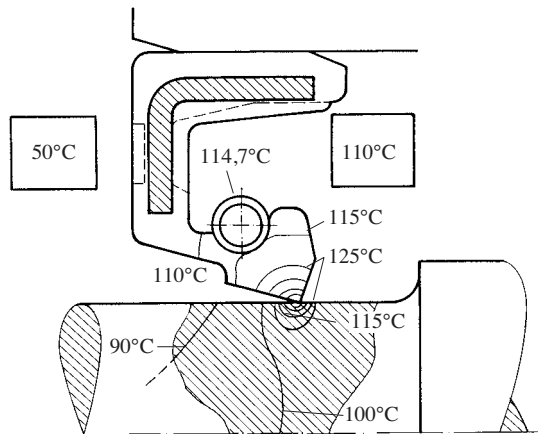


Fig. 22.35 Distribution de température autour d'un joint à lèvre (Freudenberg).

### Presse-étoupe

Un presse-étoupe est un organe d'étanchéité particulièrement simple, utilisé habituellement pour des pièces tournantes: tiges de vannes, arbres de pompes. Il consiste (fig. 22.36) en une boîte à garniture (1) qui contient la garniture (2). Cette dernière est comprimée par la lunette (3) et les goujons (4). La garniture est ainsi appliquée fortement contre l'arbre (5). Autrefois en étoupe suiffée, la garniture est aujourd'hui en coton ou en feutre imprégné de graisse graphitée. On utilise aussi du caoutchouc naturel ou synthétique, des feuilles métalliques roulées ou des tresses de fil métallique.

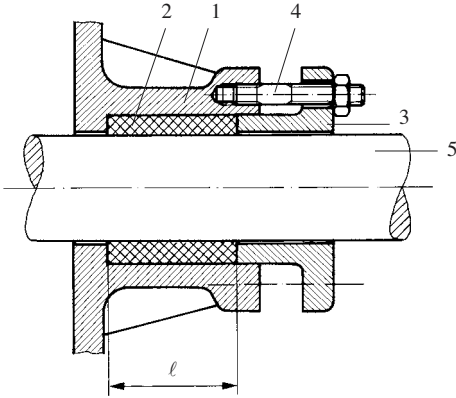


Fig. 22.36 Presse-étoupe.

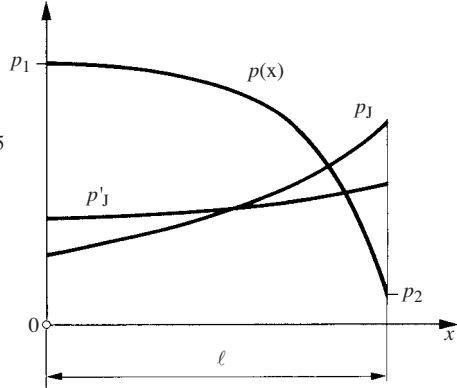


Fig. 22.37 Distribution de pression dans un presse-étoupe.

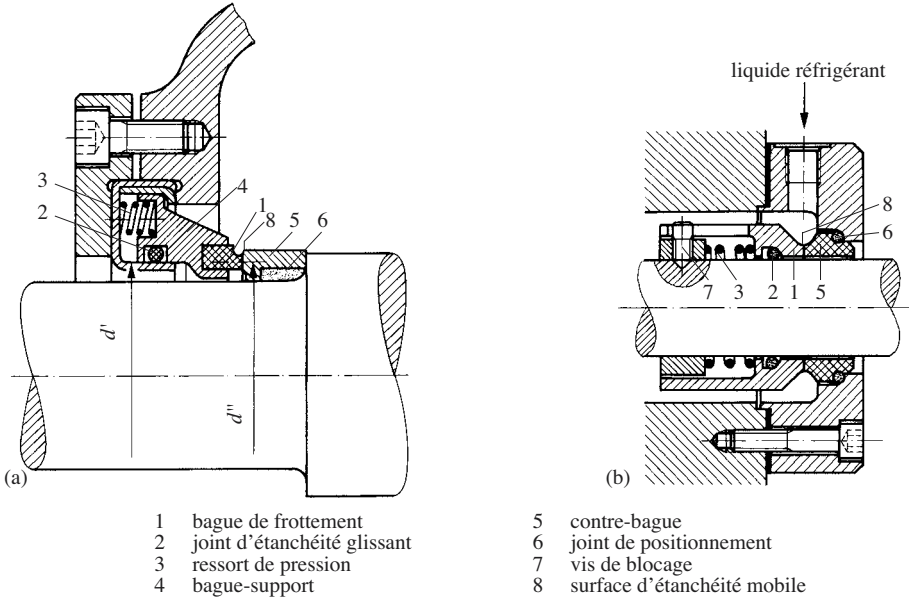
Du fait du frottement latéral dans la boîte à garniture, la pression  $p_J$  sur l'arbre obtenue au serrage diminue exponentiellement depuis la lunette jusqu'au bout de la garniture (fig. 22.37). Le fluide sous pression pénètre dans la garniture et modifie la distribution de pression latérale qui devient  $p'_J$  [22.5]. En cas de fuite, on observe une distribution de pression  $p(x)$  du fluide qui prouve que l'étanchéité est surtout assurée par la partie de la garniture proche de la sortie. Il est inutile de faire de longues garnitures puisque la pression du fluide ne diminue que très peu du côté de la surpression. Tückmantel propose une théorie plus élaborée du presse-étoupe [22.6].

L'usure des garnitures par la rotation de l'arbre a pour effet de diminuer la pression de contact et par conséquent de permettre une certaine fuite. Mais une fuite de liquide lubrifie l'arbre et réduit du même coup la vitesse d'usure. Ce comportement des presse-étoupe oblige pratiquement à toujours admettre une petite fuite, un lent goutte-à-goutte, aux arbres tournant en permanence.

### Garnitures mécaniques

Les garnitures mécaniques assurent l'étanchéité d'arbres tournants. Malgré leur prix plus élevé, elles remplacent de plus en plus les presse-étoupe car elles sont plus sûres, bien étanches et d'une longévité accrue. Les garnitures mécaniques comportent une bague de frottement (1) (fig. 22.38) appliquée par un ou plusieurs ressorts (3) sur une contre-bague (5). Selon les constructions, la bague de frottement est fixe ou tournante. Les ressorts engendrent la pression initiale d'étanchéité et permettent de légers déplacements axiaux de l'arbre sans perte de contact; ils rattrapent aussi automatiquement l'usure des pièces et les dilatations thermiques. Un joint statique radial (2) garantit l'étanchéité le long des pièces glissantes. L'étanchéité mobile est axiale; il est important pour une bonne étanchéité que le fluide sous pression se trouve à la périphérie extérieure de la garniture afin que l'effet de pompage centrifuge s'oppose à la fuite.

Une association judicieuse des matériaux est capitale du point de vue de la résistance à l'usure. La bague de frottement est souvent en résine phénolique chargée de poudre d'amianté, en graphite imprégné de silicone ou de PTFE. La contre-bague est



**Fig. 22.38** Garnitures mécaniques : (a) bloc élastique fixe; (b) bloc élastique tournant.

en fonte grise, en acier trempé, en acier revêtu d'un alliage dur au cobalt, en céramique ou en un carbure. Le couple tribologique ne doit présenter aucune tendance au grippage en cas de marche à sec.

Calculons l'effort  $F_g$  appliqué sur la surface de glissement entre la bague et la contre-bague d'une garniture mécanique (fig. 22.39). La force du ressort  $F_R$  crée la charge initiale, le frottement  $F_f$  du joint statique s'oppose au ressort, mais il peut aussi s'ajouter lors d'un mouvement de l'arbre vers la gauche. La charge initiale est alors :

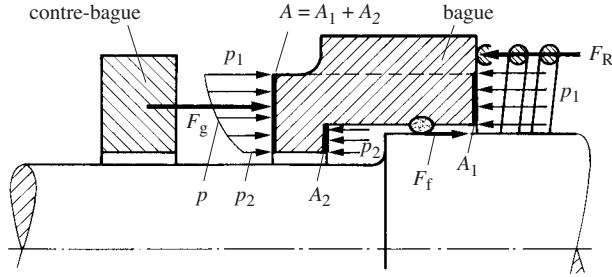
$$F_{g0} = F_R \pm F_f \quad (22.20)$$

L'étanchéité initiale est assurée pour autant que  $F_R > F_f$ . La pression du fluide s'exerce pleinement sur les surfaces annulaires  $A_1$  et  $A_2$ , tandis que du fluide se glisse entre les surfaces d'étanchéité où s'établit une distribution de pression  $p$  résultant de la pression statique du fluide et d'effets dynamiques porteurs analogues à ceux qui existent dans les paliers hydrodynamiques. L'équation d'équilibre des forces fournit la charge sur la garniture en service :

$$F_g = F_{g0} + A_1 p_1 + A_2 p_2 - \int_A p \, dA$$

Le résultat de l'intégration de la pression sur la surface de frottement peut s'écrire sous la forme :

$$\int_A p \, dA = (A_1 + A_2) p_2 + \xi A (p_1 - p_2)$$



**Fig. 22.39** Equilibre des forces sur la bague mobile d'une garniture compensée. La bague et la contre-bague sont éloignées pour faciliter la représentation.

où  $\xi$  est le facteur de distribution de pression. Alors,

$$F_g = F_{g0} + A_1(p_1 - p_2) - \xi A(p_1 - p_2)$$

Posons encore le rapport de la surface sur laquelle agit la haute pression à la surface d'étanchéité:

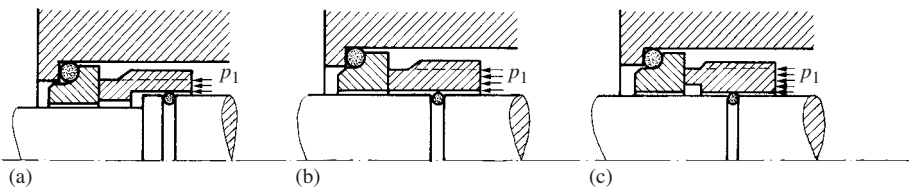
$$k = \frac{A_1}{A} \quad (22.21)$$

et divisons  $F_g$  par  $A$  pour calculer la pression de contact moyenne sur la garniture. On trouve

$$\bar{p}_g = p_{g0} + (k - \xi)(p_1 - p_2) \quad (22.22)$$

Selon cette formule, on influence facilement la pression de contact par des mesures constructives appropriées (fig. 22.40):

- $k \geq 1$  garniture non compensée, utilisée à faible pression. Pratiquement la majorité des garnitures non compensées se situe au voisinage de  $k = 1,1$  à  $1,2$ .
- $k < 1$  garniture compensée, habituellement  $k = 0,6$  à  $0,9$ , utilisée pour de fortes pressions du fluide. La pression d'appui diminue, par conséquent l'échauffement et l'usure sont réduits, mais le danger de décollement des surfaces d'étanchéité augmente.



**Fig. 22.40** Conditions de charge pour garnitures mécaniques: (a)  $k < 1$ ; (b)  $k = 1$ ; (c)  $k > 1$ .

La valeur effective du facteur de distribution de pression  $\xi$  est difficile à évaluer, elle semble se situer entre 0,55 et 0,75.

Le frottement chauffe les garnitures lors de la rotation de l'arbre. Le tourbillonnement du fluide dans la boîte à garniture dégage aussi de la chaleur; pour de grands nombres de Reynolds ( $> 10^5$ ), la puissance dissipée est du même ordre de grandeur que la perte par frottement [22.7]. L'échauffement nuit au bon fonctionnement des garnitures, car la résistance à l'usure de certains matériaux diminue et les fluides s'évaporent entre les surfaces de sorte qu'elles frottent à sec et s'usent rapidement. Il est par conséquent important de refroidir énergiquement les garnitures mécaniques, par exemple, en faisant circuler le liquide qui les baigne à travers un échangeur de chaleur ou en le branchant dans un circuit froid renouvelé.

Les garnitures mécaniques ne sont jamais absolument étanches, mais leur fuite est souvent assez petite pour qu'on ne la voie pas lorsque le liquide s'évapore sous les surfaces de frottement. Des matières solides dissoutes peuvent, après évaporation du solvant, se déposer entre les surfaces et créer des dépôts importants qui usent rapidement la bague la plus tendre par abrasion. L'étanchéité aux liquides pollués, solutions salines, jus de fruits, bains de teinture, est très difficile; on utilise alors des bagues en carbure de tungstène dont la dureté est particulièrement élevée. Une petite fuite contribue à réduire l'échauffement et l'usure en agissant comme un lubrifiant. On retrouve ici, mais à un degré moindre, la difficulté déjà rencontrée avec les presse-étoupe. Il existe des garnitures dont la fuite n'excède pas  $0,01 \text{ cm}^3/\text{h}$ ; une fuite de  $1 \text{ cm}^3/\text{h}$  est normale. Les flexions d'arbre ainsi que des phénomènes d'instabilités thermiques accentuent considérablement la fuite et l'usure [22.8, 22.9]. Une abondante littérature est consacrée aux garnitures mécaniques [22.10, 22.11].

On utilise aussi des garnitures mécaniques pour obtenir l'étanchéité vis-à-vis de gaz et de vapeurs. Mais les bagues fonctionnant à sec s'usent et chauffent d'une manière intolérable; elles fuient rapidement et fortement. On recourt alors à une construction spéciale (fig. 22.41) qui comporte une chambre fermée par deux garnitures montées en opposition dans laquelle on introduit un liquide de barrage qui lubrifie les surfaces, évacue la chaleur de frottement et ferme le passage au gaz.

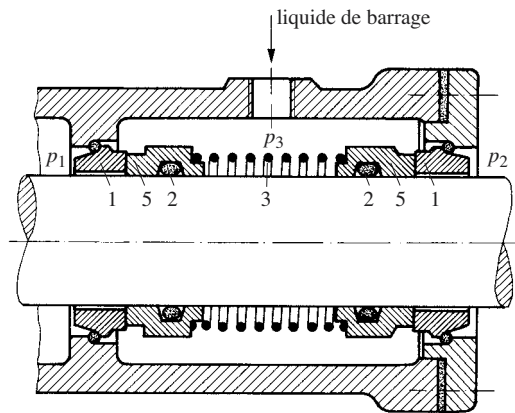
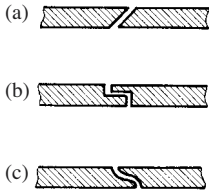


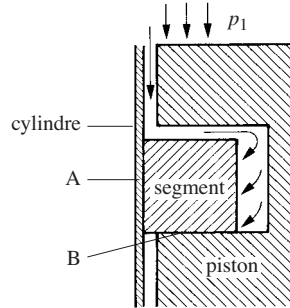
Fig. 22.41 Garniture pour gaz et vapeur avec liquide de barrage. Légende selon figure 22.38.

### Segments de pistons

Les pistons de moteurs et de compresseurs présentent, à froid, un certain jeu dans les cylindres pour permettre leur dilatation thermique, un film d'huile assurant la lubrification. On obtient l'étanchéité par des segments élastiques placés dans des gorges circulaires creusées dans le piston. Les segments sont coupés en Z ou en sifflet (fig. 22.42), pour permettre leur mise en place et leur libre dilatation.



**Fig. 22.42** Coupure de segments: (a) en sifflet; (b) et (c) en Z.



**Fig. 22.43** Etanchéité par segments.

La pression du gaz plaque le segment sur la face B de la gorge (fig. 22.43) et s'infiltré entre le segment et le piston pour exercer une poussée contre la surface A du cylindre contribuant à assurer l'étanchéité (auto-assistance). Du gaz peut fuir par la coupure du sifflet, aussi met-on plusieurs segments, habituellement trois, en décalant leur coupure sur la périphérie. Un segment racleur situé du côté de l'embellage a pour rôle de ramener vers le carter l'huile projetée sur la paroi du cylindre pendant la montée du piston.

#### 22.4.4 Joints congelés

Une technique originale pour empêcher la fuite d'un liquide au passage d'un arbre à travers une paroi consiste à le congeler dans l'espace annulaire à l'aide d'un circuit de refroidissement auxiliaire. L'arbre cisaille la gaine solide à sa surface et la chaleur dégagée par le frottement fait fondre une très mince couche dont le liquide agit comme un lubrifiant. L'épaisseur de ce film dépend de l'équilibre thermique entre la production de chaleur et la puissance de refroidissement. Il s'avère que l'étanchéité est très satisfaisante. Ce principe est utilisé avec succès pour des pompes à sodium liquide [22.12] et a aussi été essayé pour réaliser l'étanchéité au passage de coque d'arbres d'hélice de bateaux et de sous-marins. Zbinden [22.13] a réalisé l'étanchéité d'une pompe à eau à hyperpression en réfrigérant la pénétration du piston dans le cylindre par de la saumure (fig. 22.44). Le mouvement du piston cisaille la glace, mais l'eau est repoussée à l'intérieur par un effet de viscosité, car le film liquide entre le piston et la glace est sensiblement plus mince que 1 mm. Le calcul et les essais prouvent que cette garniture reste étanche pour une pression de quelques milliers de bars si la glace est très mince ( $< 15 \mu\text{m}$ ), une tige de piston en un matériau très dur ne s'use guère.



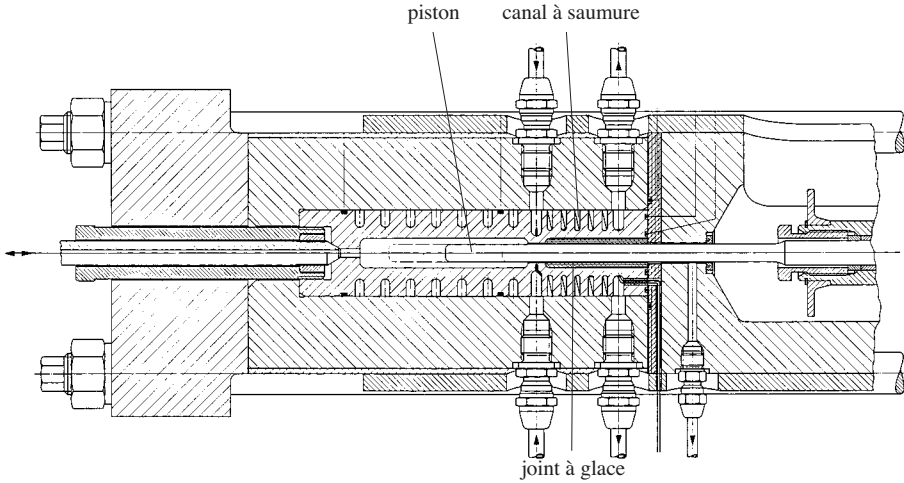


Fig. 22.44 Joint congelé d'une pompe à eau à piston pour très hautes pressions.

#### 22.4.5 Etanchéité dynamique sans contact

Les systèmes d'étanchéité sans contact permettent le libre mouvement des pièces sans frottement ni usure. Ils s'appliquent surtout lorsque les vitesses relatives sont grandes. Une fente lisse (fig. 22.45a) n'est valable que pour de faibles différences de pression; le débit de fuite se calcule par (22.5) où l'on introduit  $b = \pi d_m$ . La fuite est plus petite avec un arbre ou un alésage rainuré (fig. 22.45b) qui accroît la perte de charge. L'étanchéité est efficace si la fente est étroite, ce qui pose des problèmes dans les grandes machines tournantes du fait des jeux dans les paliers, des déformations et des dilatations thermiques. Dans ces cas, on recourt à des labyrinthes qui consistent en une suite de barrières imbriquées (fig. 22.45c). Des gaz ou des vapeurs sous pression se détendent dans les chambres successives, le blocage sonique de l'écoulement limite efficacement la fuite. Le montage des labyrinthes n'est possible que si la bête est exécutée en deux moitiés.

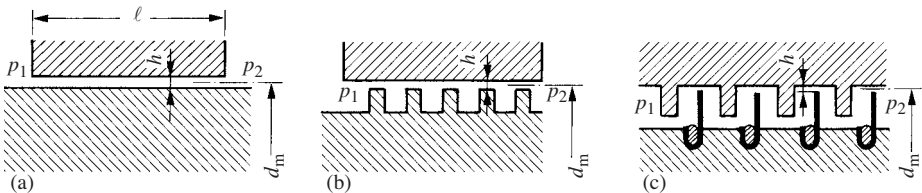
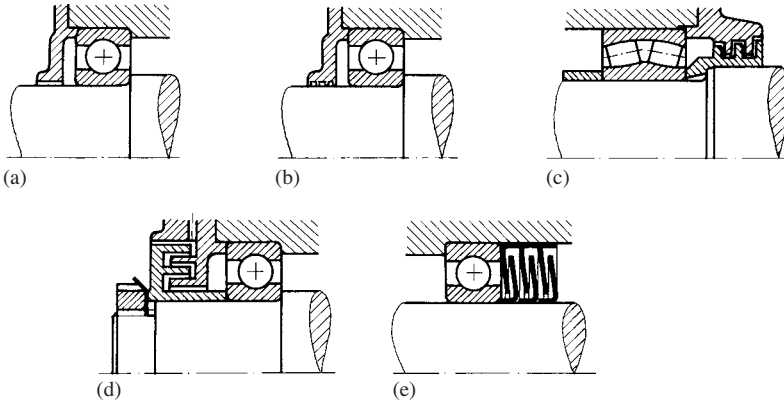


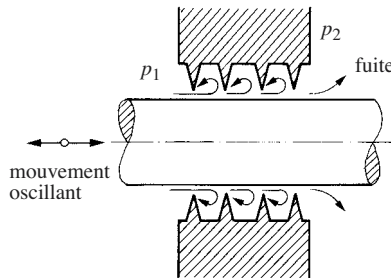
Fig. 22.45 Etanchéités dynamiques directes sans contact: (a) fente lisse; (b) arbre rainuré; (c) labyrinthe.

Ces dispositifs d'étanchéité se rencontrent dans les paliers à roulement pour prévenir la sortie de la graisse et la pénétration de polluants (fig. 22.32, 22.46 et 22.50). Les roulements à déflecteurs, graissés, sont protégés des particules métalliques d'usure que l'on rencontre toujours dans les carters; leur longévité est nettement prolongée.



**Fig. 22.46** Joints sans contact pour arbres: (a) fente; (b) rainures; (c) labyrinthe radial; (d) labyrinthe axial; (e) labyrinthe à lamelles (SKF).

Les joints rainurés s'emploient aussi pour l'étanchéité des pistons de compresseurs sans huile. Les pistons sont pourvus de rainures et la paroi intérieure des cylindres de fines stries circulaires. Les fuites ne constituent dans ce cas pas une perte de gaz mais abaissent seulement le rendement volumétrique des machines. L'étanchéité des tiges de piston au travers des fonds de cylindre s'obtient de manière analogue (fig. 22.47).



**Fig. 22.47** Principe d'un joint à labyrinthe pour tige de piston.

Les pièces en mouvement peuvent se toucher si leur vitesse relative est petite. La géométrie des pièces doit être aussi parfaite que possible, un état de surface de haute qualité permet un ajustement glissant. Les pistons des pompes et moteurs hydrauliques sont lubrifiés par le fluide. On évite le pompage du liquide dans le joint si le guidage est plus long que l'amplitude du mouvement.

## 22.4.6 Barrages fluides

### Étanchéité indirecte

Il faut parfois séparer très rigoureusement deux milieux, soit parce que le fluide contenu dans l'un pourrait venir contaminer ou polluer l'autre, soit parce que les fluides de chaque milieu pourraient réagir chimiquement entre eux en cas de fuite. Le

principe de séparation consiste à prévoir un espace (3) entre les milieux (1) et (2) (fig. 22.48). Selon les cas, cet espace est vide et recueille les fuites éventuelles; on peut aussi y mettre un liquide intermédiaire, appelé **liquide de barrage**, chargé de lubrifier et de refroidir les joints. Selon la pression du fluide de barrage, on a plusieurs possibilités:

- $p_1 > p_3$  en cas de fuite, le fluide (1) s'échappe dans l'espace intermédiaire;
- $p_1 < p_3$  en cas de fuite, le fluide intermédiaire pénètre dans l'espace (1);  
solution utile lorsqu'il faut empêcher à tout prix la fuite de (1).

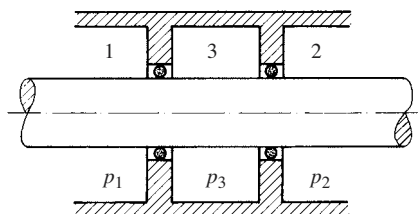


Fig. 22.48 Principe d'un espace de barrage.

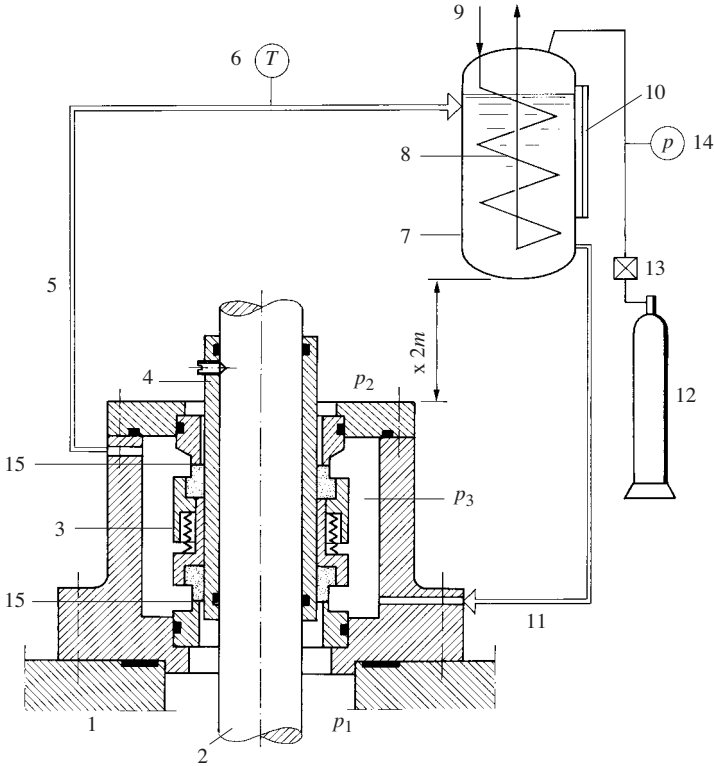
Le fluide de barrage doit être compatible avec les autres milieux et ne pas provoquer une réaction chimique dangereuse; on utilise souvent de l'eau. La figure 22.41 montre un barrage en relation avec une garniture mécanique d'étanchéité. Un autre exemple est fourni par le passage d'arbre de l'agitateur d'un réacteur chimique (fig. 22.49). Le liquide de barrage est pressurisé par un gaz inerte à une pression supérieure de 2 bars à celle qui règne dans le réacteur, l'étanchéité de ce liquide vis-à-vis de l'atmosphère est aussi obtenue par une garniture mécanique. Le réservoir du liquide de barrage se trouve au-dessus des garnitures et contient un serpentin de refroidissement de sorte que l'échauffement du liquide dans le passage d'arbre crée une circulation par thermosiphon. L'observation du niveau dans le réservoir met en évidence toute fuite des garnitures; on prévoit généralement une surveillance automatique avec alerte.

### Etanchéité semi-directe

Dans les étanchéités semi-directes à différence de pression nulle, on peut remplir l'espace avec un liquide ou une graisse pour rendre les passages d'arbre étanches aux poussières et aux projections de liquides. La figure 22.50 montre des labyrinthes remplis de graisse pour des roulements. Une étanchéité très efficace, utilisée notamment dans les mémoires à disque des ordinateurs, est obtenue par des *joints ferro-fluides*. Le ferro-fluide, une huile contenant de très fines particules de fer en suspension, est maintenu dans une étroite fente par un champ magnétique créé par un aimant permanent (fig. 22.51); il s'oppose à tout passage de poussière.

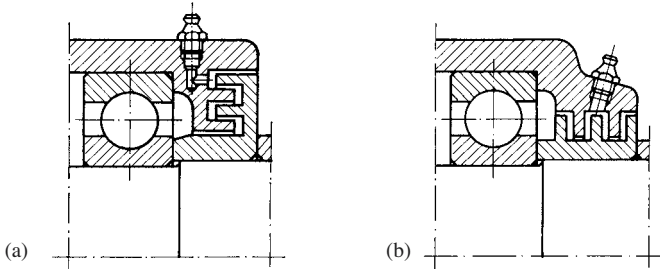
En cas de surpression, il faut mettre le fluide d'étanchéité sous une pression supérieure. Une première solution consiste à injecter un fluide sous pression, eau, huile ou gaz au centre de la gaine d'étanchéité (fig. 22.52). Il fuit de chaque côté et se récupère si c'est un liquide.

On évite la consommation permanente de fluide en créant la pression d'étanchéité par un effet centrifuge (fig. 22.53). Le liquide de barrage est mis en rotation par



- |   |                              |    |                              |
|---|------------------------------|----|------------------------------|
| 1 | couvercle du réacteur        | 9  | eau de refroidissement       |
| 2 | arbre de l'agitateur         | 10 | indicateur de niveau         |
| 3 | garniture mécanique double   | 11 | retour du liquide de barrage |
| 4 | manchon d'usure              | 12 | bouteille de gaz comprimé    |
| 5 | sortie du liquide de barrage | 13 | détendeur                    |
| 6 | thermomètre                  | 14 | manomètre                    |
| 7 | réservoir de barrage         | 15 | surfaces d'étanchéité axiale |
| 8 | serpentin de refroidissement |    |                              |

**Fig. 22.49** Schéma d'installation d'un dispositif de barrage à circulation par thermosiphon.



**Fig. 22.50** Labyrinthes graissés: (a) axial; (b) radial.

un disque porté par l'arbre, la pression d'étanchéité est proportionnelle au carré de la vitesse périphérique et à la masse volumique du fluide. Le cas échéant, on prévient un échauffement trop important en injectant en continu du liquide frais. Le joint est inef-

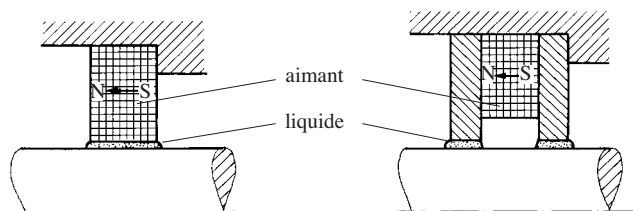


Fig. 22.51 Joint avec liquide ferro-fluide.

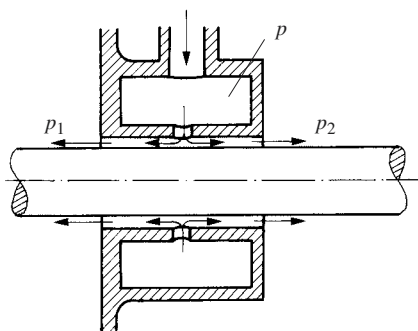


Fig. 22.52 Etanchéité d'arbre semi-directe avec injection d'un fluide de barrage.

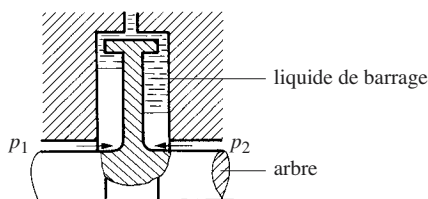


Fig. 22.53 Etanchéité d'arbre à liquide centrifugé.

ficace à petite vitesse et à l'arrêt, mais on peut maintenir l'étanchéité en injectant alors un liquide ou un gaz de barrage.

Les pompes et compresseurs à anneau liquide sont employés pour refouler des gaz sans les polluer par de l'huile (fig. 22.54). Un rotor à palettes (9) monté sur l'arbre (2) tourne autour d'un axe situé excentriquement dans un corps cylindrique (1). Un liquide, généralement de l'eau, est introduit en continu dans la machine. Il est mis en rotation par les palettes et projeté à la périphérie par la force centrifuge qui lui donne la forme d'un anneau liquide (15) assurant l'étanchéité extérieure du rotor. L'espace libre (17), en forme de croissant, entre le moyeu et la surface intérieure de l'anneau liquide, est divisé en cellules par les palettes de la roue. L'étanchéité latérale est assurée par les disques de distribution (6). Le gaz aspiré débouche par le canal (14), puis il est comprimé vers le canal de refoulement (18). Le liquide assure non seulement l'étanchéité, mais il évacue aussi la chaleur de compression du gaz par une circulation continue.

#### 22.4.7 Parois étanches

On évite naturellement toute fuite d'un fluide sous pression en l'enfermant dans une enceinte étanche dont ne sort aucune pièce mobile. Ce principe est largement utilisé dans la construction de pompes centrifuges afin de supprimer l'entretien (fig. 22.55). Le rotor du moteur électrique tourne dans le liquide; une chemise fixe et non magnétique est placée dans l'entrefer du moteur. Le rotor est aussi gainé et protégé. Les paliers lisses sont lubrifiés directement par le liquide pompé, pour autant qu'il ne contienne pas de particules solides en suspension. Le rendement de ces moteurs est relativement faible du fait de la dissipation d'énergie par frottement visqueux autour du rotor et par l'allongement du circuit magnétique de l'entrefer. Il existe aussi des constructions à rotor et stator immergés, le câble d'alimentation étant alors

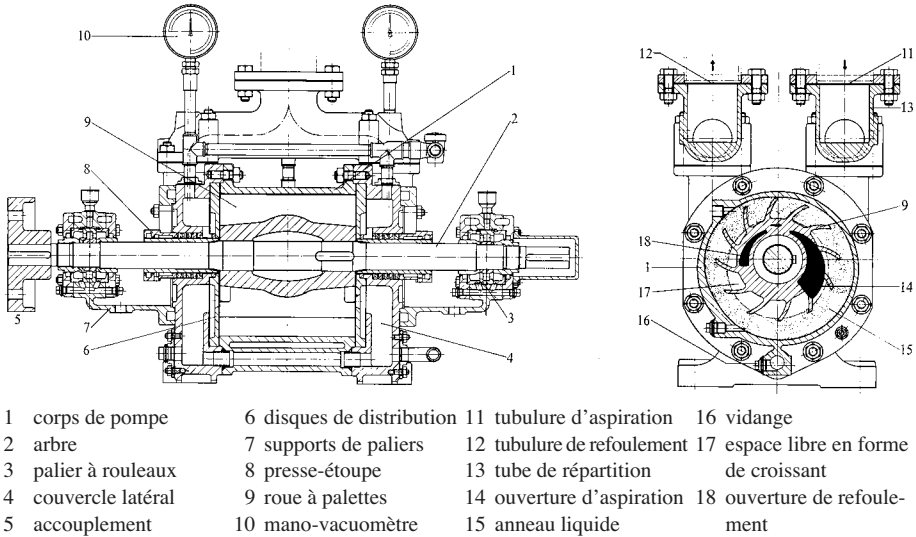


Fig. 22.54 Pompe à anneau liquide (Sulzer).

conduit par un passage étanche. La figure 22.56 montre le même principe utilisé dans un accouplement magnétique de pompe hermétique, mais le moteur d'entraînement est normal et séparé de la pompe.

Selon le liquide, les paliers lisses de ces pompes posent certains problèmes. Pour s'en affranchir, Sulzer Pompes SA a breveté une conception à guidage magnétique du rotor. L'originalité consiste en la suppression des paliers magnétiques distincts; les forces magnétiques nécessaires sont générées dans le moteur lui-même. Cette conception permettra aussi la réalisation de turbomachines et d'ultracentrifugeuses à très grande vitesse.

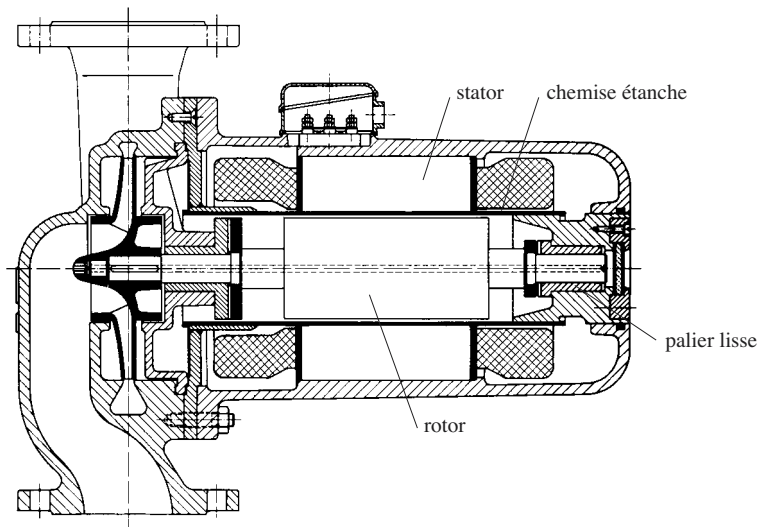
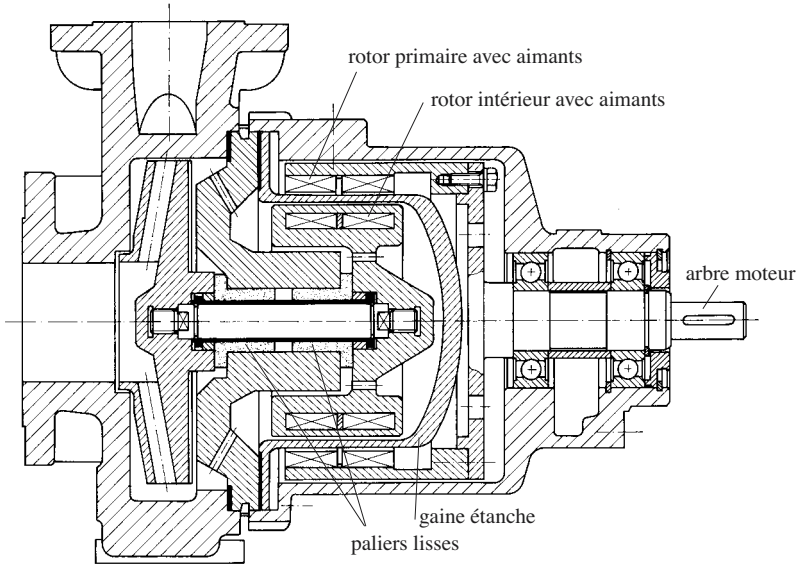
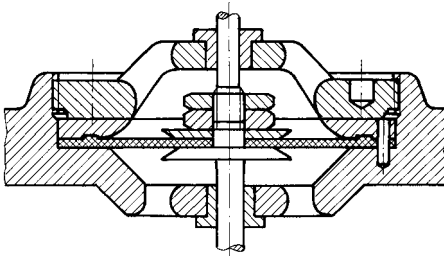


Fig. 22.55 Pompe avec rotor noyé (Rütschi SA).

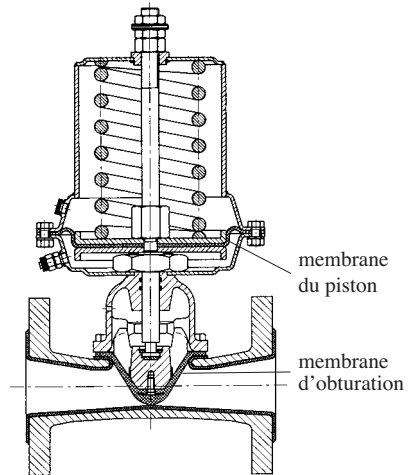


**Fig. 22.56** Pompe entraînée par un accouplement magnétique à travers une paroi étanche.

Des organes à mouvement limité peuvent pénétrer dans une enceinte étanche à travers une membrane souple fixée à la paroi avec une étanchéité statique. La figure 25.57 montre une membrane pour de petits mouvements axiaux et la figure 22.58 un robinet à commande pneumatique, où une membrane assure l'étanchéité du piston et une autre constitue l'obturateur du robinet.



**Fig. 22.57** Membrane d'étanchéité pour une tige coulissante.



**Fig. 22.58** Robinet à membrane à commande pneumatique (KSB).

Les soufflets sont destinés aux mouvements de grande amplitude. Ils sont idéals pour assurer l'étanchéité des tiges de commande de robinets traversés par des fluides dangereux (fig. 22.59). Une extrémité du soufflet est soudée à l'obturateur, l'autre est liée au corps de vanne avec un joint statique. Le fluide se trouve à l'intérieur du soufflet. Il arrive que les soufflets se déchirent par fatigue et fuient, c'est pourquoi le chapeau du robinet est équipé d'un presse-étoupe de sécurité; l'espace intermédiaire est éventuellement relié à un détecteur de fuite pour la surveillance du soufflet.

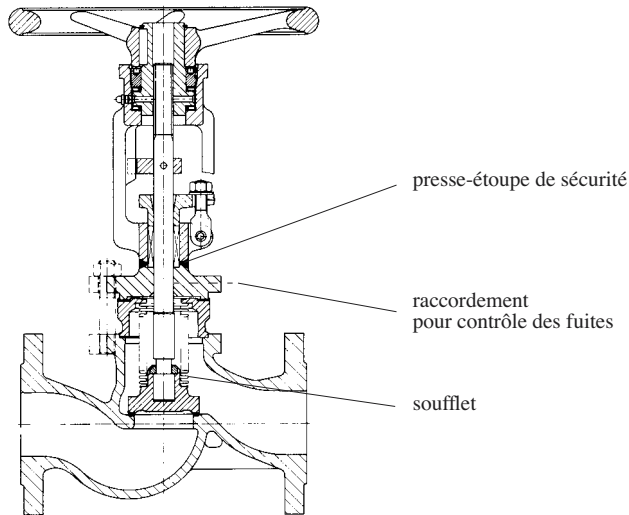


Fig. 22.59 Robinet avec étanchéité de tige à soufflet (KSB).

## 22.5 CONCLUSIONS PRINCIPALES

L'étanchéité d'une enceinte sous pression se quantifie par le débit de la fuite. Les petites fuites sont difficiles à mesurer et à déceler. Le dimensionnement des étanchéités sur la base d'un débit de fuite admissible est encore très difficile.

Les fluides s'écoulent entre les aspérités des surfaces en contact; la tension superficielle peut arrêter les liquides lorsque la différence de pression est faible. Des liquides volatils s'évaporent dans les fentes et fuient sous forme de vapeur.

L'étanchéité statique, entre surfaces immobiles, s'obtient:

- en polissant les surfaces et en les pressant fortement l'une contre l'autre;
- en remplissant l'espace par une substance à comportement plastique (joint);
- en assemblant les pièces de manière permanente.

Les joints doivent résister à la température et à l'agression chimique par le fluide. Leur étanchéité requiert une pression de serrage d'autant plus intense que la surpression est plus forte. Les joints serrés par des boulons sont susceptibles de fuir après un certain temps si le serrage a diminué du fait du fluage du joint. On doit reprendre le serrage ou prévoir un assemblage assez souple pour maintenir la pression sur le joint, spécialement lorsque des dilatations thermiques sont à craindre.



Les montages autoclaves s'emploient surtout à haute pression. Leur étanchéité n'est pas affectée par le fluage du joint mais ils exigent toujours un certain serrage initial.

Les soudures sont parfaitement étanches. Très souvent, on se contente de mandriner les tubes d'échangeur de chaleur dans les plaques tubulaires; il ne faut jamais mandriner puis ensuite souder.

L'étanchéité entre des pièces mobiles, dite étanchéité dynamique, s'obtient par:

- des joints à lèvre dont la lèvre d'étanchéité est appliquée contre l'arbre ou la tige en mouvement par son élasticité propre, par un ressort ou par la pression du fluide;
- des presse-étoupe;
- des garnitures mécaniques;
- des segments;
- des joints congelés;
- des joints à liquide ferro-fluide;
- des liquides de barrage.

Les dispositifs d'étanchéité à labyrinthe ne font que limiter le débit de fuite, mais les pièces mobiles ne se touchent pas.

Il est bon de lubrifier les surfaces d'étanchéité glissantes, soit par de la graisse, soit par le liquide à retenir. A cet égard, une petite fuite est souvent bénéfique. Le montage de deux joints avec l'interposition d'un liquide de barrage est intéressant pour l'étanchéité vis-à-vis de gaz ou de vapeurs. Cette technique offre aussi l'avantage de séparer rigoureusement deux fluides.

L'étanchéité parfaite au passage de pièces effectuant seulement de petits mouvements s'obtient avantageusement avec des membranes souples ou des soufflets. On peut aussi transmettre magnétiquement un mouvement à travers une paroi fixe.

## RÉSISTANCE ET CHOIX DES MATÉRIAUX

### 23.1 INTRODUCTION

La matérialisation d'un objet passe par le choix d'un matériau dont les propriétés doivent satisfaire les exigences du service attendu. L'étude détaillée des matériaux sortant du cadre de cet ouvrage, on se limitera à l'aspect résistance et à des généralités. On insistera sur le fait que les caractéristiques effectives du matériau d'une pièce sont souvent très différentes des valeurs standard mesurées avec des éprouvettes et données dans les catalogues.

Les pièces de machines sont le plus souvent sollicitées dynamiquement, c'est pourquoi on accorde une large place au phénomène de fatigue. On interprétera la croissance des fissures à la lumière de la mécanique de la rupture.

Le fluage des matériaux sera à peine esquissé, car il intervient surtout dans les machines thermiques. La présentation détaillée du comportement des matériaux non métalliques sort du cadre de cet ouvrage.

Le choix d'un matériau est souvent délicat. Il ne repose jamais uniquement sur des considérations mécaniques; il faut toujours aussi tenir compte des méthodes de fabrication, des coûts, de la résistance aux agressions chimiques, des problèmes d'élimination ou de recyclage après usage. L'expérience acquise est d'un précieux secours. On présente une méthode raisonnée basée sur la notion d'indice de performance qui tient compte de la forme et de la fonction des pièces.

Ce chapitre sert de base au chapitre 24 consacré au dimensionnement à la résistance. Il est structuré comme suit:

- Section 23.2 Description des processus de rupture.
- Section 23.3 Résistance statique des matériaux homogènes et des pièces.
- Section 23.4 Résistance des matériaux en présence de défauts, éléments de mécanique de la rupture.
- Section 23.5 Résistance à la fatigue des matériaux et des pièces.
- Section 23.6 Notions de fluage.
- Section 23.7 Choix des matériaux sur la base de leurs performances et de leur utilisation.
- Section 23.8 Conclusions principales.

Le lecteur intéressé trouvera une abondante littérature spécialisée. Citons, par exemple, [23.1, 23.2, 23.3, 23.4].

## 23.2 PROCESSUS DE RUPTURE

Selon les conditions d'application des charges et selon le matériau, on observe plusieurs modes de rupture de pièces. Ils se reconnaissent pratiquement au faciès des fractures. Chacun s'étudie par ses propres méthodes expérimentales et par des théories appropriées. On est ainsi amené à définir des résistances limites des matériaux pour chaque type de rupture.

### Rupture statique

La rupture est dite statique lorsque la charge appliquée croît très lentement, à une vitesse inférieure à 10 MPa/s. Selon le comportement avant rupture, on distingue encore la **rupture ductile** et la **rupture fragile**. La première est précédée de fortes déformations au voisinage de la fracture (fig. 23.1), une striction en cas de rupture par traction ou un fort amincissement de la pièce en cas de rupture de flexion. La majeure partie de la surface de rupture présente un aspect fibreux.

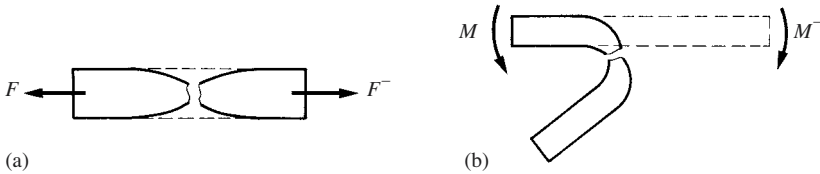


Fig. 23.1 Rupture à comportement ductile: (a) traction; (b) pliage.

Une rupture fragile se produit sans déformation plastique apparente (fig. 23.2). Elle est toujours brutale, aucune déformation préalable ne prévient de l'imminence de la rupture. La fracture est franche et d'un aspect soyeux.

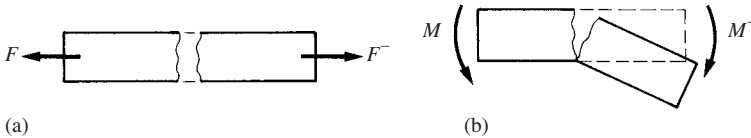


Fig. 23.2 Rupture à comportement fragile: (a) traction; (b) pliage.

### Rupture de fatigue

Une rupture de fatigue peut survenir lorsque la contrainte dans le matériau d'une pièce a subi de très nombreuses variations d'intensité. Une fissure s'amorce, souvent à la surface, puis se développe progressivement à l'intérieur de la pièce jusqu'à la rupture. La rupture de la section restante peut avoir un caractère ductile ou fragile. Ce phénomène s'étudie à l'aide de la théorie de la mécanique de la rupture. Les ruptures de fatigue se produisent pour des niveaux de contrainte sensiblement inférieurs à la résistance à la traction du métal, même pour un matériau très ductile. La contrainte effective de rupture par fatigue est affectée principalement par la géométrie de la pièce (concentration de contrainte et taille) et par l'état de surface (rugosité, corrosion, dureté). On estime que 80 à 90% des ruptures accidentelles sont causées par la fatigue.

**Rupture au choc**

Des chocs répétés provoquent la rupture en plusieurs étapes. Après une première fissuration, la fissure progresse beaucoup à chaque coup jusqu'à la rupture finale. Un seul choc très important peut suffire pour casser une pièce, le comportement du matériau est essentiellement fragile.

**Fluage**

On appelle fluage la déformation permanente croissant au cours du temps d'un matériau soumis à une charge constante. La déformation croît jusqu'à la rupture. Ce phénomène s'observe habituellement lorsque la température d'utilisation d'un matériau est élevée, mais le fluage peut déjà se produire à la température ambiante pour le plomb et certains polymères. Le fluage joue un rôle prédominant dans le dimensionnement des machines et installations thermiques et des pièces en matériaux polymères.

**Fissuration par corrosion sous tension**

La corrosion sous tension est un mécanisme de rupture qui résulte de l'action d'un milieu corrosif sur le réseau cristallin de certains métaux, mais seulement lorsqu'il existe simultanément une contrainte de traction. La corrosion sous tension se manifeste par la propagation lente d'une fissure intercristalline. Contrairement à la fatigue, où la propagation n'a lieu que si les contraintes varient cycliquement, une fissure de corrosion sous tension se propage aussi lorsque la contrainte reste constante. La zone de fracture correspondant à la propagation de la fissure a une allure fragile, la rupture finale étant ductile ou fragile selon la nature du matériau. C'est pourquoi ce mode de rupture s'étudie aussi à la lumière de la mécanique de la rupture.

La fissuration par corrosion sous tension a causé, par exemple, la déchirure de tôles de chaudière (soude caustique dans l'eau), l'explosion de bouteilles d'air comprimé en alliage aluminium-magnésium en atmosphère marine, ou une épidémie de ruptures de boulons fixant des rails de chemin de fer sur les traverses sous l'effet de la condensation de brouillard chargé d'acide sulfurique provenant de la pollution par les fumées [23.5]. Elle est aussi typique d'aciers au chrome-nickel, dits inoxydables, en présence de chlore.

**Rupture d'éprouvettes et rupture de pièces**

Les caractéristiques de résistance des matériaux se mesurent avec des éprouvettes normalisées dans des conditions expérimentales bien déterminées. En revanche, le comportement d'un matériau et sa résistance sont souvent très différents dans une pièce de machine parce que sa taille et sa forme s'éloignent de celles de l'éprouvette. Il faut toujours être très prudent et ne pas utiliser sans autre les caractéristiques mécaniques mesurées avec des éprouvettes (tables de matériaux) pour dimensionner des pièces. L'ouvrage de Collins [23.4] présente de manière détaillée les divers modes de défaillance.

**23.3 RÉSISTANCE STATIQUE****23.3.1 Essai de traction simple**

La mesure des caractéristiques mécaniques principales d'un matériau se fait par un essai de traction ou de compression normalisé. Une éprouvette cylindrique

(fig. 23.3) est soumise à une force de traction  $F$ , sa section initiale est  $A_0$ . Habituellement  $d = 10 \text{ mm}$ .

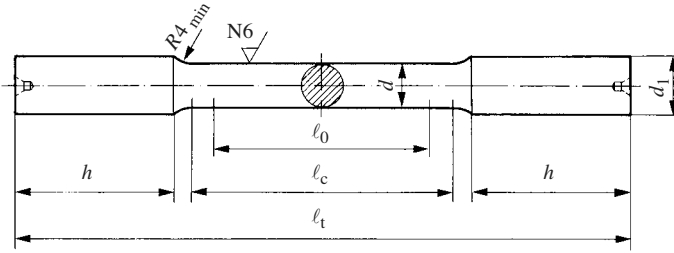


Fig. 23.3 Epreuve de traction.

La **contrainte nominale** est par définition la charge rapportée à la section initiale de l'éprouvette:

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0} \quad (23.1)$$

Une portion de longueur initiale  $\ell_0$  prend une longueur  $\ell$ . L'**allongement nominal**, dit aussi allongement relatif, vaut

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad (23.2)$$

La base de mesure sur l'éprouvette est  $\ell_0 = 5d$  ou  $\ell_0 = 10d$ .

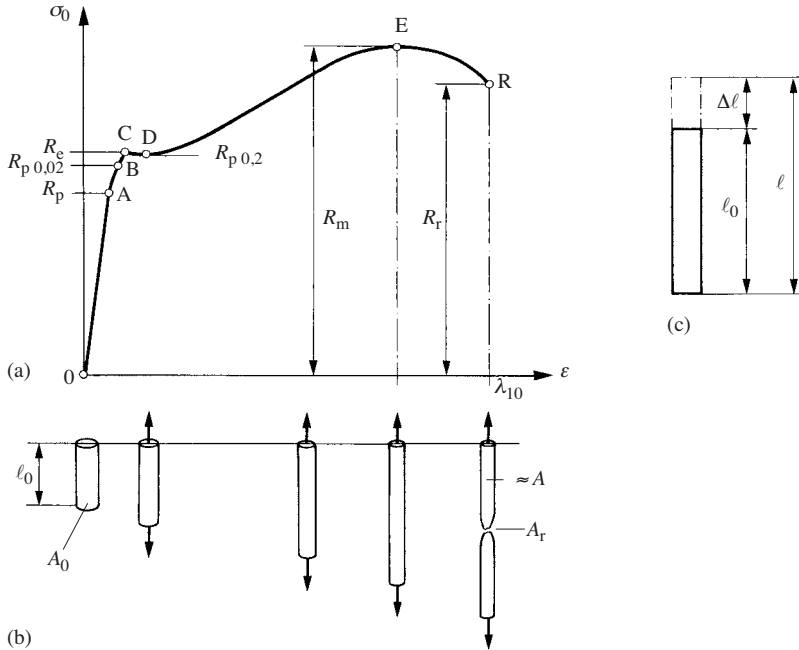
La figure 23.4 montre le diagramme nominal de traction  $(\sigma_0, \varepsilon)$  et la déformation d'une éprouvette d'acier doux ou d'un métal ductile présentant un palier d'écoulement marqué. Rappelons les principaux éléments retenus dans les normes pour caractériser le comportement statique des matériaux.

La **limite de proportionnalité**  $R_p$  correspond à la fin du domaine proportionnel (point A).

La **limite apparente d'élasticité**  $R_e$  ou **limite d'écoulement** correspond au seuil d'écoulement plastique plus ou moins marqué du diagramme (point C).

Jusqu'au point C, la déformation est approximativement élastique; au-delà, elle est plastique. Selon le matériau, le seuil d'écoulement C n'est pas toujours marqué. En outre, il est souvent difficile de situer avec précision la limite de proportionnalité. On définit alors des limites conventionnelles associées à une déformation résiduelle déterminée. Ce sont:

- la **limite conventionnelle de proportionnalité**  $R_{p0,02}$  correspondant à un allongement rémanent de 0,02% (point B);
- la **limite conventionnelle d'élasticité**  $R_{p0,2}$ , dont l'allongement rémanent est 0,2% (point D); on utilise généralement dans les calculs de dimensionnement des éléments de machines la valeur  $R_{p0,2}$ , sauf dans les problèmes de flambage où il est prudent de faire intervenir  $R_{p0,02}$ .



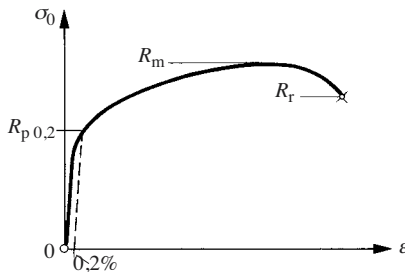
**Fig. 23.4** Essai de traction d'un acier doux: (a) diagramme nominal; (b) forme de l'éprouvette; (c) longueurs.

Lorsque la charge augmente encore, les déformations s'accroissent fortement. On observe le phénomène de **striction**, c'est-à-dire un étirement local important avec un rétrécissement marqué de l'éprouvette. La contrainte nominale passe par un maximum, point E, lorsque débute la striction. La rupture survient au point R.

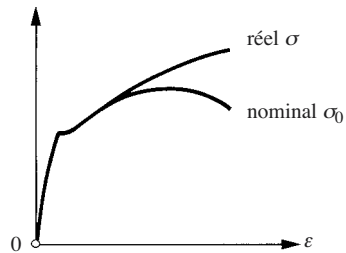
La **résistance à la traction**  $R_m$  correspond à la contrainte nominale la plus élevée supportée par l'éprouvette (point E).

La **contrainte de rupture**  $R_r$  est la contrainte nominale pour laquelle l'éprouvette se casse.

La figure 23.5 représente le diagramme nominal de traction d'un acier austénitique au chrome-nickel. Il ne présente pas de palier d'écoulement, la plastification est progressive, c'est pourquoi on ne peut définir que  $R_{p0.2}$  ou  $R_{p0.02}$ .



**Fig. 23.5** Caractéristique d'un acier austénitique.



**Fig. 23.6** Diagramme de traction nominal et réel.

On sait que la section de l'éprouvette diminue lorsque la force de traction augmente, particulièrement lorsque survient la striction. C'est pourquoi la **contrainte réelle**, dans la section la plus petite, est toujours supérieure à la contrainte nominale; elle augmente constamment jusqu'à la rupture (fig. 23.6).

L'**allongement à la rupture** est l'allongement nominal  $\lambda$  correspondant à la rupture (fig. 23.4). On note  $\lambda_5$  ou  $\lambda_{10}$  selon qu'il est mesuré sur une base  $\ell_0$  égale à  $5d$  ou  $10d$ . Comme la striction est locale, on a toujours  $\lambda_{10} \leq \lambda_5$ . Il faut être conscient que les fortes valeurs rencontrées pour ces allongements, jusqu'à 35 à 50% pour des aciers très ductiles, proviennent de la striction et ne correspondent pas à l'image que donne la déformation d'un morceau de caoutchouc.

Un matériau sollicité en compression présente aussi un domaine de proportionnalité jusqu'à une certaine limite élastique; mais, au-delà, le matériau ne casse pas. On admet que les valeurs de  $R_e$  ou  $R_{p0,2}$  sont pareilles en compression et en traction, sauf pour la fonte grise où la limite élastique est environ trois fois plus élevée en compression.

Le **coefficient de Poisson** des métaux vaut environ 0,3 et le volume du matériau augmente lorsqu'il est sollicité en traction. Le caoutchouc est remarquable parce qu'il se déforme à volume constant; son coefficient de Poisson vaut 0,5.

En considérant le diagramme de traction d'un acier, on distingue principalement deux domaines de comportement: élastique et plastique. Pour simplifier les calculs, on les schématise (caricature) selon la figure 23.7. Dans le **domaine élastique**, on admet que la déformation est proportionnelle à la contrainte et qu'elle est parfaitement réversible. La loi de Hooke

$$\sigma = E \varepsilon \quad (23.3)$$

est à la base de la mécanique linéaire des solides. Le **module d'élasticité**  $E$  est une caractéristique du genre de matériau, mais sa valeur est indépendante de la nuance. Notons que la loi de Hooke n'est pas valable pour la fonte grise.

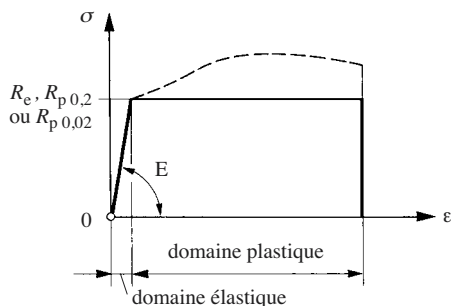


Fig. 23.7 Schématisation d'un diagramme de traction.

Dans le **domaine plastique**, les déformations sont irréversibles (fig. 23.8). Supposons qu'on interrompe un essai au point P et qu'on décharge l'éprouvette; la déformation diminue linéairement avec la contrainte, mais il subsiste une **déformation rémanente**  $\varepsilon_r$  (point B) après décharge complète. Chargeons à nouveau l'éprouvette;

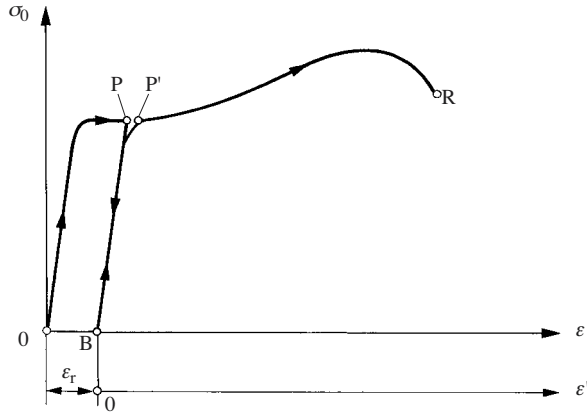


Fig. 23.8 Ecrouissage et allongement rémanent.

la déformation croît avec la nouvelle abscisse  $\varepsilon'$ , mais il est remarquable que la croissance est encore proportionnelle à la déformation jusqu'en un point P', pratiquement confondu avec le point P de la traction précédente. Puis l'essai se poursuit comme s'il n'avait pas été interrompu. Le métal qui a subi un allongement rémanent important modifie sensiblement sa courbe de traction : l'allongement à la rupture est plus petit qu'avant, la relation de proportionnalité s'étend dans un domaine plus large qu'avec le métal neuf (fig. 23.11) ; on dit que le métal a été *écroui*.

On facilite habituellement les calculs dans le domaine plastique en admettant que la contrainte est constante au-delà de la déformation élastique (fig. 23.7), égale à  $R_e$  ou  $R_{p0,2}$ . Avec cette hypothèse, la déformation plastique a lieu à volume constant, correspondant à une valeur du coefficient de Poisson de 0,5.

La sollicitation des matériaux des éléments de machines reste habituellement dans le domaine élastique, car on ne tolère généralement pas de déformations permanentes. Mais certaines pièces sont parfois chargées jusque dans le domaine plastique pour créer des précontraintes, notamment dans les assemblages frettés.

Soyons conscients que les diagrammes de traction représentés ici, et tous ceux que l'on voit dans la littérature, sont des caricatures, car on exagère toujours, pour des raisons de représentation, la déformation élastique par rapport à la déformation à la rupture. En effet, la fin du domaine élastique se situe, pour de l'acier, vers 0,2 à 0,5% seulement, soit de l'ordre du centième de l'allongement à la rupture.

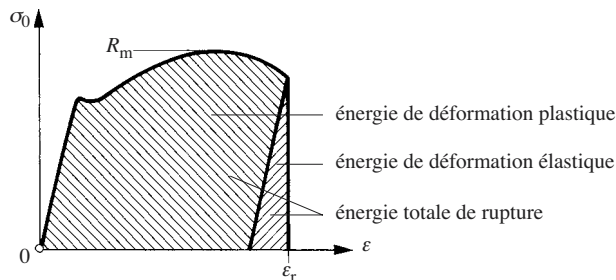


Fig. 23.9 Energie volumique de rupture.



L'aire située sous la courbe de traction nominale représente l'énergie par unité de volume initial apportée jusqu'à la rupture. Après déduction de l'énergie élastique libérée à la rupture, on obtient l'énergie volumique de déformation plastique (fig. 23.9). Un matériau est dit **tenace** lorsqu'il faut beaucoup d'énergie pour le rompre, ce qui correspond aussi à un allongement à la rupture élevé et/ou à une haute résistance.

### 23.3.2 Comportement à la rupture des éprouvettes

Le comportement de certains matériaux au cours d'un essai de traction est très différent de celui décrit au paragraphe précédent. On distingue trois sortes de comportement avant rupture :

- **Comportement fragile** (fig. 23.10a). La rupture se produit sans déformation plastique apparente. L'énergie de rupture volumique est très petite. C'est par exemple le cas du verre et de la porcelaine.
- **Comportement à faible plasticité** (fig. 23.10b). La rupture se produit après une petite déformation plastique, le seuil d'écoulement est inexistant. On classe souvent les matériaux ayant ce comportement parmi les matériaux fragiles si l'allongement à la rupture n'excède pas 5%.
- **Comportement ductile** (fig. 23.10c). La déformation plastique avant rupture est très grande et l'énergie de rupture est élevée.

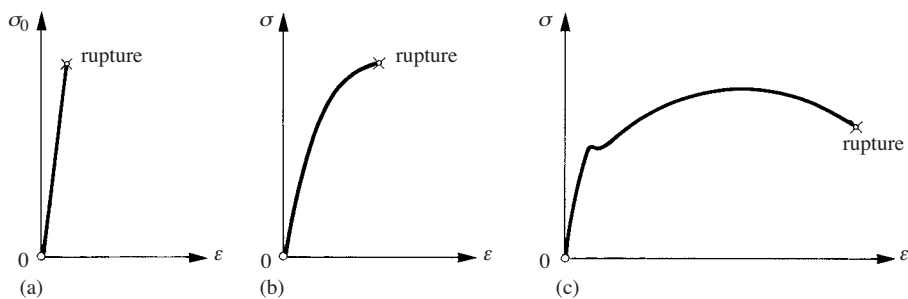


Fig. 23.10 Comportements statiques typiques : (a) fragile; (b) à faible plasticité; (c) ductile.

On peut supputer le comportement avant rupture d'un matériau par l'**essai de résilience** qui consiste à mesurer l'énergie de rupture lors d'un essai de flexion par choc sur un barreau entaillé. La résilience est élevée en cas de rupture ductile. On utilise encore d'autres méthodes pour juger le comportement des matériaux, par exemple la mesure du taux de cristallinité ou l'expansion latérale au pliage.

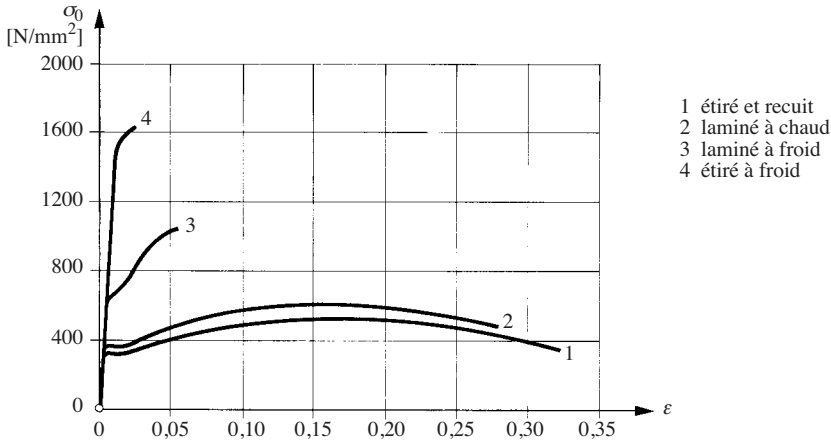
Il faut souligner que des matériaux à haute limite élastique tendent vers un comportement fragile parce que leur limite élastique est peu inférieure à leur résistance à la traction.

### 23.3.3 Résistance des pièces

La résistance statique et le comportement du matériau constituant une pièce de machine sont souvent très différents de ce que l'on observe dans les essais de traction avec les éprouvettes normalisées. Passons en revue les principaux facteurs d'influence.

### Procédé de fabrication

L'écroutissage augmente la limite élastique et la résistance à la traction des matériaux ductiles, mais diminue l'allongement à la rupture en conférant au matériau un comportement fragile. La figure 23.11 montre l'influence du procédé de fabrication en relation avec l'écroutissage. La résistance des produits laminés est plus grande dans le sens du laminage que transversalement; il convient d'en tenir compte en chaudronnerie. Cette anisotropie est aussi très sensible dans les pièces forgées qui sont plus résistantes dans le sens de l'allongement des fibres.



**Fig. 23.11** Influence du procédé de mise en forme sur les caractéristiques mécaniques d'un acier à teneur moyenne en carbone, par exemple Ck 45 ou Ac 60.

Les aciers trempés sont fragiles au choc, c'est pourquoi on procède souvent à un revenu après trempe pour affiner le grain du métal et leur rendre de la ductilité. Au-dessus d'une certaine teneur en carbone on observe un phénomène d'autotrempeage des aciers soudés lors du refroidissement rapide du métal, après le passage de l'arc électrique de soudage. Outre la relaxation des contraintes résiduelles, un recuit de détente évite aussi la fragilité des constructions soudées.

### Epaisseur

La limite élastique et la résistance à la traction diminuent lorsque l'épaisseur des pièces augmente (fig. 23.12). En outre, la limite élastique se rapproche de la résistance à la traction de sorte que le comportement d'un matériau, en soi ductile, se rapproche de celui d'un matériau fragile. Cela s'explique par le fait que la striction dans une section quelconque d'une grosse pièce est empêchée par le volume de matière environnant.

### Etat de contrainte

L'écoulement plastique d'un matériau observé en traction simple est contrecarré lorsqu'il est soumis à un état de contrainte biaxial ou triaxial. C'est particulièrement patent dans les concentrateurs de contraintes à triaxialité prononcée (§ 24.3.3). La figure 23.13 illustre comment la contrainte de rupture augmente avec la triaxialité, mais surtout comment le comportement devient fragile. Cette observation est à la base du fonctionnement des entailles pratiquées dans les pièces de rupture de sécurité en surcharge.

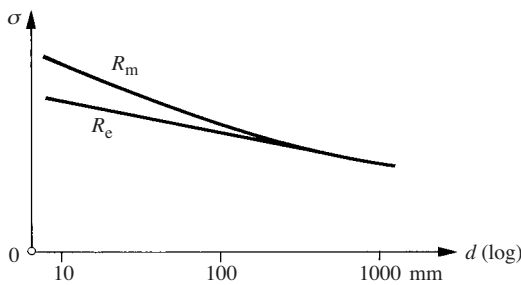


Fig. 23.12 Evolution de  $R_m$  et de  $R_e$  avec l'épaisseur.

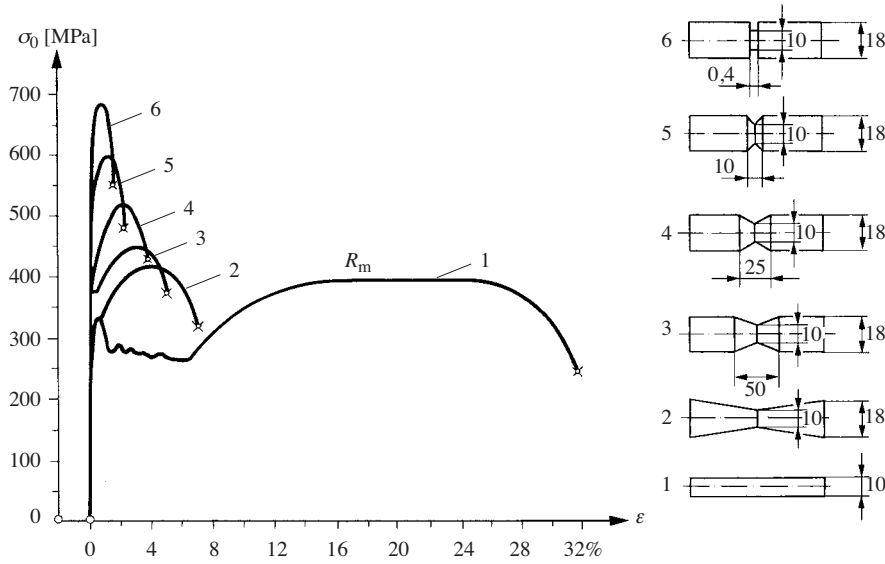


Fig. 23.13 Diagramme de traction d'éprouvettes entaillées selon des essais de Ludwick [23.6].

**Température**

La résistance des matériaux diminue lorsque leur température s'élève; à basse température, la plupart deviennent fragiles. Le cuivre et l'aluminium conviennent pour des températures allant jusqu'à celle de l'air liquide. Il existe des aciers, dits cryoscopiques, qui restent ductiles à très basse température. Le fluage à haute température sera abordé à la section 23.6.

**Vitesse de sollicitation**

On observe que la limite élastique et la résistance à la traction d'un acier ductile augmentent avec la vitesse de la sollicitation

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} \tag{23.4}$$

Ce phénomène, appelé **réactivité dynamique**, est lié à la vitesse de passage des dislocations à travers les cristaux. La figure 23.14 montre l'influence de la vitesse de la sollicitation sur les caractéristiques d'un acier doux. On observe surtout qu'à grande vitesse la limite élastique rejoint la résistance à la traction. Cela signifie que le matériau prend un comportement fragile parce que son allongement à la rupture est faible.

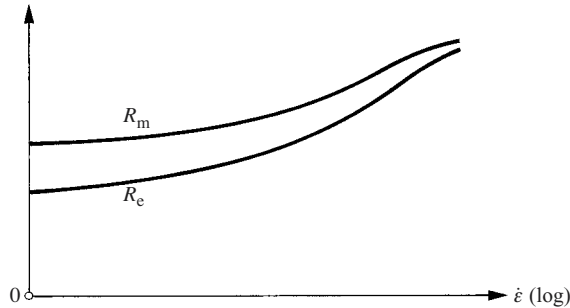


Fig. 23.14 Influence de la vitesse de déformation sur les propriétés d'un acier doux.

Les essais de traction statique sont effectués à petite vitesse,  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . En cas de vibrations, on peut atteindre des vitesses de l'ordre de  $1 \text{ s}^{-1}$ , la plasticité est alors déjà nettement réduite. La vitesse de sollicitation est très élevée en cas de choc, un métal doux peut alors présenter une rupture fragile. On admet, en cas de choc entre pièces avec une vitesse de choc supérieure à  $8 \text{ m/s}$ , que la résistance dynamique augmente de 20 à 50% selon le matériau [23.4].

### Conclusions

- Les caractéristiques mécaniques du matériau d'une pièce de machine sont souvent différentes de celles mesurées avec des éprouvettes normalisées dans les conditions standard.
- Deux matériaux présentant un comportement à la rupture identique dans des circonstances données peuvent réagir de manière très différente dans d'autres circonstances.
- Le comportement ductile ou fragile dépend naturellement du matériau, mais un matériau ductile lors d'un essai de traction statique normalisé peut présenter un comportement fragile lorsque :
  - le métal est écroui;
  - la pièce est grosse;
  - la pièce est entaillée ou présente de fortes concentrations de contraintes;
  - la température est basse;
  - la pièce subit un choc.
 Ces influences sont cumulatives.

Nous désignerons dans la suite les caractéristiques statiques effectives du matériau de la pièce par  $R'_p$ ,  $R'_{p0,2}$ ,  $R'_{p0,02}$ ,  $R'_m$ .

## 23.4 RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX NON HOMOGÈNES

### 23.4.1 Rupture d'une pièce avec défauts

L'étude de la résistance des pièces contenant des défauts fait l'objet de la théorie de la mécanique de la rupture. Elle est née à la suite d'accidents spectaculaires inexplicables par les théories classiques de résistance des matériaux : bateaux cassés en deux en eaux calmes (Liberty Ships), avions Comet, bâches de turbines à vapeur.

A la section 23.3, nous avons considéré uniquement la rupture de matériaux homogènes. On rencontre pourtant fréquemment des pièces qui ont des défauts tels que ségrégations et soufflures de matériaux coulés, fissures dans les soudures, fragilisation par l'hydrogène, défauts de fabrication (stries, raies, entailles). On observe que ces défauts sont souvent à l'origine d'une fissure qui peut s'agrandir progressivement (fatigue, § 23.5.1), puis la fissure se propage subitement à très grande vitesse (environ 1000 m/s) en provoquant une rupture brutale comme si le matériau était parfaitement fragile. On est en présence d'une instabilité de la fissure. Ces phénomènes se produisent aussi bien dans les aciers à haute résistance que dans certains métaux très ductiles comme le fer doux, par exemple.

L'étude de la rupture fragile des pièces avec défauts dans le cas des matériaux élastiques linéaires constitue ce qu'on appelle la *mécanique linéaire de la rupture*. Nous nous limitons à présenter les résultats les plus importants utiles à la compréhension du comportement des matériaux et au dimensionnement des pièces. Le lecteur intéressé consultera les ouvrages spécialisés [23.7, 23.8, 23.9].

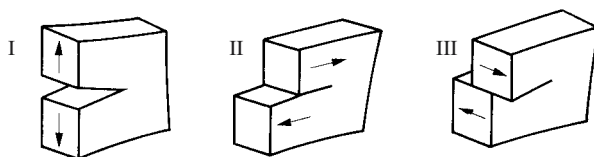


Fig. 23.15 Les modes de rupture: I ouverture; II et III glissements.

On distingue trois modes de rupture d'un solide fissuré (fig. 23.15):

- le mode I, ou mode d'ouverture, qui est le plus important en construction mécanique;
- les modes II et III, ou modes de glissements parallèles au plan tangent de la fissure, qui jouent surtout un rôle en mécanique des roches.

On a observé, dans des expériences systématiques, que la propagation d'une fissure dépend non seulement de la contrainte régnant dans son environnement, mais aussi de la longueur de la fissure et de sa situation dans la pièce. On définit le *facteur d'intensité des contraintes*  $K_I$  (prononcer «ka un») pour le mode de rupture I:

$$K_I = f(g) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (23.5)$$

avec :

- $f(g)$  facteur de géométrie
- $\sigma$  contrainte en absence de fissure
- $a$  longueur de la fissure partant d'un bord de la pièce

$K_I$  s'exprime en  $\text{Pa m}^{1/2}$  ou  $\text{N mm}^{-3/2}$ . Il ne faut pas confondre cette grandeur avec un facteur de concentration de contraintes (24.17) ou avec un facteur d'entaille (24.20).

La longueur d'une fissure est désignée par  $2a$  si elle est entièrement située à l'intérieur de la pièce. Le facteur  $f(g)$  exprime l'influence de la géométrie ; par exemple, les figures 23.16 et 23.17 donnent ce facteur pour une fissure de surface et pour une fissure interne traversant toute l'épaisseur d'une pièce sollicitée en traction simple.

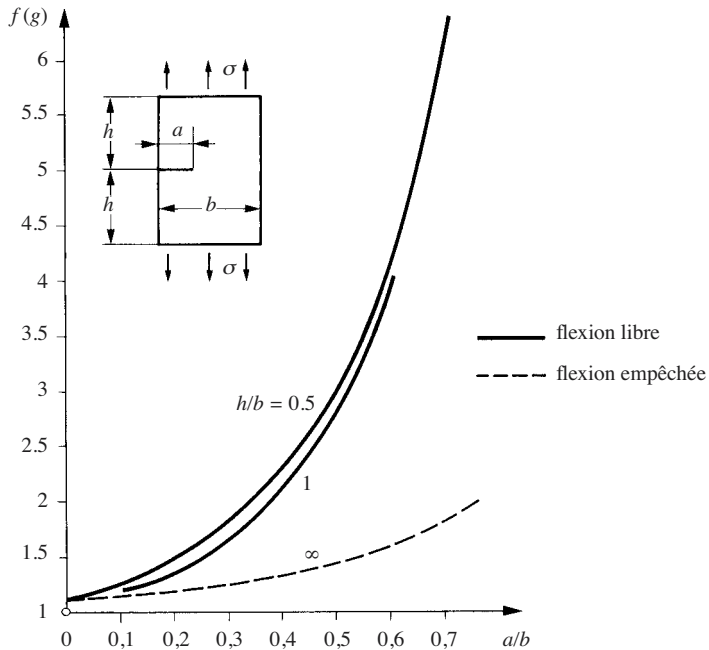


Fig. 23.16 Facteur géométrique pour une fissure de surface dans une plaque sollicitée en traction simple.

La théorie et la pratique montrent que la rupture d'une pièce survient brutalement lorsque le facteur d'intensité des contraintes atteint une *valeur critique*, caractéristique du matériau. On distingue :

- le **facteur critique d'intensité des contraintes** en mode I et en charge statique pour un état de déformation plan,  $K_{Ic}$  ;
- le **facteur critique d'intensité des contraintes dynamiques** en mode I en cas de choc pour un état de déformation plan,  $K_{Id}$  .

Une fissure est stable et il n'y a pas de rupture :

- en charge statique, lorsque

$$K_I < K_{Ic} \quad (23.6)$$

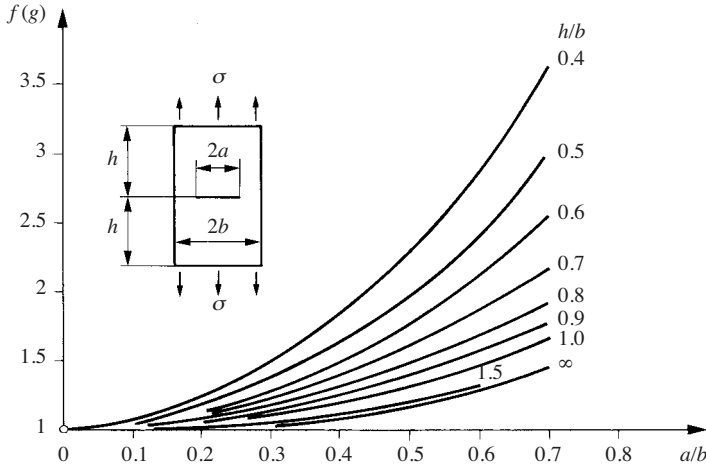


Fig. 23.17 Facteur géométrique pour une fissure interne dans une plaque sollicitée en traction simple.

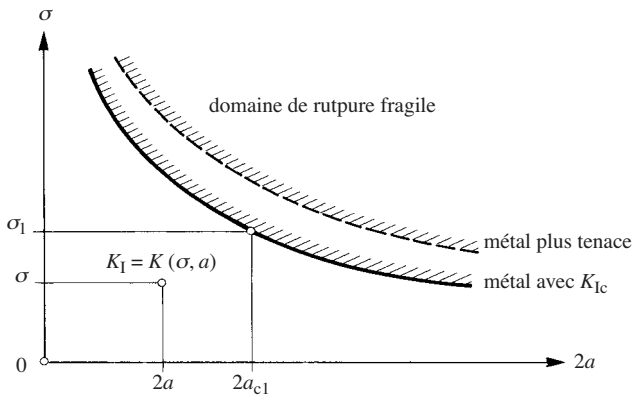


Fig. 23.18 Relation entre la contrainte, la taille d'une fissure intérieure et la ténacité du matériau.

- en cas de choc, lorsque

$$K_I < K_{Id} \quad (23.7)$$

La figure 23.18 illustre schématiquement ces relations. Pour une valeur  $\sigma_1$  de la contrainte nominale, la longueur critique d'une fissure en pleine pièce (fig. 23.17) se calcule sur la base de la définition (23.5) de  $K_I$ . On a

$$2a_c = 2 \frac{1}{\pi f(g)^2} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_1} \right)^2 \quad (23.8)$$

Il n'y a pas de rupture tant que  $2a < 2a_c$ , c'est-à-dire pour tout point figuratif situé sous la courbe limite correspondant à  $K_{Ic}$  du matériau. Cette relation importante

permet de juger si une fissure est dangereuse, ou si on peut laisser grandir la fissure et poursuivre encore l'exploitation d'une machine avant de procéder à sa réparation; le calcul de la longévité avant rupture sera abordé au paragraphe 24.6.6.

### 23.4.2 Influences sur la ténacité

Le facteur  $K_{Ic}$  est représentatif de la ténacité du matériau. On le mesure par des essais de traction ou de flexion statique et au choc avec des éprouvettes normalisées. La ténacité dépend naturellement du matériau, mais aussi de sa température, de l'épaisseur des pièces ainsi que de la vitesse d'application de la charge. Examinons l'effet des principaux facteurs d'influence.

#### Température

La capacité de déformation plastique des matériaux métalliques diminue généralement lorsque la température s'abaisse. La mesure de la résilience, ou énergie de rupture d'une éprouvette entaillée normalisée (Charpy, ISO), permet une *appréciation qualitative* du comportement à la rupture d'un matériau. Cette grandeur est inutilisable dans les calculs de résistance mais donne de précieuses indications. La figure 23.19 montre l'allure générale de l'évolution de la résilience en fonction de la température pour un acier ferritique. A basse température, l'éprouvette se rompt avec peu d'énergie de rupture, elle a un comportement fragile; à des températures nettement plus élevées, la rupture de l'éprouvette nécessite beaucoup d'énergie, son comportement est ductile. Entre ces deux domaines se trouve une zone de transition. La température de transition indiquée parfois est celle pour laquelle la résilience est inférieure à une certaine limite fixée conventionnellement, par exemple 27 J pour une éprouvette Charpy V. Les valeurs de résilience obtenues dans les essais dépendent beaucoup de la forme de l'éprouvette. C'est pourquoi il faut toujours associer une valeur de résilience au type d'éprouvette utilisé pour sa détermination; on dira, par exemple, résilience Charpy V: 40 J.

Tout comme la résilience, la ténacité à la rupture diminue également lorsque la température baisse (fig. 23.20).

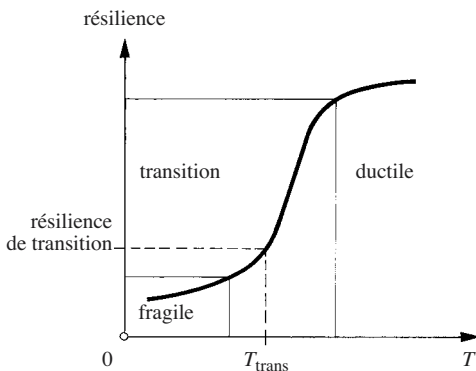


Fig. 23.19 Influence de la température sur la résilience.

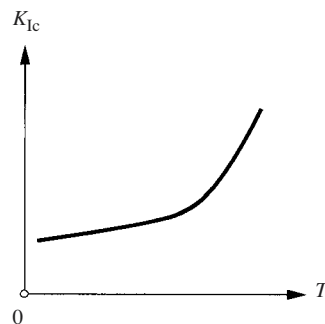


Fig. 23.20 Influence de la température sur la ténacité.



### Epaisseur des pièces

La déformation dans le sens de l'épaisseur au voisinage d'un défaut dans une pièce mince s'effectue librement, la contrainte transversale est alors très faible et le matériau est pratiquement en état de contrainte plane. Dans une plaque très épaisse, en revanche, la contraction latérale est empêchée par le volume voisin, la contrainte transversale devient importante et la matière se trouve en état de déformation plane. Or, on sait qu'un matériau en soi ductile présente un comportement fragile en cas de sollicitation fortement triaxiale. C'est pourquoi la ténacité diminue lorsque les pièces sont très épaisses (fig. 23.21); elle est minimale en état de déformation plane.

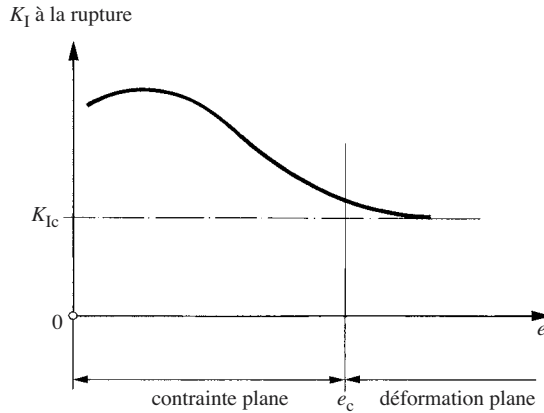


Fig. 23.21 Influence de l'épaisseur sur la ténacité à la rupture en charge statique.

On peut admettre que l'état de déformation est plan en charge statique lorsque l'épaisseur de la plaque est telle que

$$e \geq e_c = C \left( \frac{K_{Ic}}{R_e} \right)^2 \quad (23.9)$$

et, en charge dynamique, lorsque

$$e \geq e_d = C_d \left( \frac{K_{Id}}{R_e} \right)^2 \quad (23.10)$$

Selon les normes ASTM,  $C = C_d = 2,5$  et  $R_e$  est la limite conventionnelle d'élasticité.

La théorie exposée au paragraphe précédent n'est valable que dans un état de déformation plane et si la zone plastifiée à la pointe de la fissure est très petite par rapport à la longueur de la fissure. Par conséquent, les relations (23.9 et 10) délimitent le domaine de validité des conditions de résistance (23.6 et 7). La figure 23.21 montre qu'on ferait une appréciation pessimiste de la sécurité dans le domaine de contrainte plane, c'est-à-dire avec des pièces minces, en y utilisant aussi les formules (23.6) et

(23.7). Comme, dans ce cas,  $K_I$  à la rupture est deux à dix fois plus grand que  $K_{Ic}$ , le surdimensionnement serait inadmissible; on utilise alors la théorie de la rupture élastoplastique, dont l'exposé sort du cadre de cet ouvrage.

### Vitesse de sollicitation

Les figures 23.22 et 23.23 montrent l'effet de la vitesse de sollicitation sur la résilience et sur la ténacité.  $K_{Ic}$  est obtenu en charge quasi statique,  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , tandis que  $K_{Id}$  se mesure au choc avec  $\dot{\epsilon} \approx 10 \text{ s}^{-1}$ .

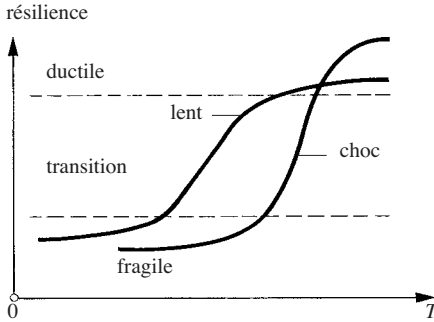


Fig. 23.22 Effet de la vitesse de sollicitation sur la température de transition.

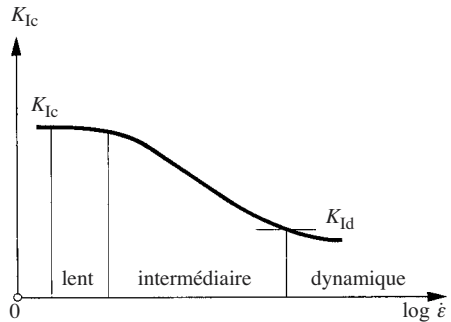


Fig. 23.23 Effet de la vitesse de sollicitation sur  $K_{Ic}$ .

En cas de choc, la température de transition est nettement plus élevée qu'en cas de charge progressive lente et le facteur d'intensité des contraintes diminue considérablement. On peut admettre

$$K_{Id} = \left( \frac{1}{4} \dots \frac{1}{3} \right) K_{Ic} \quad (23.11)$$

Un certain défaut, sans danger en cas de charge statique, peut au contraire entraîner une rupture fragile au choc.

### Exemple numérique

Une barre a les dimensions suivantes: largeur  $b = 100 \text{ mm}$ ; épaisseur  $e = 10 \text{ mm}$ ; longueur  $\ell = 400 \text{ mm}$ . Elle est faite en un alliage d'aluminium, nuance 7075-T6 dont les caractéristiques sont: limite élastique  $R_e = 585 \text{ MPa}$ ; ténacité critique à la température ambiante  $K_{Ic} = 33 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$ . La barre est soumise à une contrainte de traction  $\sigma = 260 \text{ MPa}$ . Y a-t-il risque de rupture fragile? Quelle est la longueur critique d'une fissure sur le flanc de la barre?

Le front d'une fissure est en état de déformation plane avec danger de rupture fragile si l'épaisseur est supérieure à l'épaisseur critique donnée par la formule (23.9):

$$e_c = 2,5 \left( \frac{K_{Ic}}{R_e} \right)^2 = 2,5 \left( \frac{33}{585} \right)^2 = 7,96 \times 10^{-3} \text{ m}$$

La barre ayant une épaisseur de 10 mm, le risque de rupture fragile existe.

La longueur critique de la fissure est atteinte lorsque le facteur d'intensité des contraintes (23.5) prend la valeur critique du matériau. On obtient une équation dont on tire la longueur critique :

$$a_c = \frac{1}{\pi f(g)^2} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\pi f(g)^2} \left( \frac{33}{260} \right)^2$$

Par itération, avec un diagramme plus détaillé que celui de la figure 23.16, on trouve  $f(g) = 1,09$  et  $a_c = 4,3$  mm.

Pour cette longueur de fissure, la contrainte nominale dans la section restante vaut

$$\sigma_0 = \frac{100}{100 - 4,3} 260 = 272 \text{ MPa}$$

Cette valeur est insuffisante pour provoquer une rupture ductile.

En conclusion, aucune rupture n'est à craindre tant que la fissure est plus courte que 4,3 mm. Une rupture fragile survient lorsque la fissure atteint cette longueur critique.

### 23.4.3 Diagramme d'analyse des ruptures

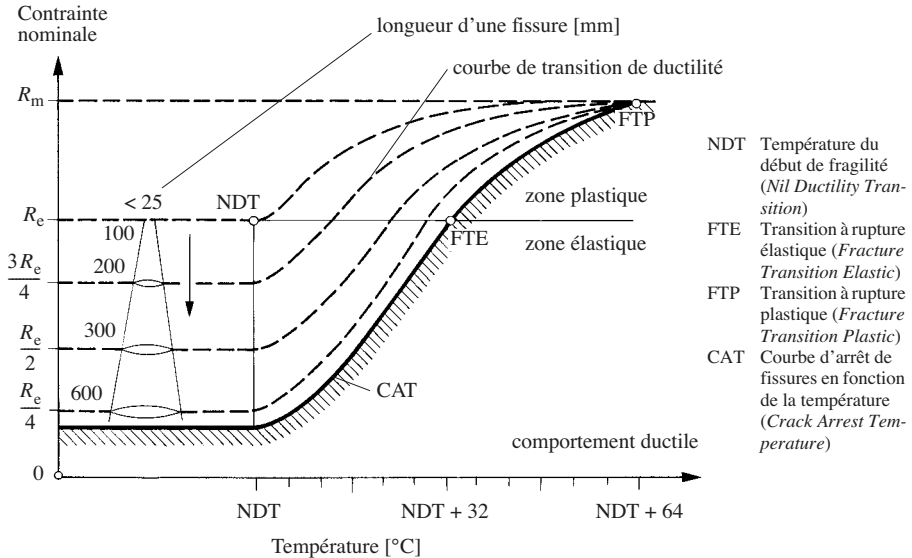
Appelé aussi diagramme de Pellini, du nom de son auteur, ce diagramme indique le comportement à la rupture et la sensibilité à la propagation d'une fissure dans le matériau d'une pièce selon la température, la contrainte de service et la taille du défaut (fig. 23.24).

Le diagramme de Pellini est caractéristique de chaque matériau, il est établi en charge statique ou au choc. Il n'est valable que pour les aciers dont la limite élastique est inférieure à  $700 \text{ N/mm}^2$  puisqu'ils ont généralement un comportement statique ductile. La courbe d'arrêt de fissure CAT (*Crack Arrest Temperature*) partage le diagramme en deux zones.

Au-dessous de la courbe CAT, le matériau présente un comportement ductile, quelle que soit la taille du défaut. Pour un niveau de contrainte donné, une fissure ne se propage pas lorsque la température du matériau est supérieure à la température CAT. La déformation est élastique pour  $\sigma < R_e$  ; elle est plastique lorsque  $R_e < \sigma < R_m$ . A la température de transition plastique FTP (*Fracture Transition Plastic*), la contrainte atteint la résistance maximale.

Il faut remarquer que le comportement est ductile, quelle que soit la température, si la contrainte nominale est en-dessous de  $35$  à  $55 \text{ N/mm}^2$  ; aucune rupture fragile n'est alors à craindre. C'est pourquoi on n'observait pas de rupture fragile dans les pièces de machines anciennes largement surdimensionnées.

La rupture est du type fragile au-dessus de la courbe CAT. La contrainte de rupture dépend de la taille de la fissure. Pour des petites fissures ( $< 6 \text{ mm}$ ), la rupture fragile instable par clivage est possible lorsque  $\sigma = R_e$  jusqu'à la température du début de fragilisation NDT (*Nil Ductility Transition*). Entre NDT et FTP, on observe des ruptures avec ductilité croissante.



**Fig. 23.24** Diagramme d'analyse de rupture de Pellini ou diagramme FAD (Fracture Analysis Diagram); acier, épaisseur  $e \leq 65$  mm.

La contrainte de rupture fragile diminue lorsque la taille des défauts augmente; elle remonte au-delà de la température NDT. Au-dessus de la température du point FTE (*Fracture Transition Elastic*), le matériau de la pièce fissurée se comporte, du point de vue élastique, comme un matériau homogène. A la température du point FTP, il se comporte jusqu'à rupture dans les conditions prévues par l'essai normalisé de traction sur petites éprouvettes sans fissure.

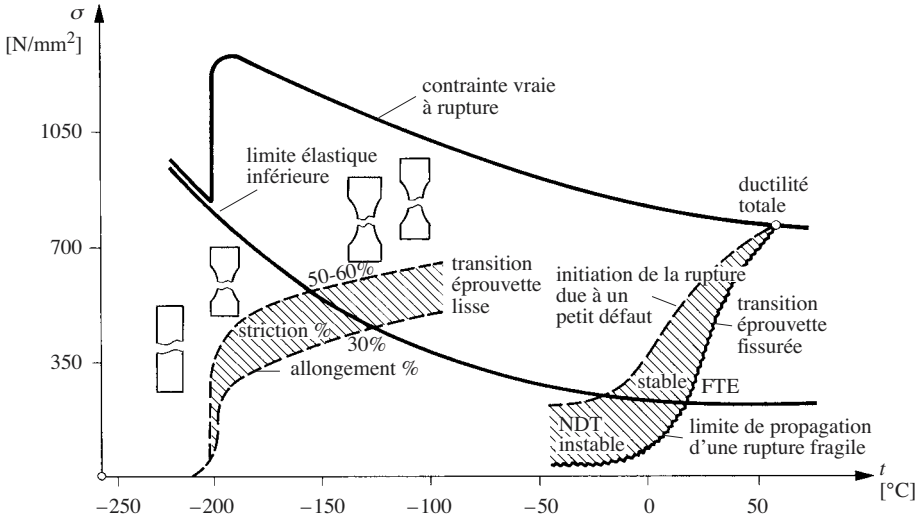
En examinant encore la figure 23.24, on voit que la courbe de transition de ductilité se déplace vers les températures plus élevées lorsque la dimension des fissures augmente. Ce déplacement explique pourquoi des essais en laboratoire sur petites éprouvettes (ne pouvant contenir que de petits défauts) ne permettent pas de prévoir le danger de rupture fragile de pièces réelles avec de grandes fissures.

La figure 23.25 illustre le comportement d'une éprouvette fissurée comparé à celui d'une éprouvette lisse. La rupture fragile d'une pièce avec défauts survient pour une température sensiblement plus élevée que dans le cas d'une pièce lisse. Il arrive qu'une pièce casse subitement en hiver parce qu'elle contient un défaut, spécialement en cas de choc.

## 23.5 FATIGUE

### 23.5.1 Rupture de fatigue

La fatigue est un vaste sujet, citons seulement [23.4]. Une pièce soumise à un effort variant souvent au cours du temps se rompt par un phénomène de fatigue. Une telle rupture se déroule en trois stades:



**Fig. 23.25** Influence de la température sur la limite élastique, sur la contrainte de rupture et sur la transition d'éprouvettes lisses et entaillées en acier doux.

### Stade 1, germination ou initiation

Une éprouvette ou une pièce est soumise à des contraintes variant cycliquement. Dès les premiers cycles déjà, on constate à la surface des bandes de glissement microscopiques provoquées par le mouvement de dislocations dans les cristaux. En poursuivant l'essai, ces bandes se renforcent en donnant des stries ; la matière au voisinage des stries devient progressivement plus dure à cause de l'écrouissage. Elle est finalement si dure qu'il se forme des microfissures (fig. 23.26a). En général, ces fissures débutent à la surface parce que la contrainte  $y$  est souvent plus élevée que dans le volume, et aussi parce que les cristaux attenants à la surface sont moins bien liés par les cristaux environnants.

### Stade 2, propagation de fissure

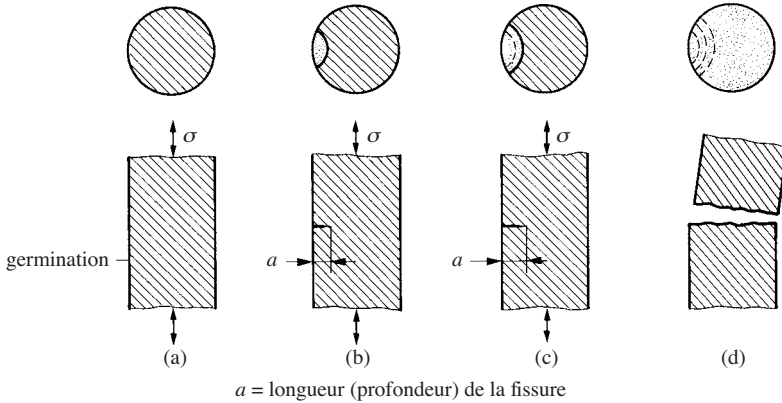
Le développement des microfissures se poursuit lorsque les contraintes continuent de varier. Plusieurs fissures se réunissent pour ne plus former qu'une fissure plus profonde qu'on appelle aussi **crique**. Au fond de la crique, il y a une très forte concentration de contrainte (effet d'entaille) qui renforce encore sa tendance à grossir. La fissure progresse vers l'intérieur de la pièce à une vitesse qui augmente avec la longueur de la crique (fig. 23.26b et c). La propagation de la fissure va donc en s'accroissant ; la mécanique de la rupture permet de prévoir combien de cycles de contrainte une pièce fissurée peut encore supporter avant rupture (§ 24.6.6).

### Stade 3, rupture

La section utile à la transmission de l'effort rétrécit au fur et à mesure que la fissure croît. La rupture finale (fig. 23.26d) peut se produire de plusieurs manières :

- la fissure atteint sa taille critique et se propage rapidement en faisant une rupture fragile (§ 23.4.1) ;

- la fissure n'atteint pas la taille critique, mais la contrainte dans la section résiduelle atteint la contrainte de rupture ultime du matériau; selon le comportement du matériau, la fracture est de type ductile, fragile ou mixte (§ 23.3.3);
- on peut encore imaginer le cas limite où la taille critique de la fissure serait atteinte alors que la contrainte effective est égale à la résistance de rupture du matériau.

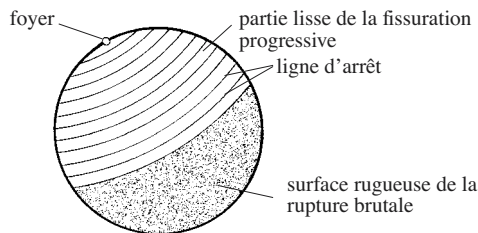


**Fig. 23.26** Naissance et évolution d'une fissure de fatigue: (a) germination; (b et c) propagation; (d) rupture.

Aucune striction ne se manifeste durant la progression de la fissure. C'est pourquoi la fracture d'une pièce fissurée par fatigue présente un aspect globalement fragile, même si la section résiduelle se rompt selon un mode ductile.

La progression d'une fissure de fatigue est lente lorsque la contrainte cyclique est faible et la pièce peut subir un grand nombre de cycles avant de se rompre. La surface de la crique présente un aspect à grain fin, elle est parfois brillante à cause du matage, tandis que la surface de la partie rompue brutalement en fin de processus présente un relief accentué (fig. 23.27). La partie lisse est souvent parcourue de lignes parallèles courbes, dites **lignes d'arrêt**, correspondant généralement aux périodes d'arrêt de la machine. Leur courbure permet de remonter au point de départ de la fissure.

Les ruptures de fatigue sont dangereuses car elle surviennent toujours brusquement, sans déformation préalable qui avertirait l'utilisateur. Les fissures sont généra-



**Fig. 23.27** Aspect typique d'une rupture de fatigue.

lement invisibles parce qu'elles se trouvent dans des assemblages, par exemple des liaisons à clavette, ou parce qu'elles sont recouvertes par du cambouis. On peut les détecter lors de travaux de révision soigneux par radiographie, échographie ultrasonore, resuage ou simplement à vue.

### 23.5.2 Résistance d'éprouvettes en régime alterné

Supposons qu'une éprouvette en acier soit soumise à un effort alterné fréquent. La rupture de fatigue intervient alors pour un niveau de contrainte nettement inférieur à la contrainte de rupture statique  $R_m$ . Effectuons un essai en imposant à l'éprouvette une contrainte alternée d'amplitude  $\sigma_a$  et de fréquence constante. Elle se casse au bout d'un nombre de cycles  $N$  appelé *longévité de rupture à la fatigue*. Représentons les couples de valeurs ainsi déterminés dans un diagramme semi-logarithmique ( $\sigma_a - \log N$ ). On obtient un nuage de points qui a l'allure de la figure 23.28. Sur cette courbe, connue sous le nom de courbe de Wöhler, courbe S-N (*Stress-Number of Cycles*) ou courbe d'endurance, on distingue trois domaines :

- Le **domaine de fatigue plastique oligocyclique** dans lequel la rupture survient après un très petit nombre d'alternances avec une déformation plastique notable. La contrainte effective dans le matériau peut s'écarter considérablement de la contrainte apparente calculée par les théories usuelles de la résistance des matériaux à cause des grandes déformations plastiques.
- Le **domaine de fatigue limitée** (ou *endurance limitée*) dans lequel la rupture survient après un nombre limité de cycles, nombre qui croît quand la contrainte décroît. On note  $\sigma_N$  la contrainte pour laquelle il y a rupture au bout de  $N$  cycles.
- Le **domaine d'endurance illimitée** dans lequel il n'y a pas de rupture, quel que soit le nombre de cycles. La contrainte limite asymptotique correspondante est appelée *limite de fatigue* ou *limite d'endurance*  $\sigma_D$ . Elle est atteinte après  $N_D$  cycles. Les catalogues de matériaux donnent la limite de fatigue pour un nombre conventionnel de cycles, par exemple  $2 \times 10^6$ .

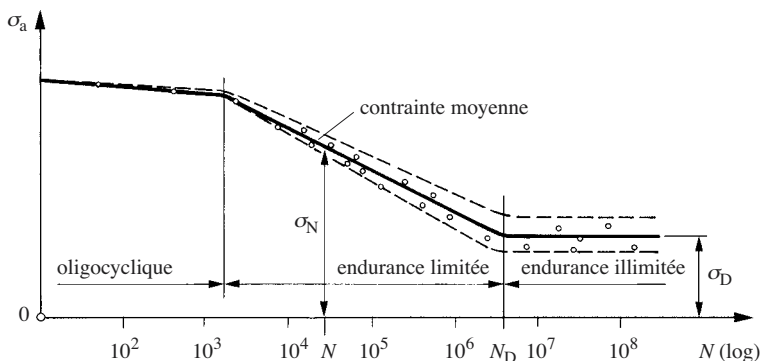


Fig. 23.28 Résultats d'essais de fatigue en traction alternée.

Le plateau de la courbe de Wöhler à la limite de fatigue est trompeur. On l'observe effectivement avec les aciers de construction et le titane dans les limites temporelles imposées aux essais, mais les pièces contiennent presque toujours de petits défauts, même microscopiques, qui diminuent progressivement la résistance à la fati-

gue après de très longues durées d'utilisation. Il existe aussi des phénomènes de vieillissement des aciers qui peuvent, à la longue, provoquer des fissurations.

On n'observe pas de limite de fatigue lorsque le cyclage se produit en même temps que la corrosion du métal; la courbe descend encore lentement avec l'accroissement du nombre de cycles. Il n'y a pas de limite non plus pour les aciers à trempes extra-dures, pour les fontes (qui contiennent des défauts), pour la plupart des alliages d'aluminium, pour le cuivre et ses alliages. Dans ce cas, on donne généralement une limite de fatigue conventionnelle pour  $10^8$  ou  $5 \times 10^8$  cycles.

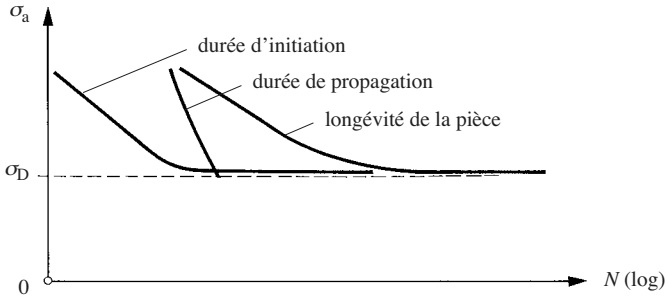


Fig. 23.29 Durée d'initiation, durée de propagation d'une fissure et longévité.

Les trois stades de la fissuration décrits ci-dessus peuvent s'interpréter à la lumière des connaissances acquises en mécanique de la rupture. La courbe de Wöhler est la somme de la durée d'initiation et de la durée de propagation de la fissure (fig. 23.29). Lorsque le niveau de contrainte est relativement bas, la longévité de la pièce dépend essentiellement de la durée d'initiation. En revanche, si le niveau de contrainte est élevé ou si la pièce contient des défauts, la longévité dépend principalement de la durée de propagation de la fissure.

On admet, et l'expérience le confirme, que la limite de fatigue est indépendante de la fréquence et de la forme des sollicitations. C'est pourquoi on peut faire les essais à des fréquences élevées pour gagner du temps.

La longévité d'éprouvettes soumises à une contrainte alternée donnée présente un caractère aléatoire dont la distribution suit souvent une loi normale de Gauss. L'écart type de la distribution varie selon les aciers entre 5 et 10% de la valeur moyenne. Pour les calculs, on peut admettre un écart type moyen de 8%. Les valeurs de limite de fatigue indiquées dans la littérature sont généralement les valeurs moyennes à 50% de survie des éprouvettes.

Ainsi que le montre la figure 23.28, la dispersion croît lorsque la longévité de fatigue augmente dans le domaine d'endurance limitée. La limite de fatigue à  $p\%$  de survie se calcule par la formule

$$\sigma_{Dp} = c_a \sigma_{D50} \quad (23.12)$$

où  $c_a$  est le **facteur de confiance statistique**. Pour de l'acier, on donne la valeur 0,794 pour 99% de survie.

*Remarque.* On note parfois  $\sigma_{D-1}$  la limite de fatigue alternée, l'indice numérique signifiant la valeur du facteur d'ondulation (23.16), qui vaut  $-1$  en cas de sollicitation



alternée. Sauf indication spéciale, notre symbole  $\sigma_D$  sous-entend une contrainte alternée.

### Forme simplifiée de la courbe de Wöhler

Pour son utilisation pratique, il est commode de représenter la courbe de Wöhler sous une forme accessible au calcul. De nombreux auteurs ont proposé une expression mathématique de cette courbe dans le domaine de longévité limitée. Présentons une expression particulièrement simple qui donne une approximation suffisante pour les calculs de dimensionnement.

En traçant le diagramme de Wöhler avec deux échelles logarithmiques, le domaine de fatigue limitée est représenté approximativement par une droite B-C (fig. 23.30). La contrainte alternée  $\sigma_N$  pour une longévité  $N$  est liée aux valeurs du coude C par la relation

$$\left( \frac{\sigma_N}{\sigma_D} \right)^a = \frac{N_D}{N} \quad (23.13)$$

La valeur de l'exposant  $a$  est caractéristique du matériau et des traitements qu'il a subis; il est proche de 10 pour l'acier.

Le domaine oligocyclique A-B est représenté par une droite en pointillés pour indiquer que la rupture peut difficilement être mise en relation avec la contrainte, mais qu'il faut plutôt la caractériser par la déformation de rupture.

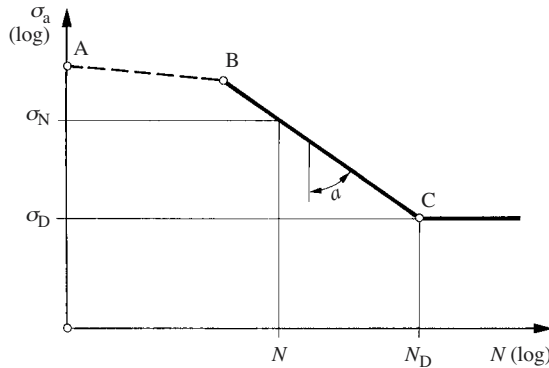


Fig. 23.30 Diagramme de fatigue approché.

Pour les matériaux ductiles, on dimensionne habituellement les pièces de telle manière que la contrainte maximale ne dépasse pas leur limite élastique. Le diagramme S-N utilisé dans les calculs se présente alors selon la figure 23.31 :

- $N \leq 10^4$  calculer avec la limite élastique conventionnelle  $R_e$  ou  $R_{p0,2}$  ;
- $10^4 < N < 10^6$  domaine de fatigue limitée, utiliser  $\sigma_N$  déterminé à partir de la droite d'endurance sur la base d'une longévité minimale souhaitée ;
- $N \geq 10^6$  domaine de fatigue illimitée, utiliser  $\sigma_D$  ; en situant le début du domaine de fatigue illimitée à  $10^6$  cycles, on fait une hypothèse pessimiste.

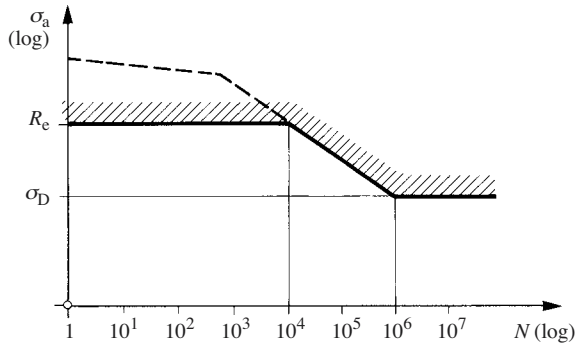


Fig. 23.31 Diagramme de Wöhler conventionnel.

Dans le cas des engrenages, on place le début du domaine de fatigue illimitée à  $3 \times 10^6$  cycles.

### 23.5.3 Résistance d'éprouvettes en régime quelconque

#### Sollicitation en traction

D'une manière générale, la contrainte varie au cours du temps entre une contrainte minimale et une contrainte maximale (fig. 23.32). La contrainte effective résulte de la superposition d'une *contrainte alternée* d'amplitude

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (23.14)$$

et d'une *contrainte moyenne* constante

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (23.15)$$

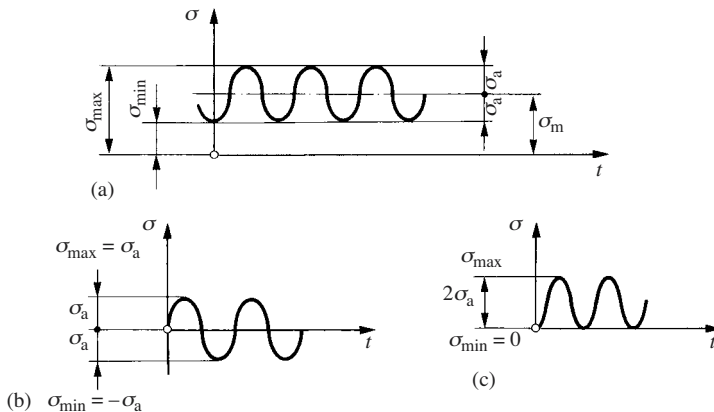


Fig. 23.32 Allure des variations de contrainte: (a) ondulées; (b) alternées; (c) répétées.

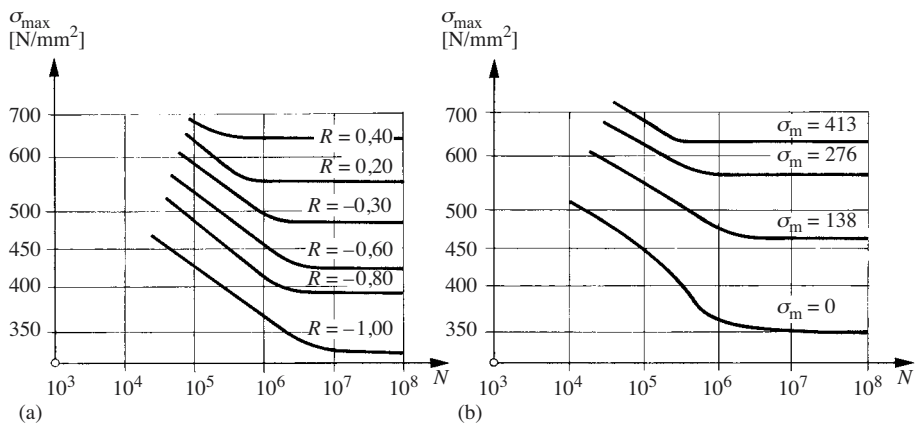
On situe le domaine de variation des contraintes au cours d'un cycle par le *taux de variation de contrainte* ou *facteur d'ondulation* défini par

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \tag{23.16}$$

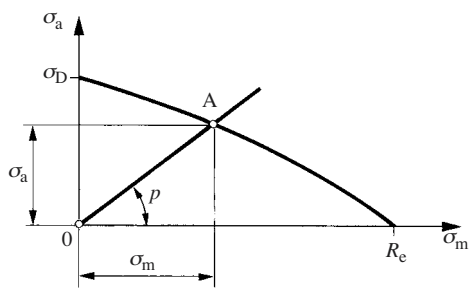
Ses valeurs typiques sont:

- contrainte statique,  $R = 1$ ;
- contrainte répétée ou pulsante; en traction  $R = 0$ , en compression  $R = -\infty$ ;
- contrainte alternée,  $R = -1$ .

On n'a considéré jusqu'ici que le cas de la sollicitation de traction monoaxiale alternée,  $R = -1$ . Dans le cas de sollicitations ondulées, on constate que la limite de fatigue dépend non seulement de l'amplitude de la variation de contrainte, mais aussi du niveau de la contrainte moyenne (fig. 23.33).



**Fig. 23.33** Famille de courbes de fatigue pour différentes valeurs du facteur d'ondulation  $R$  et de la contrainte moyenne  $\sigma_m$ : (a) facteur d'ondulation constant; (b) contrainte moyenne constante.



**Fig. 23.34** Diagramme d'endurance de Haigh.

Il existe plusieurs façons de représenter graphiquement la limite de fatigue en contrainte ondulée. Le diagramme d'endurance de Haigh est commode pour les calculs de dimensionnement. On y porte l'amplitude de la composante alternée en ordonnée et la contrainte moyenne en abscisse (fig. 23.34); le domaine utilisable est délimité par une courbe correspondant à l'ensemble des couples de valeurs  $[\sigma_m, \sigma_a]$  tirées de la courbe expérimentale pour  $2 \times 10^6$  cycles. On peut tracer dans ce diagramme des droites issues de l'origine dont la pente

$$p = \frac{1 - R}{1 + R} \quad (23.17)$$

est fonction du facteur d'ondulation. Ainsi, l'axe des abscisses correspond aux sollicitations statiques ( $R = 1$ ), une droite à  $45^\circ$  représente les sollicitations répétées ( $R = 0$ ) et l'axe des ordonnées est valable pour les sollicitations alternées ( $R = -1$ ).

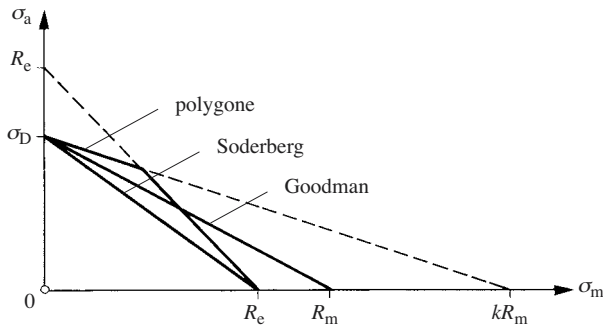


Fig. 23.35 Limites de fatigue.

On cherche à représenter le domaine limite de fatigue d'un matériau d'une manière facile à mettre en équation. Selon la figure 23.35, on utilise habituellement :

- la **droite de Soderberg** entre la limite de fatigue alternée et la limite élastique ;
- la **droite de Goodman** entre la limite de fatigue alternée et la limite de rupture statique ;
- le **polygone limite** défini par une droite s'étendant de  $\sigma_D$  à  $k\sigma_m$  et par une droite à  $45^\circ$  passant par la limite élastique ;  $k = 1,6$  à  $2$  pour des matériaux présentant une limite d'écoulement bien marquée,  $k = 1$  pour les autres.

La droite de Soderberg est trop pessimiste, celle de Goodman va au-delà de la limite élastique qu'il ne faut pourtant pas dépasser en fatigue à cause de l'écrouissage. Nous utilisons le polygone limite représenté dans la figure 23.36 jusque dans le domaine de compression. La limite de fatigue en régime de charge répétée se trouve sur une droite  $\sigma_a = \sigma_m$ , car  $\sigma_{D0} = 2\sigma_a = 2\sigma_m$  (l'indice 0 est la valeur du facteur d'ondulation correspondant).

### Sollicitations en flexion ou en torsion

Lorsqu'une éprouvette est sollicitée en flexion ou en torsion, on obtient des diagrammes d'endurance semblables au diagramme de traction (fig. 23.37). Mais ils

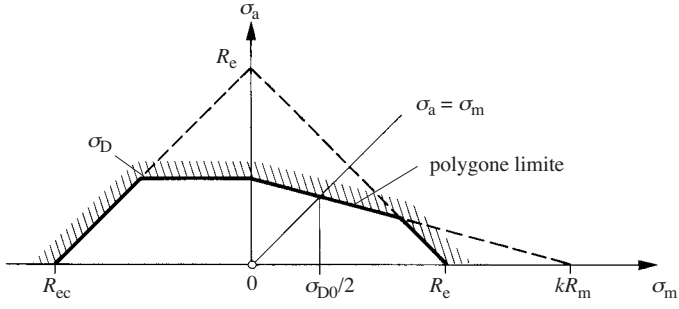


Fig. 23.36 Polygone limite de fatigue dans le diagramme de Haigh d'un matériau ductile ( $|R_{ec}| = R_e$ ) .

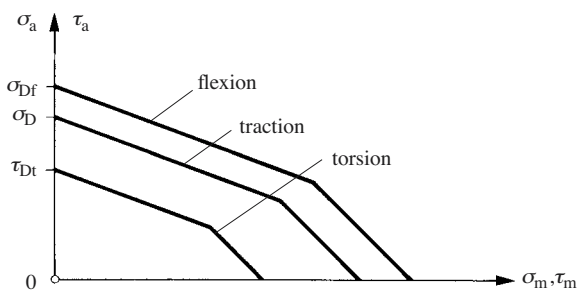


Fig. 23.37 Comparaison de divers modes de sollicitation.

n'ont de sens que pour  $\sigma_m > 0$  . On constate que les limites de fatigue en flexion sont plus élevées qu'en traction (effet de soutien par le matériau peu sollicité à l'intérieur de l'éprouvette); on admet

$$\sigma_{Df} = 1,175 \sigma_D \quad (23.18)$$

En partant de l'hypothèse de l'énergie de distorsion maximale, on a pour la torsion

$$\tau_{Dt} = \frac{\sigma_{Df}}{\sqrt{3}} = 0,577 \sigma_{Df} = 0,68 \sigma_D \quad (23.19)$$

### 23.5.4 Résistance des pièces

Plusieurs facteurs influencent la résistance à la fatigue du matériau d'une pièce qui peut s'écarter considérablement de celle des éprouvettes normalisées. Voici les effets des paramètres principaux.

#### Taille et forme des pièces

Les éprouvettes de fatigue ont normalement 10 mm de diamètre. L'aire de la surface extérieure augmente naturellement avec la taille des pièces; comme les criques

démarrant presque toujours à partir de défauts de surface, on conçoit que la probabilité de fissuration augmente avec la taille. Par ailleurs, l'effet d'appui des couches intérieures est plus marqué dans les petites pièces. La forme de la pièce joue aussi un certain rôle. On tient compte de ces effets par le **facteur d'échelle** :

$$c_e = \frac{(\sigma_D)_b}{(\sigma_D)_{10}} \quad (23.20)$$

où :

$(\sigma_D)_b$  limite de fatigue pour la dimension  $b$   
 $(\sigma_D)_{10}$  limite de fatigue d'éprouvettes de 10 mm de diamètre

La figure 23.38 montre que l'effet est important ; il est encore plus marqué pour les alliages légers que pour les aciers.

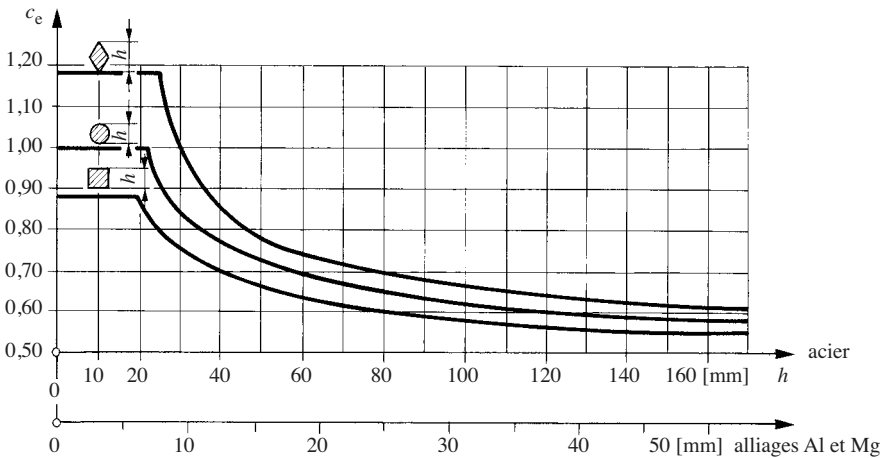


Fig. 23.38 Facteur d'échelle.

### Etat de surface

Les éprouvettes des essais de fatigue sont toujours rectifiées. Une surface rugueuse contient naturellement des microconcentrateurs de contrainte susceptibles d'initier des fissures, c'est pourquoi la résistance à la fatigue diminue lorsque la rugosité croît. On définit le **facteur d'état de surface** :

$$c_R = \frac{\sigma_{D \text{ réel}}}{\sigma_{D \text{ poli}}} \quad (23.21)$$

La figure 23.39 montre que l'effet de la rugosité est d'autant plus marqué que la résistance du métal est plus élevée. Il convient donc de rectifier et de polir les surfaces des pièces fortement chargées en acier à haute résistance. Le diagramme 23.40 donne la valeur du produit  $c_R \sigma_D$  en fonction de la résistance à la traction de l'acier. On constate que le gain obtenu en utilisant des aciers à haute résistance est nul si l'état de

surface est mauvais. Ce phénomène s'explique par la diminution du facteur critique d'intensité des contraintes lorsque la résistance à la traction de l'acier augmente, et par l'augmentation du facteur d'intensité des contraintes avec la contrainte appliquée.

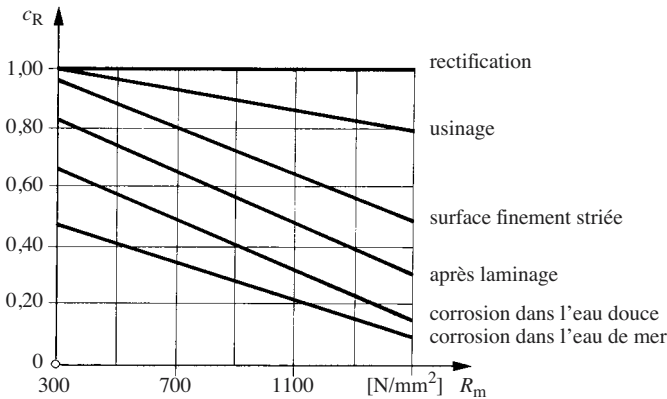


Fig. 23.39 Facteur d'état de surface.

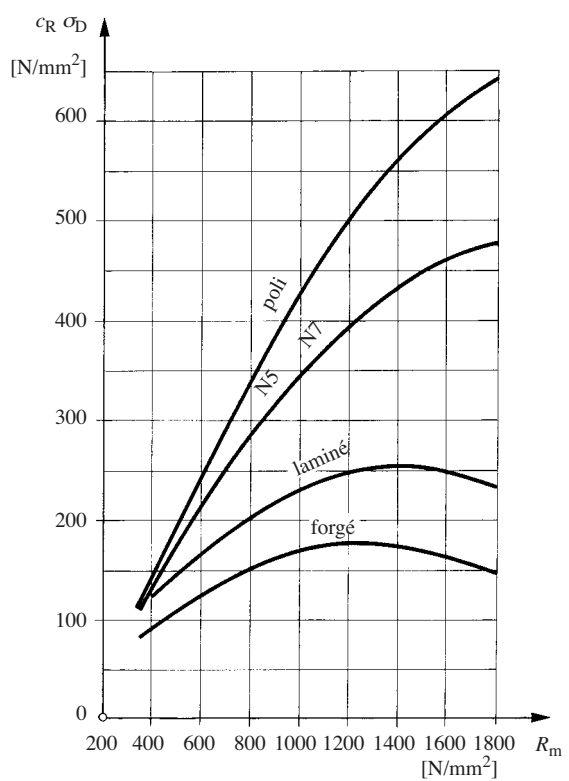


Fig. 23.40 Influence de l'état de surface et de la résistance sur la limite de fatigue.

Kwami constate que l'effet de l'état de surface est moins sensible lorsqu'une pièce est soumise à une torsion alternée. Dans ce cas, on admet l'approximation:

$$c_{Rt} = \frac{1}{2}(1 + c_{Rf}) \quad (23.22)$$

### Traitement de surface

Une fissure ne prend pas naissance, ou ne se propage que très lentement, lorsque la matière est comprimée. On peut donc augmenter considérablement la limite de fatigue en créant une compression par précontrainte de la couche superficielle des pièces. Cette couche comprimée agit comme une armature résistant aux fissures autour de la matière intérieure. La figure 23.41 montre l'allure de la contrainte résiduelle dans le métal après un écrasement plastique de la surface; la traction dans le cœur est nécessaire pour l'équilibre, mais elle n'affecte pas l'effet bénéfique de la compression.

Le grenaillage de la surface produit une couche superficielle très résistante de 0,2 à 0,8 mm d'épaisseur, particulièrement efficace en présence de concentrateurs fonctionnels et technologiques. On obtient le même effet par galetage (passage d'un galet fortement pressé contre la surface); cette opération agit sur une plus grande profondeur (jusqu'à 2 mm et plus) et aplanit surtout les stries d'usinage en conférant au métal la même résistance que celle des éprouvettes rectifiées. Il faut prendre garde au fait qu'un écrouissage excessif abaisse la limite de fatigue en provoquant des microfissures dans les couches superficielles.

Le polissage hydraulique (traitement des surfaces actives des éléments de machines par un jet de liquide sous haute pression) permet d'écrouir une couche de 1,5 mm d'épaisseur tout en améliorant la microgéométrie de la surface. L'endurance des pièces est ainsi accrue de 25%.

On observe une diminution de la résistance à la fatigue s'il existe des contraintes résiduelles de traction en surface, comme par exemple à proximité des soudures.

On augmente aussi l'endurance par les traitements de surface visant à augmenter la dureté. Les traitements habituels sont:

- la trempe superficielle par induction haute fréquence;
- la cémentation et la trempe;
- la nitruration;
- la cyanuration;
- la trempe au laser.

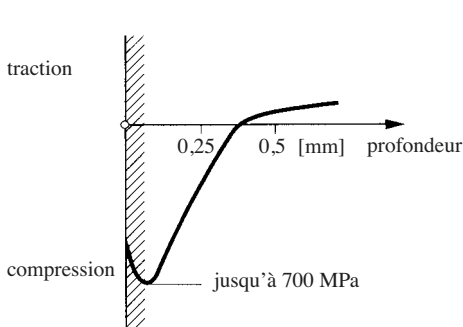


Fig. 23.41 Précontrainte superficielle.

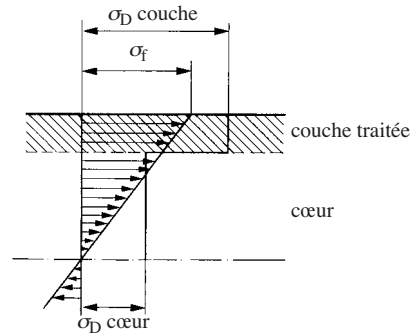


Fig. 23.42 Traitement de surface insuffisant d'une pièce fléchie.



La résistance diminue fortement à la limite entre la partie consolidée et celle qui ne l'est pas ; il est donc important de toujours traiter toute la surface de la pièce, à une profondeur suffisante.

Considérons, par exemple, une pièce soumise à une contrainte de flexion  $\sigma_f$  (fig. 23.42). La limite de fatigue de la couche traitée est plus élevée que celle du cœur, mais on observe que la contrainte de flexion dépasse la limite de fatigue à la limite de la partie non traitée. C'est là que pourrait germer une fissure de fatigue. On veillera à ce que la contrainte dans la partie non traitée ne dépasse pas la limite de fatigue.

Les *revêtements de surface* tels que chromage, nickelage, métallisation, diminuent la résistance à la fatigue des matériaux. Il semble que des microfissures dans le revêtement agissent comme des concentrateurs de contraintes. Le zingage électrolytique ne paraît pas affecter la limite de fatigue.

L'effet des traitements et revêtements de surface s'exprime par le **facteur de traitement de surface** :

$$c_S = \frac{\sigma_D \text{ traité}}{\sigma_D \text{ éprouvette}} \quad (23.23)$$

Un manuel donne les valeurs suivantes :

• nituration, profondeur 0,32 mm	$c_S = 1,25$
• cémentation suivie de trempe	1,5 ... 2
• trempe superficielle par haute fréquence	1,4 ... 2
• cuivrage électrolytique	0,7
• chromage	$\leq 0,6$

### Température

On observe que la limite de fatigue diminue lorsque la température s'élève. La diminution est très faible en cas de sollicitation alternée rapide ; en revanche, elle est beaucoup plus forte en cas de sollicitation ondulée avec  $\sigma_m > 0$  à cause de l'apparition de phénomènes de fluage.

Le **facteur de température** peut s'écrire, pour de l'acier,

$$c_T = \frac{1680}{1600 + T} \quad (23.24)$$

$c_T = 1$  lorsque  $0^\circ < T < 80^\circ \text{C}$ . La limite de fatigue augmente à basse température, de façon insignifiante jusque vers  $-40^\circ \text{C}$  ; mais il ne faut pas oublier que les aciers ordinaires deviennent alors fragiles.

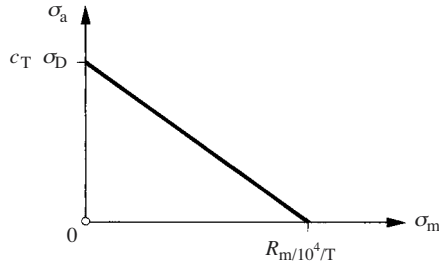
On construit le diagramme de Goodman à haute température, lorsque le fluage est à craindre, en reliant par une droite la contrainte de fluage  $R_{m/10^4/T}$  (sect. 23.6) à la limite de fatigue alternée  $c_T \sigma_D$  (fig. 23.43).

### Concentrateurs de contraintes

L'effet des entailles en fatigue sera examiné plus loin (§ 24.3.3).

### Facteur de correction

Le **facteur de correction** résultant des divers effets présentés ci-dessus est simplement le produit

Fig. 23.43 Diagramme de Goodman à haute température  $T$ .

$$c = c_a c_e c_R c_S c_T \quad (23.25)$$

avec :

$c_a$  facteur de confiance statistique

$c_e$  facteur d'échelle

$c_R$  facteur d'état de surface

$c_S$  facteur de traitement de surface

$c_T$  facteur de température

La résistance à la fatigue alternée corrigée du matériau de la pièce,  $\sigma'_D$ , se calcule immédiatement à partir de la résistance  $\sigma_D$  de l'éprouvette :

$$\sigma'_D = c \sigma_D \quad (23.26)$$

Le polygone limite est représenté à la figure 23.44, les résistances statiques ne sont pas affectées par ce facteur de correction, mais il faut naturellement tenir compte des valeurs réelles dans les pièces (§ 23.3.3).

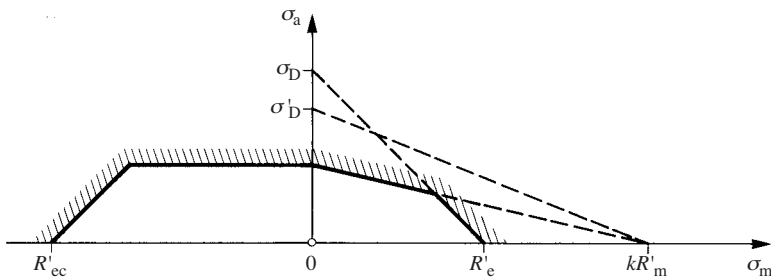


Fig. 23.44 Polygone limite de résistance à la fatigue d'une pièce non entaillée.

## 23.6 FLUAGE

On appelle *fluage* la déformation croissant progressivement au cours du temps d'un matériau soumis à une charge statique. Ce phénomène s'observe lorsque la température d'utilisation d'un matériau se rapproche de son point de ramollissement ; la

déformation peut se poursuivre jusqu'à la rupture. Mais le fluage s'observe déjà à la température ambiante pour le plomb et certains polymères, tandis qu'il se produit à des températures beaucoup plus élevées pour les aciers. Le fluage joue un rôle prédominant dans le dimensionnement des turbines à gaz, des installations à vapeur et du matériel de génie chimique fonctionnant à haute température; voir par exemple [23.10].

L'allongement d'une éprouvette soumise à une force de traction permanente et exposée à une température élevée constante est décrit par la figure 23.45. On distingue trois stades (courbe 1). Dans le premier, la déformation est d'abord relativement rapide, puis la vitesse de déformation décroît. Dans le deuxième stade, la vitesse de fluage est constante; tandis que dans le troisième, elle croît de nouveau jusqu'à la rupture finale. Ce dernier stade manque si la rupture est fragile. La courbe (2) de la figure 23.45 représente le fluage pour une contrainte plus forte ou pour une température plus élevée que celle de la courbe (1). Le deuxième stade y est beaucoup moins marqué; pour des contraintes ou des températures encore plus hautes, il peut disparaître entièrement.

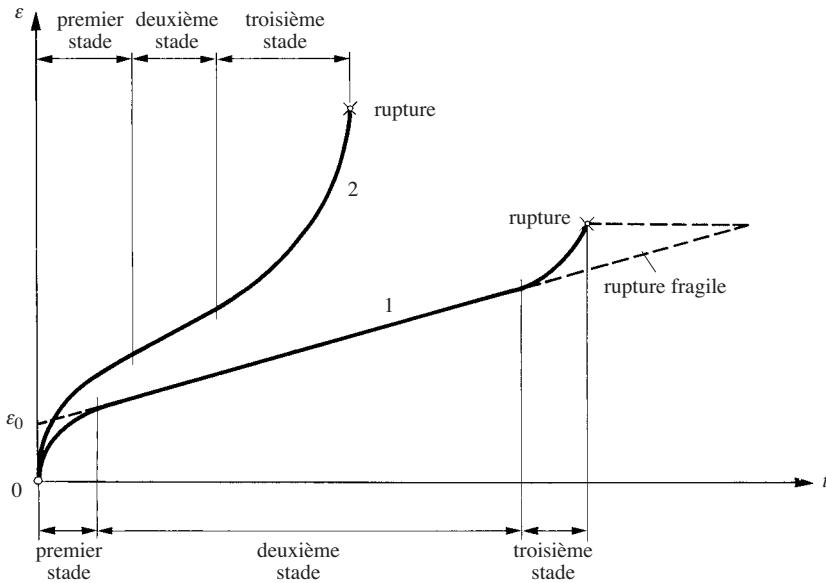


Fig. 23.45 Courbe schématique de fluage.

La **résistance au fluage** d'un matériau est la contrainte qui engendre sa rupture au bout d'un temps  $L[h]$  lorsqu'il est soumis à la température  $T[^\circ C]$ . On note  $R_{m/L/T}$  cette résistance. Par exemple, pour un acier 13 Cr Mo 44 :  $R_{m/100\,000/500} = 170\text{ N/mm}^2$ , cela signifie qu'une éprouvette exposée à la température de  $500^\circ C$  se rompt au bout de 100 000 heures lorsqu'elle est soumise à une contrainte de traction permanente de  $170\text{ N/mm}^2$ .

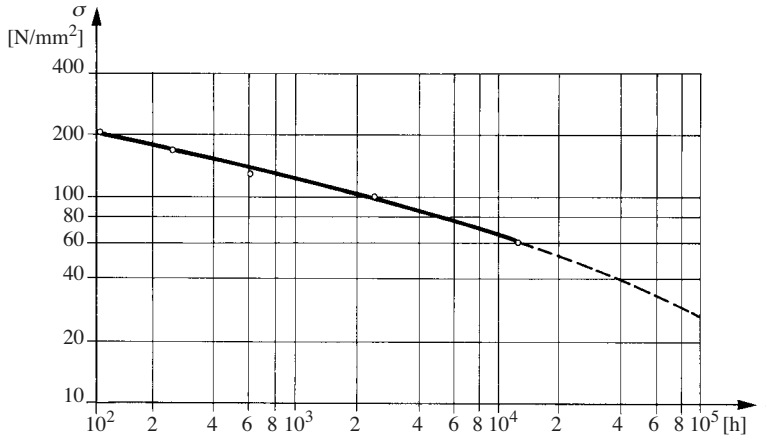


Fig. 23.46 Contrainte de fluage et longévité d'un acier au chrome-nickel à 650°C.

Le diagramme 23.46 montre la relation entre la longévité d'un acier et la contrainte de traction qu'il subit. On peut approcher cette courbe par la relation

$$R_{m/L/T} = R_{m/L_0/T} \left( \frac{L_0}{L} \right)^m \quad (23.27)$$

qui donne la résistance pour une longévité  $L$  lorsque la résistance d'un matériau est connue pour une longévité de référence  $L_0$ . Le paramètre  $m$  vaut 0,1 à 0,35 selon le matériau.

Certains polymères fluent déjà à la température ambiante habituelle; ce fluage s'accroît s'ils s'échauffent comme cela se produit dans les organes présentant du frottement. C'est pourquoi il convient de dimensionner les pièces en plastique sur la base d'un critère de résistance et vérifier aussi leur aptitude au service en fixant une limite de déformation maximale en tenant compte du fluage [23.11].

## 23.7 CHOIX DES MATÉRIAUX

### 23.7.1 Critères de choix

#### Mise en œuvre

Un matériau doit d'abord assurer une certaine fonction, mais son choix est étroitement lié à la forme et aux procédés de fabrication (fig. 23.47). En plus des exigences fonctionnelles, la géométrie et la structure de la pièce dépendent considérablement des moyens de fabrication qui dépendent à leur tour du matériau choisi. En effet, les techniques de mise en œuvre telles que coulée, formage à chaud ou à froid, usinage, soudage, collage, traitement thermique, sont fonction des caractéristiques physico-chimiques du matériau. Par exemple, une pièce peut se fabriquer en aluminium coulé pour autant qu'on choisisse un alliage convenable, mais sa précision géométrique est meilleure avec un procédé de coulée par injection. Cependant, le choix du matériau, de la forme et du procédé de fabrication est dominé par le souci d'obtenir la pièce au prix minimum.

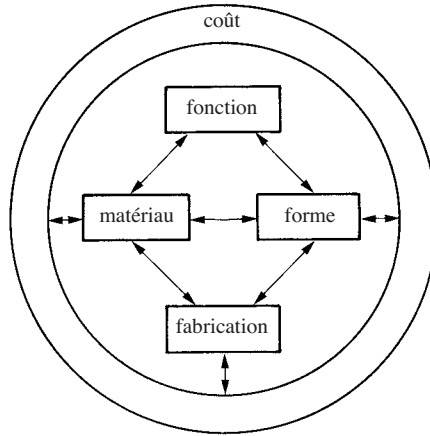


Fig. 23.47 Interactions présidant au choix d'un matériau et carcan du coût minimum.

### Caractéristiques physico-chimiques

Du point de vue fonctionnel, les principales caractéristiques physico-chimiques d'un matériau sont les suivantes :

- la résistance à la traction, la limite élastique et la résistance à la fatigue sont déterminantes pour la résistance mécanique ;
- le module d'élasticité influence la déformation, le flambage et le voilement ;
- la masse volumique définit la masse des pièces et influence le comportement dynamique ;
- le coefficient d'amortissement interne influence le comportement vibratoire ;
- la résistance à la chaleur détermine le fluage et la relaxation des contraintes, c'est-à-dire le comportement à long terme ;
- la dureté en surface et la nature du matériau influencent la résistance à l'usure, la résistance à la pression hertzienne et le frottement ;
- le coefficient de dilatation thermique, la chaleur massique et le coefficient de conductivité thermique déterminent le comportement thermique ;
- la composition chimique conditionne la résistance à l'agression de l'environnement.

L'étude du coût de la mise en œuvre et du comportement chimique sort du cadre de cet ouvrage. Nous nous limitons à quelques réflexions relatives au choix des matériaux en relation avec leurs performances mécaniques. Pour plus de détails, voir [23.12, 23.13]. Les quelques considérations ci-dessus prouvent que le choix d'un matériau n'est pas facile. Il fait appel à de vastes connaissances techniques et technologiques ainsi qu'à l'expérience industrielle. Ashby [23.14] propose une méthode de choix très intéressante que nous présentons brièvement.

On construit un diagramme dont l'ordonnée est dédiée à une caractéristique *A* et l'abscisse à une caractéristique *B* des matériaux. Avec des échelles logarithmiques, les points représentatifs des matériaux se groupent dans des zones permettant des comparaisons instructives. De plus, le diagramme contient des droites correspondant à une relation fonctionnelle du type

$$\frac{A^a}{B^b} = C \quad (23.28)$$

ou

$$a \log A = b \log B + \log C$$

en relation avec des indices de performance ;  $a$ ,  $b$  et  $C$  sont des constantes.

Ashby donne une série de diagrammes pour plusieurs caractéristiques intéressantes, y compris le coût des matériaux et les problèmes de fabrication ; nous en reproduisons seulement deux en relation avec la conception mécanique (fig. 23.48 et fig. 23.49). Ils permettent surtout de comparer les grandes classes de matériaux, mais il faudra naturellement prendre les valeurs de catalogue pour les calculs de dimensionnement exacts.

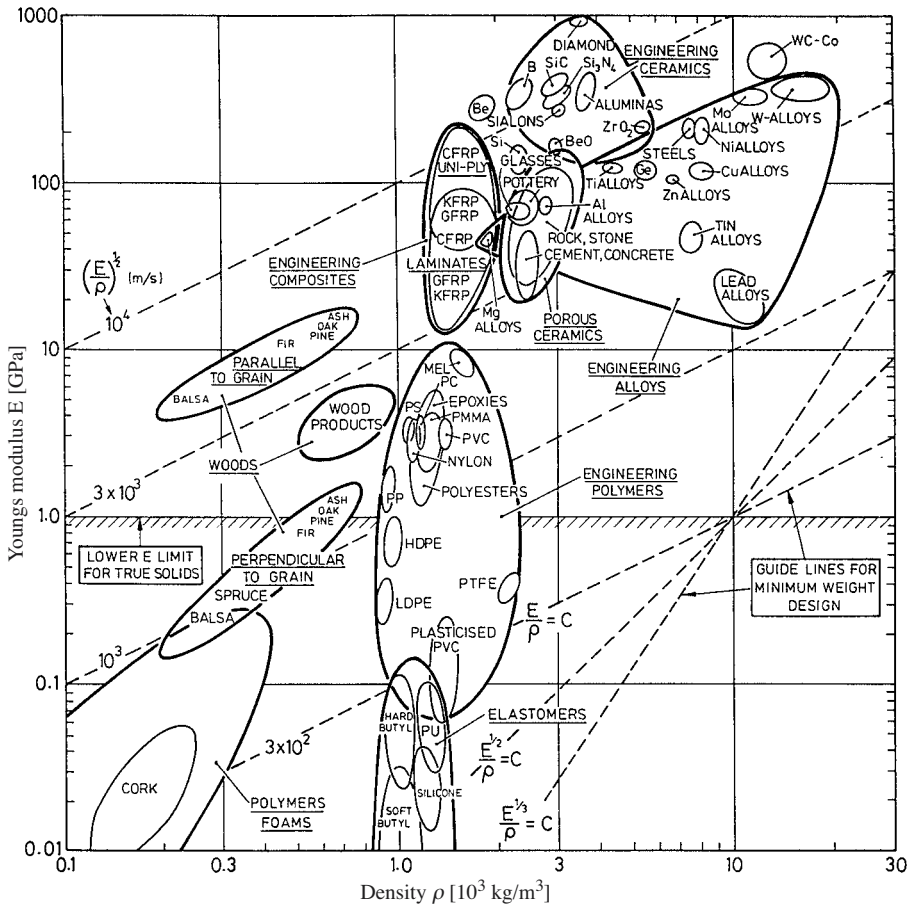


Fig. 23.48 Module d'élasticité en fonction de la masse volumique de matériaux de construction. Tiré de [23.14].



L'acier est moins tenace lorsque sa limite élastique augmente. On a intérêt à ce que la longueur critique de fissure soit la plus grande possible. Selon la formule (23.8), il faut choisir des matériaux dont le rapport  $K_{Ic} / R_e$  est élevé.

### Matériaux non métalliques

Les polymères, les composites fibrés et les céramiques sont de plus en plus utilisés en construction mécanique. Il nous paraît donc utile de présenter leurs caractéristiques générales parce qu'ils sont souvent moins bien connus que les métaux.

#### Polymères

On distingue trois catégories de polymères :

- les **polymères thermoplastiques** fusibles à haute température, sont moulables par injection ou extrudables en continu ;
- les **élastomères** doués d'une grande élasticité jusqu'à  $-60^{\circ}\text{C}$  ;
- les **polymères thermodurcis** qui ne fondent pas et ne sont aujourd'hui pas recyclables ; leur mise en œuvre est lente.

Les polymères offrent les avantages suivants :

- une grande résistance à la corrosion atmosphérique ;
- une petite masse volumique ;
- une forte dissipation interne d'énergie vibratoire ;
- un pouvoir d'isolation électrique élevé.

Ils présentent aussi des inconvénients :

- une faible résistance mécanique comparativement aux métaux ;
- un petit module d'élasticité ;
- un vieillissement par la lumière et par certains agents chimiques qui altèrent leur résistance mécanique ;
- une grande sensibilité à la température qui provoque du fluage et la pyrolyse ;
- une mauvaise conductibilité de la chaleur ;
- une forte dilatation thermique ;
- une accumulation de déchets qui chargent l'environnement.

On peut donner aux pièces en polymère des formes complexes, surtout lors d'une mise en œuvre par injection. Cela permet une conception intégrée qui diminue le nombre d'éléments. Le montage est rapide et automatisable grâce à des assemblages à encliquetage et à emboîtement. Ces propriétés réservent aux polymères une place de choix en microtechnique et pour de petits éléments de machines peu sollicités, des capots et des récipients en équipression. Ils sont par contre inaptes pour des pièces dont on exige des fréquences propres élevées.

#### Matériaux composites

Les matériaux composites fibreux sont constitués de **fibres** enrobées dans une substance, appelée **matrice**, formant le corps du matériau. Les principales substances pour les fibres sont :

- le verre E et le verre R ;
- le carbone HT à haute résistance et le carbone HM à haut module ;
- le polyamide aromatique, dit aramide ou kevlar ;
- le bore.



Les fibres s'utilisent sous forme de nappes unidirectionnelles, de tissus, de tresses, de matelas, de fibres courtes.

Pour la matrice on rencontre principalement:

- des polymères thermoplastiques;
- des polymères thermodurcis;
- des métaux et des céramiques.

D'une manière générale, les matériaux composites fibreux offrent les avantages suivants:

- une haute résistance spécifique;
- une grande rigidité spécifique;
- une forte dissipation interne d'énergie dans la matrice pour autant que les fibres permettent une certaine déformation;
- une grande ténacité avec l'aramide;
- une dilatation thermique nulle avec de la fibre de carbone;
- un stockage d'énergie potentielle élevé avec de la fibre de verre.

Leurs inconvénients sont les suivants:

- la température de service admissible est relativement basse;
- le prix du matériau est élevé;
- la fabrication des pièces est délicate;
- le coût de conception (calcul) et de réalisation est élevé;
- la résistance dépend dans une grande mesure de la qualité de la fabrication;
- l'élimination des déchets pose des problèmes.

Le module d'élasticité des fibres est généralement considérablement plus grand que celui de la matrice; ce sont donc les fibres qui transmettent la quasi-totalité de la force appliquée lorsqu'elles sont parallèles au champ de force.

Un matériau constitué de fibres toutes orientées dans la même direction est très fortement anisotrope. On peut se rapprocher de caractéristiques isotropes en disposant de tissus avec nappes à 90° et en superposant encore des tissus inclinés à 45° ou à 30° et à 60°. La combinaison de diverses fibres permet d'obtenir des caractéristiques particulières. Par exemple, une combinaison de fibres de carbone pour une grande rigidité et d'aramide pour une grande ténacité; de la fibre de verre pour emmagasiner beaucoup d'énergie de déformation mélangée à de la fibre de carbone qui annule la dilatation thermique.

En jouant avec la combinaison des matières, le nombre et l'orientation des fibres, on crée en quelque sorte des matériaux sur mesure dont les caractéristiques sont adaptées à l'application envisagée.

Les matériaux composites en fibre de carbone sont particulièrement avantageux pour améliorer le comportement dynamique des mécanismes et pour constituer des éléments de structures légères.

A cause de son coût relativement bas, la fibre de verre s'emploie chaque fois que des fibres plus performantes ne sont pas nécessaires et pour constituer des ressorts.

### *Céramiques*

Les matériaux céramiques sont caractérisés par:

- leur résistance aux plus hautes températures rencontrées dans l'industrie;

- leur très grande dureté, immédiatement après celle du diamant;
- leur haute résistance à l'agression chimique;
- leur très faible conductivité thermique (sauf une exception);
- leur haut pouvoir isolant électrique;
- leur très grande fragilité.

La fragilité en rend l'utilisation très délicate pour des pièces de machines. Il faudrait des céramiques offrant une certaine ductibilité et il faut encore développer des moyens d'assemblages adéquats.

### 23.7.2 Performances

Tout élément de machine doit remplir une ou plusieurs fonctions indépendantes de son matériau et de sa géométrie. On exige aussi qu'il soit performant. La performance désirée est d'une autre nature que l'exigence fonctionnelle; on veut par exemple qu'une pièce transmette une charge (exigence fonctionnelle) et qu'elle soit légère (performance). D'une manière générale, une performance  $Pe$  d'un élément dépend de trois groupes de paramètres:

- les exigences ou contraintes fonctionnelles  $Fo$ ;
- les paramètres géométriques  $Ge$ ;
- les paramètres  $Ma$  caractérisant le matériau.

La performance s'exprime par une fonction

$$Pe = f(Fo, Ge, Ma) \quad (23.29)$$

qui constitue une équation de dimensionnement.

Les trois groupes de paramètres de (23.29) sont dits *séparables* lorsque la fonction de performance peut s'écrire sous la forme d'un produit de trois fonctions indépendantes:

$$Pe = f_1(Fo) \cdot f_2(Ge) \cdot f_3(Ma) \quad (23.30)$$

La fonction  $f_3$  des paramètres du matériau ne dépend pas, dans un premier stade, de la géométrie. Il est alors possible de maximiser ou de minimiser la performance en choisissant convenablement la combinaison  $f_3(Ma)$  qui reçoit le nom d'**indice de performance du matériau**. Connaissant sa structure mathématique, on peut choisir le matériau sans faire un calcul détaillé de la pièce.

Les caractéristiques physiques des matériaux ne sont pas toujours indépendantes; ainsi, le module de glissement au cisaillement dépend directement du module d'élasticité. On remarque aussi que les paramètres du matériau ne peuvent pas varier de manière continue, mais qu'ils changent, au contraire, de manière discrète en passant d'un matériau ou d'une nuance à l'autre.

Un ou plusieurs paramètres géométriques sont souvent imposés, par exemple la portée entre deux paliers ou la longueur d'une bielle. Mais il en existe d'autres qui sont libres ou qui peuvent varier entre certaines limites.

Distinguons trois sortes de contraintes géométriques:

- la forme et les dimensions sont imposées;

- la forme est imposée, mais au moins une dimension est libre;
- la forme et au moins une dimension sont libres.

Du point de vue strictement mécanique, le choix du matériau le mieux adapté à la construction d'une pièce dépend de sa fonction, de sa forme et de ses dimensions géométriques.

### 23.7.3 Forme et dimensions imposées

La forme et les dimensions d'un élément sont souvent imposées par des considérations constructives. Mais il est intéressant de savoir quelles sont les caractéristiques du matériau et comment elles interviennent dans les performances de l'élément. Voici deux exemples.

#### Pulsation propre en flexion d'une poutre

Une poutre sur deux appuis vibre latéralement. Sa pulsation propre d'ordre  $k$  est [23.15, 23.16]

$$\omega_k = \frac{\lambda_k}{\ell^2} \sqrt{\frac{I}{A}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (23.31)$$

avec :

- $\lambda_k$  facteur dépendant des liaisons et de l'ordre  $k$  du mode
- $\ell$  distance entre appuis ou longueur de la poutre
- $I$  moment quadratique de surface en flexion
- $A$  aire de la section

Les pulsations propres sont d'autant plus hautes que l'indice de performance  $E/\rho$  (module d'élasticité spécifique) du matériau est plus grand.

#### Transmission de couple par un arbre

Un arbre lisse est sollicité en torsion, la contrainte de torsion peut atteindre la contrainte admissible

$$\tau_t = \tau_{\text{adm}} = \frac{R_{\text{lim}}}{\sqrt{3} S}$$

avec :

- $R_{\text{lim}}$  résistance limite en traction, limite élastique ou limite de fatigue en flexion
- $S$  facteur de sécurité

Avec un diamètre  $d$ , l'arbre plein peut transmettre le couple

$$M_t = \frac{\pi d^3}{16} \frac{R_{\text{lim}}}{\sqrt{3} S} \quad (23.32)$$

Pour une longueur  $\ell$ , sa masse vaut

$$m = \frac{\pi}{4} d^2 \ell \rho \quad (23.33)$$

L'arbre est performant s'il est léger. Formons le rapport

$$\frac{m}{M_t} = 4\sqrt{3} S \frac{\ell}{d} \frac{\rho}{R_{\text{lim}}} \quad (23.34)$$

A couple égal, l'arbre est d'autant plus léger que l'indice de performance  $R_{\text{lim}}/\rho$  (résistance spécifique) du matériau est plus grand.

### 23.7.4 Forme imposée, dimensions libres

#### Méthode

Un élément doit remplir une certaine fonction. Sa forme est souvent dictée par des considérations de construction; en outre, une ou plusieurs de ses dimensions doivent satisfaire certaines conditions. Par exemple, une poutre doit avoir une section rectangulaire, sa largeur  $b$  et sa hauteur  $h$  peuvent varier en principe librement, mais on exige encore que la proportion  $b/h$  reste constante de sorte que le problème ne comporte finalement qu'une variable,  $b$  ou  $h$ . On cherche un matériau permettant de maximiser une performance ou de minimiser un effet indésirable. La marche à suivre pour résoudre ce problème est la suivante:

- définir la performance  $Pe$  voulue, puis écrire une expression mathématique de cette performance contenant tous les paramètres de construction;
- identifier les paramètres susceptibles de varier librement;
- déterminer les contraintes fonctionnelles contenant les variables libres et les classer par ordre d'importance décroissante;
- écrire les équations décrivant les contraintes fonctionnelles et contenant les variables géométriques libres qui interviennent dans l'expression de la performance;
- résoudre les équations fonctionnelles par rapport aux variables libres, puis introduire ces dernières dans l'expression de la performance;
- regrouper les paramètres selon

$$Pe = f(Fo, Ge, Ma) \quad (23.29)$$

- lire dans la formule l'indice de performance du matériau permettant d'atteindre l'objectif visé;
- choisir le matériau;
- calculer les dimensions nécessaires pour satisfaire les contraintes fonctionnelles;
- calculer la valeur de la performance.

Notons qu'il n'est pas toujours nécessaire d'obtenir une solution complète du problème pour découvrir l'indice de performance déterminant du matériau. Voici quelques exemples.

### Poutre rectangulaire rigide et légère

On souhaite qu'une poutre offre une certaine rigidité de flexion et soit légère, c'est la performance attendue. Avec une proportion  $b/h$  donnée, sa masse est

$$m = \frac{b}{h} h^2 \ell \rho$$

La rigidité  $k$  de la poutre vis-à-vis d'une force transversale  $F$  vaut

$$k = B \frac{EI}{\ell^3} = B \frac{E}{\ell^3} \frac{b}{12} h^4$$

et exprime la contrainte ou exigence fonctionnelle. Le facteur  $B$  dépend de la nature des appuis et de la position de la charge sur la poutre. Tirons  $h^2$  de l'équation ci-dessus et introduisons cette grandeur dans la fonction de performance; après groupement des grandeurs selon (23.30), on obtient

$$m = (2\sqrt{3} \sqrt{k}) \left( \sqrt{\frac{b/h}{B}} \ell^{5/2} \right) \left( \frac{\rho}{\sqrt{E}} \right) \quad (23.35)$$

La poutre est d'autant plus légère que l'indice de performance  $E^{1/2}/\rho$  de son matériau est plus grand.

### Arbre cylindrique résistant et léger

Un arbre a pour fonction de transmettre un couple  $M_t$ , et l'on veut qu'il soit léger. Le diamètre d'un arbre plein est la variable libre du problème. Tirons  $d$  de (23.32) et introduisons dans l'expression (23.33) de la masse, il vient

$$m = 3,353 (S M_t)^{2/3} \ell \frac{\rho}{R_{\text{lim}}^{2/3}} \quad (23.36)$$

L'indice de performance du matériau est  $R_{\text{lim}}^{2/3}/\rho$ ; l'arbre est d'autant plus léger que cette valeur est plus grande.

### Ressort

L'énergie stockée par unité de volume d'un ressort sollicité en flexion ou en torsion est donnée par les formules suivantes (§ 12.4.2):

$$w_V = \eta_A \frac{\sigma_{\text{max}}^2}{2E} \quad (12.42)$$

$$w_V = \eta_A \frac{\tau_{\text{max}}^2}{2G} \quad (12.43)$$

où  $\eta_A$  est le facteur d'utilisation du ressort.

L'indice de performance du matériau est  $R_{\text{lim}}^2/E$  pour les ressorts sollicités en flexion et  $\tau_{\text{lim}}^2/G$  pour ceux qui travaillent en torsion. Supposons qu'on veuille construire un ressort qui stocke en flexion le plus d'énergie par unité de masse; l'indice de performance du matériau vaut alors:

$$Ma = \frac{R_{\text{lim}}^2}{\rho E} \quad (23.37)$$

Une évaluation (tab. 23.52) montre que le verre est à cet égard 78 fois meilleur que l'acier, c'est pourquoi on exécute souvent aujourd'hui des ressorts à lames en fibre de verre.

### Flambage d'une poutre légère

La charge critique de flambage élastique d'une poutre cylindrique pleine vaut, selon la formule d'Euler (21.2),

$$F_c = \frac{\pi^2 E}{(\mu \ell)^2} \frac{\pi d^4}{64} \quad (23.38)$$

avec:

$d$  diamètre

$\ell$  longueur de la poutre

$\mu$  facteur de longueur (dépend des appuis), (fig. 21.9)

$E$  module d'élasticité

La longueur de flambage indiquée dans la figure 21.9 est précisément  $\ell_0 = \mu \ell$ . Exprimons la masse de la poutre en y introduisant le diamètre tiré de l'équation de contrainte fonctionnelle ci-dessus. Il vient

$$m = \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{F_c} \right) (\mu \ell^2) \left( \frac{\rho}{\sqrt{E}} \right) \quad (23.39)$$

L'indice de performance du matériau vaut alors:

$$Ma = \frac{E^{1/2}}{\rho} \quad (23.40)$$

### Conclusions

Le tableau 23.50 regroupe les indices de performance de divers cas. L'analyse de la figure 23.51 et du tableau 23.52 permet de dégager quelques conclusions intéressantes:

- l'acier s'impose en pratique du point de vue résistance et rigidité lorsque la masse ne joue pas de rôle, surtout à cause d'une mise en œuvre facile et économique;

- le titane est favorable en cas de sollicitation par des forces d’inertie;
- les alliages d’aluminium et de magnésium sont intéressants pour créer des pièces légères, résistantes aux efforts, résistantes au flambage et devant présenter une fréquence propre élevée;
- en construction légère, les matériaux fibrés à base de carbone, d’aramide (kevlar) et de bore sont plus performants que les métaux pour des constructions rigides à fréquences propres élevées et résistant bien au flambage;
- tous les composites fibrés sont extrêmement intéressants pour obtenir de fortes résistances massiques;
- l’aramide (kevlar) est très utile à cause de son important coefficient d’amortissement interne et de sa grande ténacité; il s’emploie en combinaison avec les fibres de verre et de carbone.

**Tableau 23.50** Indices de performance de matériaux ; forme imposée, une dimension transversale libre.

Caractéristiques à optimiser	minimiser	maximiser
Résistance de poutres en traction	masse	$R_{lim}/\rho$
Résistance de poutres en flexion	masse	$R_{lim}^{2/3}/\rho$
Résistance de poutres en torsion	masse	$R_{lim}^{2/3}/\rho$
Charge critique de flambage élastique de poutres	masse	$E^{1/2}/\rho$
Résistance de plaques en flexion	masse	$R_{lim}^{1/2}/\rho$
Rigidité de poutres en traction	masse	$E/\rho$
Rigidité de poutres en flexion	masse	$E^{1/2}/\rho$
Rigidité de poutres en torsion	masse	$G^{1/2}/\rho$
Rigidité de plaques en flexion	masse	$E^{1/3}/\rho$
Célérité d’ondes de compression	célérité	$E/\rho$
Fréquence propre en flexion de poutres	masse	$E^{1/2}/\rho$
Fréquence propre en torsion de poutres	masse	$G^{1/2}/\rho$
Fréquence propre de plaques en flexion	masse	$E^{1/3}/\rho$
Vitesse de pièces sollicitées par des forces d’inertie	vitesse (maximiser)	$R_{lim}/\rho$
Stockage d’énergie cinétique massique	masse	$R_{lim}/\rho$
Stockage d’énergie potentielle, flexion	volume	$R_{lim}^2/E$
Stockage d’énergie potentielle, flexion	masse	$R_{lim}^2/(\rho E)$

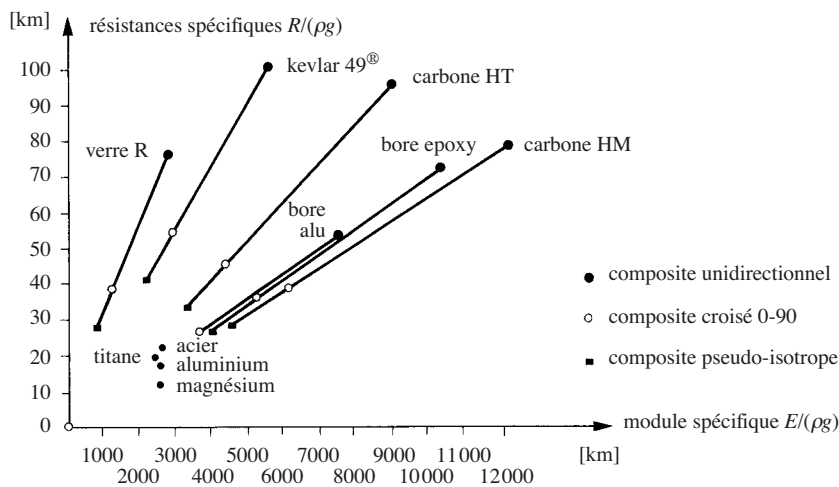


Fig. 23.51 Résistance spécifique et module d'élasticité spécifique de matériaux à 20°C.

Tableau 23.52 Indices de performance relatifs à un acier (calculé avec  $R_m = 520 \text{ MPa}$ ).

No	Matériaux		$R_m$ MPa	$E$ GPa	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>
1	Acier	Ac 52	520-620	200	7860
2	Alliage de titane	Ti Al 7 Mo 4	1340	110	4540
3	Alliage d'aluminium	Al Zn Mg Cu	700	71	2700
4	Alliage de magnésium	Mg 8 Al	350	45	1800
5	Fibre de verre E	60% volume	1100	43	2100
6	Fibre de carbone HM	60% volume	1350	280	1590
7	Fibre de carbone HS	60% volume	1550	150	1590
8	Fibre d'aramide, kevlar 49	60% volume	1300	75	1380
9	Fibre de bore	60% volume	2100	240	2000

Tableau 23.52 (suite).

No	$\frac{R_m}{\rho}$	$\frac{R_m^{2/3}}{\rho}$	$\frac{R_m^2}{E}$	$\frac{R_m^2}{\rho E}$	$\frac{E}{\rho}$	$\frac{E^{1/2}}{\rho}$	$\frac{E^{1/3}}{\rho}$
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4,46	3,25	12,07	20,90	0,95	1,28	1,42
3	3,92	3,55	5,10	14,86	1,03	1,73	2,06
4	2,94	3,35	2,01	8,79	0,98	2,07	2,66
5	7,92	6,17	20,81	77,90	0,80	1,74	2,24
6	12,83	9,34	4,81	23,80	6,92	5,85	5,53
7	14,74	10,24	11,85	58,56	3,71	4,28	4,49
8	14,24	10,49	16,97	94,93	2,14	3,49	4,12
9	15,87	9,97	13,59	53,41	4,72	4,31	4,18



### 23.7.5 Forme et dimensions libres

#### Facteur de forme

Les études de performance du paragraphe précédent supposaient toujours que la forme des pièces était invariable; par exemple, un rectangle voyait varier une de ses deux dimensions, mais le rapport  $b/h$  définissant ses proportions restait constant. Pourtant, on sait que la géométrie, et donc la forme de la section d'une poutre, joue un rôle important dans sa résistance et sa déformation. Afin de faciliter le choix d'une section, on définit des facteurs de forme appropriés à chaque cas.

#### *Traction, compression*

L'allongement et la contrainte dans une pièce sollicitée en traction ne dépendent que de l'aire de la section, non de sa forme. Il n'y a pas de facteur de forme dans ce cas.

#### *Déformation élastique en flexion et en torsion*

Du point de vue de la déformation, le **facteur de forme en flexion** est par définition le rapport du moment quadratique de surface  $I$  d'une forme quelconque, au moment quadratique de surface  $I_0$  d'un cercle de référence dont la section a la même aire  $A$  que celle de la poutre.

Le moment quadratique d'une surface circulaire de référence d'aire  $A$  s'écrit:

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)^2 = \frac{1}{4\pi} A^2$$

Le facteur de forme est par définition:

$$\Phi_f = \frac{I}{I_0} = 4\pi \frac{I}{A^2} \quad (23.41)$$

On trouve de même, pour le facteur de forme en torsion,

$$\Phi_t = \frac{I_t}{I_{p0}} = 2\pi \frac{I_t}{A^2} \quad (23.42)$$

avec:

- $I_t$  moment quadratique en torsion d'une surface de forme quelconque
- $I_{p0}$  moment quadratique polaire d'un cercle plein de référence
- $A$  aire de la surface

Par exemple, pour une poutre de section rectangulaire en flexion, on a  $I = bh^3/12$  et  $A = bh$ . La formule (23.41) donne:

$$\phi_f = \frac{\pi}{3} \frac{h}{b}$$

*Résistance en flexion et en torsion*

La contrainte de flexion dépend du moment de résistance

$$W = \frac{I}{e}$$

où  $e$  est la distance du bord le plus éloigné de la poutre à la fibre neutre. Exprimons le moment de résistance de la surface circulaire de référence d'aire  $A$ :

$$W_0 = \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{\pi}{32} \left( \frac{4}{\pi} A \right)^{3/2}$$

Le facteur de forme pour une section d'une poutre sollicitée en flexion s'écrit

$$\Phi_{\text{rf}} = \left( \frac{W}{W_0} \right)^2 = 16\pi \frac{I^2}{e^2 A^3} \quad (23.43)$$

Pour la résistance en torsion, le facteur de forme vaut

$$\Phi_{\text{rt}} = \left( \frac{W_t}{W_{p0}} \right)^2 = 4\pi \frac{W_t^2}{A^3} \quad (23.44)$$

où  $W_t$  est le moment de résistance en torsion.

*Flambage*

La charge critique de flambage d'une poutre comprimée est proportionnelle au moment quadratique de surface de la section. Par conséquent, le facteur de forme est le même que celui qui intervient dans la déformation en flexion (23.41).

*Comparaison des formes*

Le tableau 23.53 donne les facteurs de forme de diverses surfaces; certaines formules sont des approximations suffisantes pour la pratique.

La rigidité d'une poutre en flexion est proportionnelle à son moment quadratique. Par conséquent, le rapport de la rigidité d'une poutre quelconque à celle d'un cylindre plein de même aire droite s'écrit

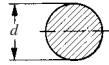
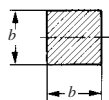
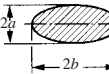
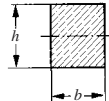
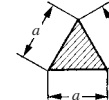
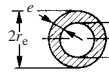
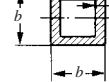
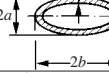
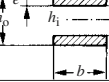
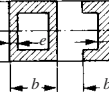
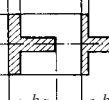
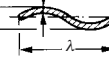
$$\frac{k}{k_0} = \frac{I}{I_0} = \Phi_f \quad (23.45)$$

Une poutre avec  $\Phi_f = 9$  est donc 9 fois plus rigide qu'une poutre cylindrique. Ce résultat est aussi valable en torsion.

A contrainte égale, la charge admissible en flexion par une poutre quelconque relative à celle admissible par une poutre cylindrique vaut

$$\frac{F}{F_0} = \frac{W}{W_0} = \sqrt{\Phi_{\text{rf}}} \quad (23.46)$$

Tableau 23.53 Facteurs de forme, selon [23.14].

Section	Rigidité		Résistance	
	$\emptyset_f$	$\emptyset_t$	$\emptyset_{rf}$	$\emptyset_{rt}$
	1	1	1	1
	$\frac{\pi}{3} \approx 1,05$	0,88	$\frac{8\pi}{18} \approx 1,40$	0,55
	$\frac{a}{b}$	$\frac{2ab}{(a^2 + b^2)}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$ ( $a < b$ )
	$\frac{\pi h}{3b}$	$\frac{2\pi}{3} \frac{b}{h} \left(1 - 0,58 \frac{h}{b}\right)$ ( $h > b$ )	$\frac{4\pi}{9} \frac{h}{b}$	$\frac{4\pi}{9} \frac{(b/h)}{(1 + 0,6 b/h)^2}$ ( $h > b$ )
	$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1,21$	$\frac{2\pi}{5\sqrt{3}} \approx 0,73$	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,60$	0,39
	$\frac{\bar{r}}{e}$	$\frac{\bar{r}}{e}$	$\frac{2\bar{r}}{e}$	$\frac{2\bar{r}}{e}$
	$\frac{\pi}{6} \frac{b}{e}$	$\frac{\pi}{8} \frac{b}{e} \left(1 - \frac{e}{b}\right)^4$	$\frac{4\pi}{9} \frac{b}{e}$	$\frac{\pi}{4} \frac{b}{e} \left(1 - \frac{e}{b}\right)^4$
	$\frac{a}{e} \frac{(1 + 3b/a)}{(1 + b/a)^2}$	$\frac{8(ab)^{5/2}}{e(a^2 + b^2)(a + b)^2}$	$\frac{a}{e} \frac{(1 + 3b/a)^2}{(1 + b/a)^3}$	$\frac{16a}{e(1 + a/b)^3}$
	$\frac{\pi}{2} \frac{\bar{h}^2}{be}$		$2\pi \frac{\bar{h}^2}{be}$	
	$\frac{\pi}{6} \frac{h}{e} \frac{(1 + 3b/h)}{(1 + b/h)^2}$	$\frac{\pi b^2 h^2}{e(h + b)^3}$ $\square$	$\frac{2\pi h(1 + 3b/h)^2}{9 e (1 + b/h)^3}$ $\square$	$\frac{2\pi h^3}{be(1 + h/b)^3}$ $\square$
	$\frac{\pi}{6} \frac{h}{e} \frac{(1 + 4be^2/h^3)}{(1 + b/h)^2}$	$\frac{\pi e(1 + 8b/h)}{6h(1 + b/h)^2}$ $\square$	$\frac{\pi h(1 + 4be^2/h^3)^2}{4 e (1 + b/h)^3}$ $\square$	$\frac{\pi}{18} \frac{e}{h} \frac{(1 + 8b/h)^2}{(1 + b/h)^3}$ $\square$
	$\frac{\pi d^2}{2e\lambda}$		$\pi \frac{d^2}{e\lambda}$	

Une poutre avec  $\Phi_{rf} = 9$  peut supporter une charge trois fois plus forte qu'une poutre cylindrique de même section et de même longueur.

On remarque qu'une section est d'autant plus efficace que la valeur de son facteur de forme est plus élevée. Mais cette valeur est limitée, d'une part par les problèmes de fabrication de profils minces, d'autre part par le voilement local et par le dépassement de la limite élastique.  $\Phi_f$  est limité à 30 pour de l'acier, à 25 pour de l'aluminium, à 10 pour les polymères rigides. Pour les élastomères, cette limite se situe vers 3, c'est pourquoi les tuyaux en caoutchouc sont à parois épaisses afin de ne pas s'écraser lorsqu'on les plie.

### Indice de performance du matériau et de la forme

La performance d'une structure dépend de la forme et de la taille de sa section ainsi que du matériau. On vient de voir comment apprécier l'influence de la forme tandis que le choix du matériau pour une forme donnée a été discuté au paragraphe 23.7.4. Le concepteur peut souvent choisir librement l'un et l'autre. Mais la forme et le matériau ne sont pas indépendants, le travail est facilité si on dispose d'un indice de performance combiné.

Traitions seulement un cas pour montrer la méthode de calcul. Une poutre doit supporter une charge  $F$  en flexion pour une masse minimale. Avec une résistance limite  $R_{lim}$  et un facteur de sécurité  $S$ , la poutre admet la charge :

$$F = \frac{C}{\ell} \frac{I}{e} \frac{R_{lim}}{S}$$

Le facteur  $C$  dépend des appuis et de la position de la charge sur la poutre. Substituons à  $I/e$  sa valeur tirée de (23.43). Il vient

$$F = \frac{C}{4\pi^{1/2} \ell} \left( A^3 \Phi_{rf} \right)^{1/2} \frac{R_{lim}}{S}$$

Tirons l'aire  $A$  de cette équation et introduisons-la dans l'expression de la masse ; on trouve :

$$m = \left( \frac{4\pi^{1/2}}{C} \right)^{2/3} (SF)^{2/3} \ell^{5/3} \frac{\rho}{\Phi_{rf}^{1/3} R_{lim}^{2/3}} \quad (23.47)$$

Il s'agit maintenant de maximiser l'indice de performance

$$f(\text{Ge}, \text{Ma}) = \frac{\Phi_{rf}^{1/3} R_{lim}^{2/3}}{\rho} \quad (23.48)$$

pour minimiser la masse. Avec un arbre circulaire plein, le facteur de forme est égal à l'unité ; on retrouve l'indice de performance contenu dans (23.36).

Le tableau 23.54 donne l'indice de performance combiné de forme et de matériau pour divers cas.

Tableau 23.54 Indices de performance du matériau et de la forme.

Caractéristiques	minimiser	maximiser
Résistance de poutres en traction	masse	$R_{\text{lim}}/\rho$
Résistance de poutres en flexion	masse	$\phi_{\text{rf}}^{1/3} R_{\text{lim}}^{2/3}/\rho$
Résistance de poutres en torsion	masse	$\phi_{\text{rt}}^{1/3} R_{\text{lim}}^{2/3}/\rho$
Charge critique de flambage élastique de poutres	masse	$\phi_{\text{f}}^{1/2} E^{1/2}/\rho$
Rigidité de poutres en traction	masse	$E/\rho$
Rigidité de poutres en flexion	masse	$\phi_{\text{f}}^{1/2} E^{1/2}/\rho$
Rigidité de poutres en torsion	masse	$\phi_{\text{t}}^{1/2} G^{1/2}/\rho$
Fréquence propre en flexion de poutres	masse	$\phi_{\text{f}}^{1/2} E^{1/2}/\rho$
Fréquence propre en torsion de poutres	masse	$\phi_{\text{t}}^{1/2} G^{1/2}/\rho$
Stockage d'énergie potentielle, flexion	volume	$\frac{\phi_{\text{rf}}}{\phi_{\text{f}}} R_{\text{lim}}^2/E$
Stockage d'énergie potentielle, flexion	masse	$\frac{\phi_{\text{rf}}}{\phi_{\text{f}}} R_{\text{lim}}^2/(\rho E)$
Stockage d'énergie potentielle, torsion	volume	$\frac{\phi_{\text{rt}}}{\phi_{\text{t}}} R_{\text{lim}}^2/G$
Stockage d'énergie potentielle, torsion	masse	$\frac{\phi_{\text{rt}}}{\phi_{\text{t}}} R_{\text{lim}}^2/(\rho G)$

Application numérique

Une poutre doit avoir une fréquence propre élevée en flexion et être très légère. Selon le tableau 23.54, il faut maximiser l'indice de performance

$$f(\text{Ge}, \text{Ma}) = \phi_{\text{f}}^{1/2} \frac{E^{1/2}}{\rho}$$

On choisit un profil rectangulaire creux dont les proportions sont  $h = 2,5\ b$  et  $e = 0,04\ h$ . Selon le tableau 23.53, le facteur de forme vaut

$$\phi_{\text{f}} = \frac{\pi}{6} \frac{h}{e} \frac{1 + 3\ b/h}{(1 + b/h)^2} = \frac{\pi}{6} \frac{1}{0,04} \frac{1 + 3/2,5}{(1 + 1/2,5)^2} = 14,69$$

Le tableau 23.52 montre que l'indice de performance relatif  $E^{1/2}/\rho$  est le plus grand pour de la fibre de carbone HM (haut module) et vaut 5,85. L'indice de performance cherché vaut finalement

$$f(\text{Ge}, \text{Ma}) = 14,69^{1/2} \times 5,85 = 22,4$$

Puisque les sections ont la même aire, on a le rapport des masses des poutres :

$$\frac{m_C}{m_{Ac}} = \frac{\rho_C}{\rho_{Ac}} = \frac{1580}{7860} = \frac{1}{4,94}$$

Comparons la pulsation propre de la poutre en fibre de carbone à celle de la poutre en acier de référence avec la formule (23.31). En se souvenant de (23.41), pour la même section, on trouve

$$\frac{\omega_C}{\omega_{Ac}} = \sqrt{\phi_f \frac{E_C}{E_{Ac}} \frac{\rho_{Ac}}{\rho_C}} = \sqrt{14,69 \frac{280}{200} \frac{7860}{1590}} = 10,08$$

La fréquence propre de la poutre en fibre de carbone de section rectangulaire creuse est finalement 10 fois plus élevée avec une masse 4,9 fois plus petite que pour une poutre cylindrique pleine en acier.

Calculons le rapport des moments de flexion admissible dans les poutres :

$$\frac{M_C}{M_{Ac}} = \frac{W_C}{W_{Ac}} \frac{R_{mC}}{R_{mAc}} = \sqrt{\phi_{rf}} \frac{R_{mC}}{R_{mAc}}$$

L'évaluation numérique montre que la poutre en fibre de carbone est 14,4 fois plus résistante que la poutre de référence en acier.

Un calcul identique avec d'autres sections et d'autres matériaux permettrait de comparer l'efficacité de chacun.

Ashby [23.41] développe une méthode pour choisir rationnellement le matériau en fonction de la forme choisie.

### 23.7.6 Exemple: coque de sous-marin

Le choix du matériau de la coque d'un sous-marin est un exemple intéressant, parce que cette structure est affectée essentiellement par deux modes de destruction et parce que sa masse est liée à une condition de flottabilité.

Considérons la coque d'un sous-marin d'exploration composée d'un cylindre fermé par des fonds hémisphériques (fig. 23.55). Le cylindre est raidi par des couples circulaires disposés à intervalles réguliers destinés à s'opposer à son flambage. Le diamètre extérieur  $2R$  et la longueur  $L$  du cylindre sont déterminés par des considérations liées au cahier des charges général de l'engin. Il s'agit de déterminer l'épaisseur de la coque et de choisir le matériau de manière à permettre au sous-marin de naviguer à l'immersion la plus profonde possible.

#### Equilibre hydrostatique

Désignons par  $m_1$  la masse de la coque et par  $m_2$  celle de tous les autres éléments à bord, y compris les approvisionnements et l'équipage. Le sous-marin obéit à

la loi d'Archimède; en situation d'équilibre hydrostatique, sa masse totale est égale à la masse d'eau déplacée. Donc

$$m_1 + m_2 = \rho_e V \quad (23.49)$$

où  $\rho_e$  est la masse volumique de l'eau et  $V$  le volume total d'eau déplacé. Définissons la *masse relative* de la coque et celle des autres masses à la masse d'eau déplacée:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{m_1}{\rho_e V} \\ \varphi_2 &= \frac{m_2}{\rho_e V} \end{aligned} \right\} \quad (23.50)$$

La condition d'équilibre hydrostatique s'écrit alors:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1 \quad (23.51)$$

On dit qu'un sous-marin est pesé lorsque cette équation est satisfaite. De très faibles erreurs de pesée se compensent en marche au moyen des barres de plongée.

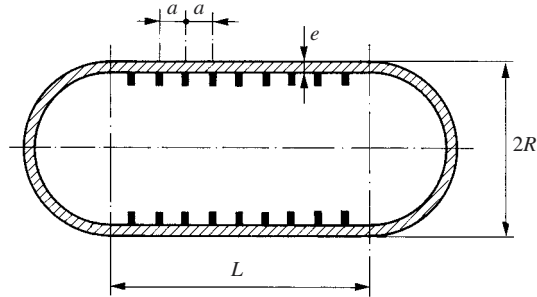


Fig. 23.55 Coque de sous-marin avec fonds hémisphériques.

La répartition des masses entre les divers groupes de matériel constitue ce qu'on appelle le devis de masse du bâtiment. La masse  $m_2$  nécessaire dépend principalement du programme d'exploitation: vitesse, endurance, équipement. Supposons que la masse relative  $\varphi_2$  soit donnée; selon la masse relative de la coque, on distingue trois cas:

- $\varphi_1 = 1 - \varphi_2$  le sous-marin est parfaitement pesé;
- $\varphi_1 < 1 - \varphi_2$  le sous-marin est trop léger et ne peut pas plonger; on ajoute du lest au fond de la coque pour obtenir la pesée ou on embarque de l'eau;
- $\varphi_1 > 1 - \varphi_2$  le sous-marin est trop lourd, il coule.

En nous référant à la figure 23.55, calculons la masse de la coque, en tenant compte de celle des couples par un facteur de correction  $K > 1$ . Avec la masse volumique  $\rho$  du matériau, on a:

$$m_1 \approx \rho_K (2\pi R L + 4\pi R^2) e$$

et le volume extérieur :

$$V = \pi R^2 L + \frac{4}{3} \pi R^3$$

La masse relative de la coque s'écrit :

$$\varphi_1 = \frac{m_1}{\rho_e V} = \Phi_K \frac{\rho}{\rho_e} \frac{e}{R} \quad (23.52)$$

avec le facteur de forme géométrique

$$\Phi = 6 \frac{2 + L/R}{4 + 3L/R} \quad (23.53)$$

qui se situe entre 2,18 pour un cylindre court ( $L = 6R$ ) et 2 pour un cylindre infiniment long.

### Flambage élastique

La pression critique de flambage élastique d'une coque cylindrique est donnée par la formule :

$$p_{c1} = Y_1 \frac{E}{4(1 - \mu^2)} \left( \frac{e}{R} \right)^3 \quad (23.54)$$

avec :

$E$  module d'élasticité du matériau

$\mu$  coefficient de Poisson

$Y_1$  facteur de rigidité exprimant l'effet raidissant des fonds et des couples

La pression moyenne exercée sur la coque est proportionnelle à l'immersion  $H$  du sous-marin (distance entre la surface de la mer et l'axe de la coque), soit

$$p = \rho_e g H$$

En égalant avec (23.54), on trouve l'immersion critique de flambage élastique. En introduisant encore l'épaisseur relative  $e/R$  tirée de (23.52), on obtient

$$H_{c1} = \frac{\rho_e^2}{4g} \frac{Y_1}{\Phi^3 K^3} \frac{E}{(1 - \mu^2) \rho^3} \varphi_1^3 \quad (23.55)$$

La quantité



$$Ma_1 = \frac{E^{1/3}}{(1 - \mu^2)^{1/3} \rho} \quad (23.56)$$

est l'indice de performance du matériau car on veut  $\rho$  à la puissance unité. L'immersion critique de flambage élastique est d'autant plus profonde que cet indice est plus grand; elle croît aussi avec le cube de la masse relative consacrée à la coque. Le tableau 23.52 montre que la fibre de carbone serait le matériau le plus favorable.

### Flambage plastique

Le flambage plastique survient lorsque le matériau du cylindre atteint sa limite élastique. Pour le flambage, on utilise prudemment toujours la limite avec seulement 0,02% de déformation résiduelle. La contrainte circonférentielle étant la plus grande des trois contraintes principales dans la paroi d'un cylindre, la théorie des récipients cylindriques à paroi mince donne:

$$p_{c2} = Y_2 R_{p0,02} \frac{e}{R} \quad (23.57)$$

Le facteur  $Y_2$  exprime l'effet d'appui des couples et des fonds, il tient aussi compte du moment de flexion additionnel provoqué par les défauts de circularité de la coque. Cette dernière influence est très sensible à la précision de fabrication. En procédant comme dans le cas du flambage élastique, on trouve l'immersion critique de flambage plastique

$$H_{c2} = \frac{1}{g} \frac{Y_2}{\Phi K} \frac{R_{p0,02}}{\rho} \varphi_1 \quad (23.58)$$

L'indice de performance du matériau pour le flambage plastique est dans ce cas:

$$Ma_2 = \frac{R_{p0,02}}{\rho} \quad (23.59)$$

### Immersion limite

Traçons les immersions critiques en fonction de la masse relative de la coque (fig. 23.56). Les courbes se coupent en un point L, correspondant à une immersion  $H_{cL}$  qui partage le diagramme en deux domaines:

- $H < H_{cL}$  la coque est détruite dans le mode de flambage élastique;
- $H > H_{cL}$  la coque est détruite dans le mode de flambage plastique.

Supposons que le devis des masses laisse disponible pour la coque la masse relative  $\varphi_1 = 1 - \varphi_2$ , il en résulte l'immersion maximale  $H_{lim}$ . Dans le cas de la figure, elle se trouve dans le domaine du flambage plastique; la coque est surdimensionnée vis-à-vis du flambage élastique. La coque est correctement dimensionnée (dimensionnement optimal) lorsque

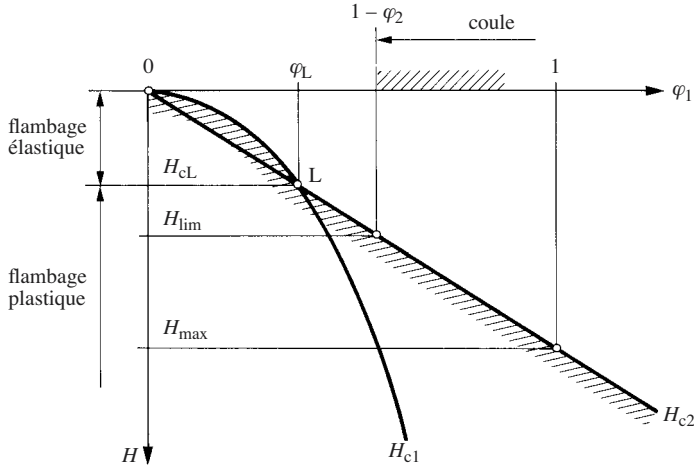


Fig. 23.56 Immersion limite d'une coque de sous-marin.

$$H_{c1} = H_{c2} = H_{lim}$$

c'est-à-dire au point L. Cette condition permet, pour une masse relative donnée, d'atteindre la profondeur la plus grande. Egalons (23.55) et (23.58); après regroupement des paramètres du matériau, on obtient

$$\frac{E}{(1 - \mu^2) \rho^2 R_{p0,02}} \varphi_1^2 = \frac{4}{\rho_e^2} \frac{\Phi^2 Y_2}{Y_1} K^2 \quad (23.60)$$

Le premier membre est déterminé par le matériau et par la masse relative consacrée à la coque. On agit sur le facteur géométrique

$$Ge = \frac{\Phi^2 Y_2}{Y_1} K^2$$

pour satisfaire l'équation en choisissant convenablement la section des couples (taille et forme) et leur espacement.

Pour plonger au-delà de la limite  $H_{lim}$ , il faut augmenter l'épaisseur de la coque et consentir à l'alourdir. Mais pour satisfaire à la loi d'Archimède, il est alors indispensable d'accroître la poussée en installant un flotteur, c'est le principe du *bathyscaphe*. Une coque dans laquelle on aurait investi la totalité de la masse,  $\varphi_1 = 1$ , ne pourrait pas plonger au-delà de  $H_{max}$  (fig. 23.56).

La figure 23.57 montre clairement l'influence du matériau sur l'immersion limite d'un sous-marin. Pour sélectionner le matériau, il faut naturellement tenir compte

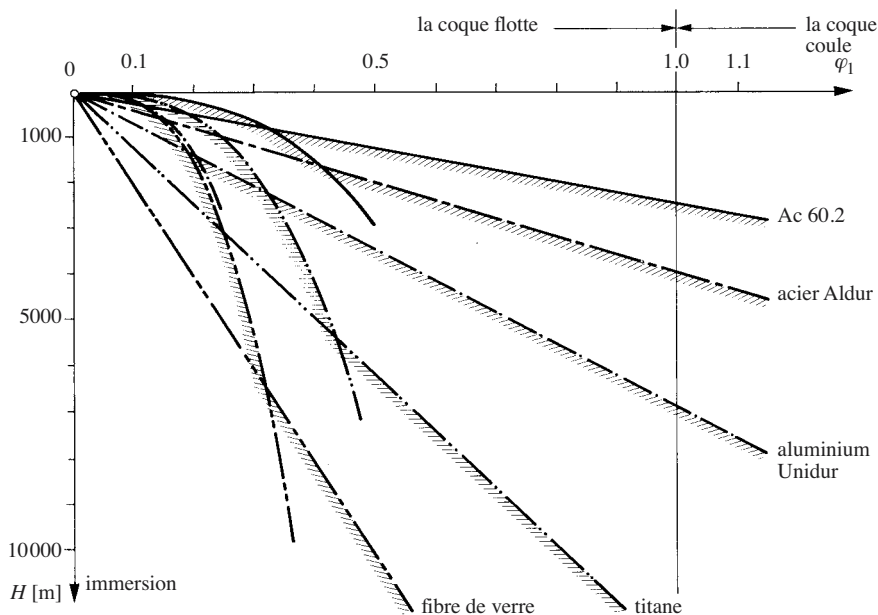


Fig. 23.57 Immersion limite d'une coque de sous-marin pour divers matériaux.

encore d'autres critères: facilité de fabrication, technique de liaison avec les autres organes, résistance au choc et à la corrosion, coût. L'acier est le matériau le plus souvent utilisé; on a développé aux Etats-Unis, spécialement pour la construction de sous-marins militaires, un acier à haute limite élastique désigné par HY 80, dont la mise en œuvre a nécessité de surmonter de sérieux problèmes de soudure. Dans le futur, on envisage d'utiliser un acier encore meilleur, le HY 100. En URSS, on a construit la coque d'une classe de sous-marins en titane afin d'accroître l'immersion de destruction et d'échapper à la détection magnétique. On a construit un sous-marin de recherche océanographique en aluminium et d'autres en fibres de verre ou en fibres de carbone.

Pour plonger à très grande profondeur, il est nécessaire de renoncer à la forme cylindrique et de recourir à une coque sphérique. En effet, pour une épaisseur relative  $e/R$  donnée, la pression de flambage élastique et celle de flambage plastique sont plus fortes pour une sphère que pour un cylindre.

L'immersion maximale autorisée est évidemment inférieure à l'immersion de destruction. On admet maintenant un facteur de sécurité situé vers 1,2 à 1,3. Il est si petit parce qu'on a acquis une bonne confiance dans les calculs en faisant des comparaisons entre l'immersion limite calculée et l'immersion de destruction effective déterminée par des essais destructifs conduits avec des sections grandeur nature de coques prototypes ou avec des coques entières de sous-marins déclassés.

### 23.7.7 Exemple: bras plieur

Ce cas est décrit par Védý et Brauen (23.17), mais nous utilisons encore des éléments d'études effectuées au Laboratoire d'organes de machines de l'Ecole poly-

technique fédérale de Lausanne. Le bras plieur a fourni le thème de l'illustration de couverture des trois volumes de cet ouvrage selon les points de vue qui ont présidé à son étude :

- conception statique,
- conception dynamique,
- choix des matériaux et dimensionnement.

### Cahiers des charges

Une machine appelée «plieuse-colleuse» est destinée à former des cartons pour le conditionnement de produits de grande consommation. Chaque emballage est obtenu par pliage et assemblage collé d'une plaque de carton imprimé dont les plis sont préparés par une empreinte rectiligne. Les plaques sont délivrées par un chargeur automatique puis pincées entre deux courroies de convoyage. Le pliage de la partie arrière de chaque plaque s'effectue par un bras rotatif (fig. 23.58) dont le nez soulève et rabat vers l'avant la partie à plier. Pendant cette opération, l'extrémité du bras va plus vite que la plaque de carton.

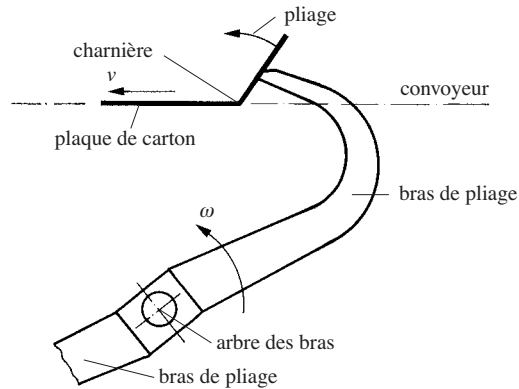


Fig. 23.58 Principe de pliage arrière des cartons.

Un arbre commandé par un moteur électrique porte deux bras de pliage; il effectue une loi de mouvement compliquée, synchronisée avec l'avance des plaques de carton, qui comporte un arrêt à chaque demi-tour. L'accélération est très forte. Les exigences principales du cahier des charges sont les suivantes :

- Un moment d'inertie des bras par rapport à l'axe de rotation le plus petit possible afin d'accroître la cadence de production des machines pour un entraîneur donné ou pour diminuer la taille et le coût de l'actionneur pour une cadence imposée.
- Une fréquence propre élevée dans les modes de flexion et de torsion des bras.
- Une résistance suffisante du bras pour qu'il ne casse pas s'il rencontre occasionnellement un obstacle constitué par un empilement de plaques de carton (bourrage du convoyeur).
- L'aptitude à travailler en permanence exposé au soleil, dans une atmosphère humide chaude ou très froide.
- Un prix de revient acceptable.

### Choix des matériaux

Les bras étaient à l'origine exécutés en un alliage de magnésium en forme de caisson largement ajouré. Le profil était un rectangle fermé pour obtenir une grande rigidité en torsion. Les progrès des matériaux composites permettant de concevoir de nouveaux bras encore plus légers, on pouvait a priori envisager les matériaux suivants :

- fibres longues à hautes performances en verre R, aramide, carbone ou bore ;
- fibres courtes pour injection.

Le choix du matériau devait tenir compte de la masse, de la résistance et de la rigidité de la pièce ; le procédé de fabrication et le coût final jouèrent un rôle déterminant dans l'appréciation des solutions. Les matériaux chargés de fibres courtes conduisaient dans ce cas à des pièces trop lourdes et pas assez résistantes. La fibre de verre n'était pas assez rigide, le bore trop onéreux. Le bras étant principalement sollicité en flexion, on a écarté l'aramide à cause de sa résistance insuffisante en compression et on a finalement retenu la fibre de carbone T 300.

### Structure et géométrie

La structure et la géométrie de la pièce, le procédé de fabrication et les calculs de résistance doivent s'étudier simultanément car ils sont fortement imbriqués. On peut donner au matériau les caractéristiques mécaniques voulues en jouant sur le nombre de couches de fibre et sur l'orientation des fibres. En technique des composites, on fabrique la pièce et le matériau en même temps. Le choix du procédé de fabrication et finalement le succès de la pièce sont très largement tributaires du savoir-faire des artisans. La pièce la mieux conçue et la mieux calculée est inutilisable si sa réalisation est déficiente. La bonne collaboration des divers spécialistes est ici encore plus importante qu'ailleurs.

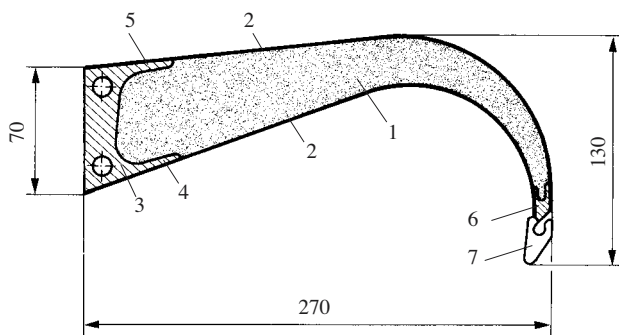


Fig. 23.59 Structure du bras en matériau composite.

Après évaluation approfondie de plusieurs techniques de mise en œuvre (moulage par compression, enroulement filamentaire, injection), on a décidé d'utiliser un procédé RTM (*Resin Transfer Molding*). Ce choix et le matériau de base ont finalement déterminé la structure de la pièce (fig. 23.59). Un noyau (1) en mousse Rohacell 51 est fabriqué par usinage sur une machine CNC. Il offre les avantages suivants :

- il positionne le tissu de la peau pendant le moulage ;
- il évite le gauchissement des sections et accroît donc la résistance à la torsion du bras.

La structure de la peau (2) est complexe. De la fibre de carbone est tressée en forme de chaussette directement sur le noyau. Des renforts de tissu unidirectionnel sont disposés sur les faces courbes pour obtenir la résistance à la flexion souhaitée. Un insert (3) en PPO (polyphénylène oxydé) permet d'assembler le bras avec le moyeu par boulonnage; l'insert est pourvu de languettes (4) et (5) destinées à transmettre les forces au noyau et à la peau par collage. Un insert (6) en PPO sert à fixer le nez (7). Ce dernier, en polyamide, est une pièce d'usure facile à remplacer. Après assemblage, le bras est placé dans un moule et une résine époxy est transférée pour constituer la matrice qui agglomère le tout.

Les calculs de résistance et de fréquence propre ont été effectués à l'aide d'un logiciel pour structures fibrées. L'orientation optimale des fibres et le nombre de plis ont été déterminés sur la base du critère de résistance de Tsai-Hill [23.18]. La sollicitation du bras lors de collisions occasionnelles avec le carton est sensiblement plus sévère que la sollicitation dynamique par le mouvement.

### Résultats

Les caractéristiques indiquées dans le tableau 23.60 résultent de calculs et de mesures sur pièces réelles. Le gain de 47% du moment d'inertie est très important. Mais compte tenu de l'inertie du moyeu, de l'arbre, du réducteur et du moteur, l'inertie de tout le groupe ne diminue que de 15% environ.

**Tableau 23.60** Comparaison de quelques caractéristiques des bras.

Caractéristiques		magnésium	composite
Masse	[kg]	0,170	0,108
Moment d'inertie	[kg m <sup>2</sup> ]	$5,4 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-3}$
Fréquence propre	[Hz]	944	815 à 840
Prix	[—]	1	2

Les fréquences propres ont été mesurées par analyse modale avec des conditions aux limites libre-libre. La première fréquence propre correspond au mode de flexion du bras dans son propre plan. Celle du bras en composite est inférieure à celle du bras métallique parce que le profil est un peu plus fin. Les mesures de fréquence propre se sont révélées précieuses pour juger la qualité d'exécution des pièces: un défaut de remplissage, un glissement des fibres pendant le transfert de résine ou un défaut de liaison se traduisent par une chute anormale de la fréquence propre. Des bras ont été soumis à des essais de résistance statique et en fatigue, d'autres ont été exploités dans des machines en conditions réelles avec de bons résultats.

Les résultats expérimentaux obtenus avec plusieurs pièces s'écartent de moins de 3% des prévisions du calcul.

Le prix de revient d'un bras composite est deux fois plus élevé que celui d'un bras en magnésium, mais cet inconvénient a été jugé acceptable face aux avantages obtenus.

### 23.8 CONCLUSIONS PRINCIPALES

Les principaux modes de rupture de pièces sont :

- la rupture statique, ductile ou fragile ;
- la rupture de fatigue ;
- la rupture par fluage.

La résistance à la rupture statique des matériaux et leur limite élastique se déterminent expérimentalement avec des éprouvettes normalisées. Mais leur résistance effective dans une pièce diffère souvent sensiblement des valeurs types de catalogue ; notamment, elle diminue lorsque la pièce est épaisse. Un matériau en soi ductile présente un comportement fragile lorsque :

- le métal est écroui ;
- la pièce est épaisse ;
- la pièce est entaillée ou présente de fortes concentrations de contraintes ;
- la température est basse ;
- la pièce subit un choc.

Le cuivre, les alliages légers et certains aciers restent ductiles jusqu'aux plus basses températures.

Les pièces affectées de défauts (fissures, soufflures) peuvent se rompre brutalement par un phénomène d'instabilité lorsque le défaut atteint une certaine taille. La ténacité caractérise la sensibilité d'un matériau aux défauts. Elle diminue lorsque les pièces sont épaisses, lorsque la température est basse et en cas de choc. La mécanique de la rupture permet de prévoir approximativement la vitesse de progression des fissures et la longévité des pièces.

Les ruptures de fatigue sont consécutives à la germination, puis à la propagation de fissures par des variations cycliques de contrainte. Des diagrammes linéaires simples permettent de déterminer la résistance à la fatigue de matériaux soumis à une variation alternée de contrainte superposée à une contrainte moyenne constante.

La résistance à la fatigue est inférieure à la limite élastique, elle diminue lorsque le nombre de cycles augmente. Au-delà de quelques millions de cycles il existe un seuil, la limite de fatigue, au-dessous duquel, en principe, aucune rupture ne survient. La limite de fatigue reste presque constante pour les aciers et le titane, mais décroît encore lentement avec un très grand nombre de cycles. La résistance des métaux non ferreux diminue toujours.

La résistance à la fatigue des pièces diminue lorsque leur épaisseur augmente. On améliore considérablement leur résistance en comprimant, en durcissant et en polissant la surface des pièces ; les aciers à haute résistance sont plus sensibles que les autres à la rugosité. Sauf le zingage, les autres revêtements de surface abaissent la résistance à la fatigue.

La résistance statique et la limite de fatigue en flexion sont supérieures à ce qu'elles sont en traction.

Certains polymères fluent déjà à la température ambiante ; il existe des aciers spéciaux résistants à haute température. La longévité d'une pièce exposée à une haute température diminue lorsque la contrainte croît ou lorsque la température augmente.

Le choix du matériau pour exécuter une pièce dépend de son coût, des facilités de mise en œuvre et de ses propriétés physico-chimiques. On peut choisir rationnellement celui qui répond le mieux aux conditions de service sur la base d'indices de performances spécifiques. Il existe des diagrammes qui classent les matériaux en fonction des propriétés attendues.

## DIMENSIONNEMENT ET SÉCURITÉ STRUCTURALE

### 24.1 INTRODUCTION

D'une manière générale, toute machine doit :

- satisfaire aux spécifications énoncées dans son cahier des charges (vitesse, effort, puissance, rendement, précision, longévité);
- offrir à ses utilisateurs un niveau de sécurité convenable.

Pour cela, chaque organe et chaque pièce doivent remplir correctement leur fonction en toute circonstance *normale*. On dit qu'ils doivent être *aptés au service*. Du point de vue de la sécurité, la machine doit en particulier assurer le service sans qu'aucune de ses pièces ne casse, c'est-à-dire que la résistance doit suffire pour assurer la *sécurité structurale nécessaire*.

Dans un sens large, le **dimensionnement** est la procédure qui vise à déterminer la taille ou les caractéristiques d'un élément pour lui permettre d'être apte au service et d'assurer la sécurité structurale nécessaire. Ainsi, le dimensionnement d'un moteur d'entraînement consiste à déterminer sa puissance nominale tandis que le dimensionnement d'un arbre sert à trouver son diamètre.

On appelle **critère de dimensionnement** toute condition qui détermine la taille d'un organe de machine. Ces critères dépendent de la fonction remplie par l'organe considéré; les valeurs limites des caractéristiques à respecter résultent du cahier des charges général.

Ce chapitre est consacré à la présentation des méthodes générales de dimensionnement, mais plus spécialement du point de vue de la sécurité structurale. Vu son importance, le dimensionnement aux déformations fera l'objet du chapitre 25. Ce chapitre est organisé comme suit :

- Section 24.2 Présentation des principes généraux de dimensionnement, formulation mathématique et méthodologie.
- Section 24.3 Calcul des contraintes effectives avec un accent particulier sur les phénomènes de fatigue. Effets des concentrations de contrainte et tracé des pièces.
- Section 24.4 Etude de la notion de sécurité; conception aléatoire du facteur de sécurité et discussion du choix de sa valeur. Sécurité structurale et sécurité de surcharge extérieure.
- Section 24.5 Méthodes de prédimensionnement; anticipation d'effets divers par la notion de contrainte de prédimensionnement.
- Section 24.6 Vérification de la sécurité structurale statique, à la fatigue et au choc. Appréciation de la valeur du facteur de sécurité.



- Section 24.7 Présentation des notions d'égale résistance et de proportions harmonieuses. Choix de la nuance des matériaux.
- Section 24.8 Conclusions principales.

Ce chapitre s'appuie largement sur les notions de résistance des matériaux développées au chapitre 23. Les calculs de résistance des organes de machines sont supposés connus; on les trouve, par exemple, dans [24.1, 24.2, 24.3].

Le dimensionnement, avec le tracé du dessin, laisse une large part au savoir-faire et à l'expérience du constructeur qui engage sa responsabilité et doit faire preuve d'une grande maturité professionnelle. C'est pourquoi on peut encore, malgré les progrès scientifiques, parler d'un art de l'ingénieur.

## 24.2 PRINCIPES GÉNÉRAUX

### 24.2.1 Critères de dimensionnement

La première chose à faire lorsqu'on veut dimensionner un organe ou un élément de machine consiste à définir les critères de dimensionnement déterminants. Ils dépendent des exigences fonctionnelles et du principe de fonctionnement de l'élément considéré.

#### Exigences fonctionnelles

Chaque élément de machine doit répondre à des exigences fonctionnelles qui découlent de son rôle dans la construction et du cahier des charges. Elles se formulent dans la phase de conception et de préparation de l'étude détaillée.

Les critères de dimensionnement d'un élément résultent du principe de son fonctionnement et de ses modes de ruine. Le projeteur les trouve dans sa connaissance des organes de machines et dans son capital d'expérience professionnelle.

Du point de vue de l'*aptitude au service*, citons quelques critères de dimensionnement fréquents:

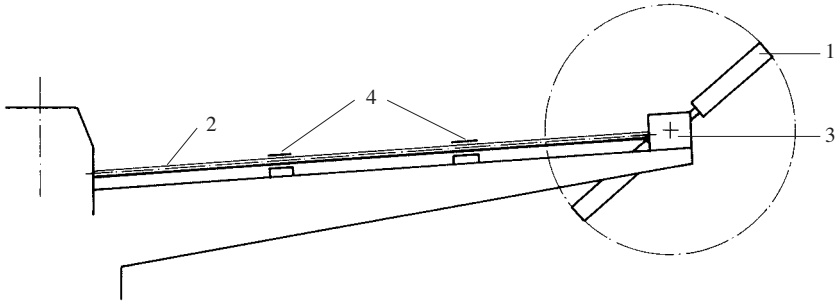
- résistance à la rupture statique, à la fatigue ou au fluage;
- stabilité de forme, flambage et voilement.
- résistance de surface à la pression hertzienne, détérioration par poinçonnement statique ou par écaillage;
- résistance de surface au matage;
- résistance à l'usure;
- déformation;
- rigidité;
- épaisseur du film lubrifiant;
- échauffement;
- grippage;
- bruit.

#### Exemple: arbre de commande de l'hélice stabilisatrice d'un hélicoptère

L'hélice stabilisatrice (1) d'un hélicoptère (fig. 24.1) est entraînée par un arbre (2) et un engrenage conique (3). L'arbre est porté par des paliers (4); il doit satisfaire les exigences suivantes:

- transmettre le couple d'entraînement maximal du stabilisateur;

- assurer le service pendant toute la vie de l'appareil;
- fonctionner à toute vitesse comprise entre zéro et la vitesse maximale;
- être léger.



**Fig. 24.1** Arbre du stabilisateur d'un hélicoptère.

La première et la deuxième condition exigent une résistance mécanique à la fatigue suffisante en torsion et en flexion lors des déformations de la structure. La troisième implique une condition double :

- la fréquence propre en torsion du système moteur-arbre-hélice doit être supérieure à la fréquence excitatrice ;
- la première vitesse critique de flexion de l'arbre doit se trouver au-dessus de sa vitesse maximale.

On satisfait toutes ces conditions en jouant sur le diamètre de l'arbre, le rapport de transmission de l'engrenage et la distance entre les paliers porteurs de l'arbre.

## 24.2.2 Formulation mathématique

### Relations d'aptitude au service

L'analyse des critères de dimensionnement permet de faire les constatations générales suivantes :

- chaque critère se quantifie par une **grandeur caractéristique** : effort, vitesse, contrainte, température ;
- cette grandeur caractéristique prend une certaine valeur lors du fonctionnement de l'organe considéré, c'est la **valeur effective** ;
- un organe de machine est défaillant si la grandeur caractéristique est, selon les cas, inférieure ou supérieure à une certaine **valeur limite**.

Désignons, d'une manière générale, par  $E$  la valeur effective et par  $L$  la valeur limite d'une grandeur caractéristique. Selon le critère de dimensionnement, un organe est apte à assurer le service demandé si

$$E < L \quad \text{ou} \quad E > L \quad (24.1)$$

Il ne peut pas l'assurer si

$$E \geq L \quad \text{respectivement} \quad E \leq L \quad (24.2)$$

On rencontre aussi des cas où une valeur effective doit se situer entre deux limites extrêmes, alors

$$L_{\min} < E < L_{\max} \quad (24.3)$$

Les inégalités (24.1) et (24.3) sont les *relations d'aptitude au service* ou les *relations de fonctionnement normal*.

### Marge de sécurité, limite admissible

Supposons qu'une pièce doive satisfaire l'inégalité d'aptitude au service

$$E < L$$

Immédiatement se pose la question suivante : de combien  $E$  doit-il être inférieur à  $L$  ? On prévoit une *marge de sécurité* minimale  $M_{\min}$  telle que

$$E \leq L - M_{\min} \quad (24.4)$$

La valeur effective peut à la limite être égale à la quantité  $L - M_{\min}$  puisqu'il existe encore la marge de sécurité  $M_{\min}$  jusqu'à la valeur limite  $L$ . C'est pourquoi on appelle *limite admissible* la valeur

$$L_{\text{adm}} = L - M_{\min} \quad (24.5)$$

La condition d'aptitude au service s'écrit alors sous la forme

$$E \leq L_{\text{adm}} \quad (24.6)$$

qu'on appelle *inégalité de sécurité*, car le fonctionnement est réputé sûr si cette relation est satisfaite.

### Facteur de sécurité

Il est souvent plus commode de faire intervenir la marge de sécurité sous la forme d'une relation adimensionnelle. On définit le *facteur de sécurité effectif*  $S$ , désigné encore souvent *coefficient de sécurité*, par

$$S = \frac{L}{E} \quad (24.7)$$

lorsque l'inégalité de service est  $E < L$ . Dans le cas où la condition d'aptitude au service s'exprimerait par  $E > L$ , on aurait

$$S = \frac{E}{L} \quad (24.8)$$

On a vu qu'il faut observer une marge de sécurité minimale vis-à-vis de la limite admissible. La valeur minimale du facteur de sécurité vaut alors, selon le sens de l'inégalité de sécurité,

$$S_{\min} = \frac{L}{L_{\text{adm}}} \quad \text{ou} \quad S_{\min} = \frac{L_{\text{adm}}}{L} \quad (24.9)$$

La valeur du facteur de sécurité effectif permet d'apprécier la sécurité de fonctionnement d'un organe de machine :

- $S \geq S_{\min}$       fonctionnement correct ;
- $S_{\min} > S > 1$     état de fonctionnement dangereux, un accident peut survenir en tout temps ;
- $S = 1$             l'état limite considéré est atteint, accident imminent ;
- $S < 1$             mise hors service de l'organe, accident.

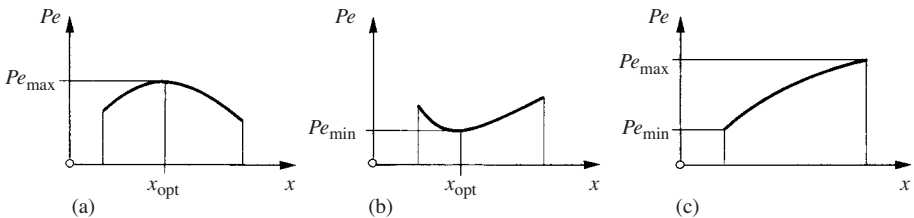
Dans le langage courant, en parlant du facteur de sécurité, on sous-entend souvent sa valeur minimale.

La signification du facteur de sécurité sera étudiée à la section 24.4.

### 24.2.3 Optimisation

Certaines caractéristiques ne sont pas toujours astreintes à respecter des limites bien définies, mais doivent seulement être maximales ou minimales. On cherche, par exemple, à construire un système d'entraînement permettant de déplacer un objet d'un point à un autre dans le temps le plus court possible avec un investissement minimum.

Ce problème se traite par la théorie de la *construction optimale* (optimum design). La performance recherchée constitue l'*objectif d'optimisation*. Les dimensions libres et le matériau sont habituellement les *variables d'optimisation* des pièces. Précisons qu'il s'agit d'une véritable optimisation lorsque la fonction objectif passe par un extremum en fonction d'une variable d'optimisation, d'une *maximisation* ou d'une *minimisation*, selon ce qui est recherché, lorsqu'il n'y a pas d'extremum dans le domaine couvert par la variable (fig. 24.2).



**Fig. 24.2** Optimisation d'une performance  $Pe$  : (a) et (b) optimisation proprement dite ; (c) minimisation ou maximisation.

Le choix final de la valeur d'une variable d'optimisation n'est pas toujours critique, sauf si la fonction objectif est pointue. Afin de juger de l'influence plus ou moins forte de la variable, il convient de procéder à une analyse de sensibilité, c'est-à-dire d'étudier dans quel domaine peut se mouvoir la variable sans que la performance s'écarte de plus

d'une certaine quantité acceptable de sa valeur maximale ou minimale. Plusieurs ouvrages exposent les méthodes d'optimisation des constructions, par exemple [24.6, 24.16].

#### 24.2.4 Méthodologie de dimensionnement

Le dimensionnement est une étape de l'étude d'une machine visant à déterminer la taille de ses organes de manière à ce qu'ils remplissent les fonctions qui leur sont dévolues durant toute leur vie. Supposons que la dimension  $x$  d'une pièce affecte la valeur effective  $E$  caractérisant une contrainte fonctionnelle et, parfois aussi, sa valeur limite admissible. Selon l'exigence fonctionnelle, il faut choisir  $x$  de manière à satisfaire l'une ou l'autre des relations de sécurité

$$\left. \begin{array}{l} E(x) \leq L(x)_{\text{adm}} \\ E(x) \geq L(x)_{\text{adm}} \end{array} \right\} \quad (24.10)$$

Une dimension doit souvent satisfaire simultanément plusieurs exigences. Par exemple, un arbre doit transmettre un couple sans se rompre; ne pas se déformer radialement exagérément; présenter une rigidité en torsion minimale pour que la fréquence propre de la chaîne cinématique soit élevée. Ces conditions restreignent le choix de la dimension cherchée.

D'une manière générale, le dimensionnement d'un élément s'effectue en plusieurs étapes (fig. 24.3). Examinons le cas du dimensionnement d'une pièce du point de vue de sa résistance:

- *Identification des exigences fonctionnelles*  
Analyser les conditions de fonctionnement, puis identifier les critères de dimensionnement déterminants et fixer la valeur limite des grandeurs fonctionnelles. Cette étude revient à préparer une partie du cahier des charges de l'élément.
- *Choix des matériaux*  
Choisir les matériaux sur la base de leurs propriétés physico-chimiques, des moyens de fabrication et du coût, de manière à ce qu'ils puissent remplir les fonctions attendues.
- *Prédimensionnement*  
Trouver *rapidement* la dimension cherchée par des calculs simplifiés s'appuyant largement sur l'expérience acquise dans des constructions similaires.
- *Choix des dimensions, tracé*  
Donner à la pièce ou à l'organe la taille et la forme nécessaire en tenant encore compte de réalités pratiques: pièces et matériaux en stock, dimensions normalisées, taille et type du matériel disponible sur le marché, coût de fabrication. Cette étape nécessite obligatoirement de représenter la pièce dans un dessin d'étude du mécanisme faisant apparaître tous les concentrateurs de contraintes et conduisant parfois à modifier les charges appliquées.
- *Vérification*  
Vérifier que les critères de dimensionnement sont satisfaits; pour cela:
  - calculer la valeur des grandeurs effectives;
  - calculer la marge de sécurité ou la valeur du facteur de sécurité théorique.

Les calculs de vérification sont toujours détaillés et précis.

- *Critique des résultats*

Soumettre le résultat des calculs de vérification à une analyse critique rigoureuse :

- la marge de sécurité est-elle suffisante ? ou, au contraire, est-elle trop grande ?
- les dimensions sont-elles compatibles avec les moyens de fabrication disponibles ?
- le coût est-il acceptable ?

L'opération de dimensionnement est achevée si le résultat de l'étude est satisfaisant. En revanche, il est opportun de prendre les mesures nécessaires si la critique montre qu'il faudrait encore améliorer la construction.

- *Corrections*

Modifier les dimensions ou la construction dans le sens révélé par la critique précédente. Ce processus est *itératif*, il conduit à une optimisation qui inclut le calcul, le tracé des pièces et l'ensemble de la construction.

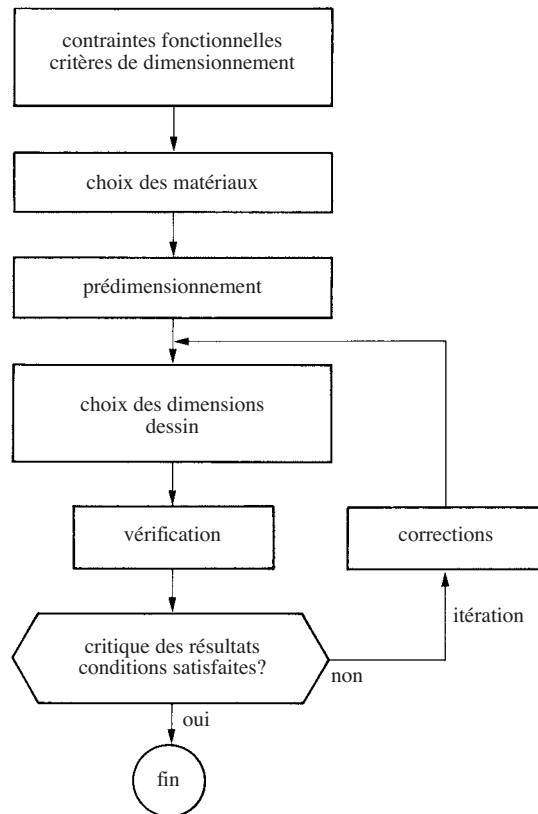


Fig. 24.3 Algorithme général de dimensionnement.

## 24.3 CONTRAINTES EFFECTIVES

### 24.3.1 Contraintes nominales

Les conditions nominales de fonctionnement d'une machine sont définies dans le descriptif de ses performances. Par exemple, la puissance d'un moteur est 125 kW à 2900 t/min, la capacité de levage d'une grue est 45 kN avec une portée de 12 m. Chaque pièce de la machine est alors sollicitée par des efforts qu'on appelle **efforts nominaux**. Ils provoquent dans les pièces des **contraintes nominales**.

L'état de contrainte et l'intensité des contraintes nominales s'étudient par les méthodes de la mécanique des milieux continus : calculs analytiques, méthode des éléments finis, études expérimentales. Il n'y a pas lieu d'y revenir ici.

Il nous paraît indispensable de toujours commencer une étude de résistance par un calcul analytique, même s'il faut, pour le mener à chef, faire des hypothèses très simplificatrices. Car il donne très rapidement l'ordre de grandeur des contraintes et des déformations ; en outre, il conduit à des expressions qui révèlent l'influence des divers paramètres et montre comment agir constructivement pour trouver de bonnes solutions techniques. En revanche, le calcul par éléments finis est des plus utile pour les vérifications.

### 24.3.2 Dynamique des contraintes

Il est indispensable d'étudier l'évolution temporelle des contraintes effectives afin de pouvoir choisir la théorie de calcul convenable et les caractéristiques mécaniques du matériau appropriées pour dimensionner les pièces. On distingue :

- les **contraintes statiques** sont constantes ou évoluent quasi statiquement et rarement, le poids propre est une charge statique ;
- les **contraintes dynamiques** varient au cours du temps ;
- les **chocs** provoquent des variations extrêmement brutales des contraintes.

### Variation des contraintes

Considérons une charge  $F$  appliquée radialement à un arbre dont le moment quadratique de flexion vaut  $I_x$  (fig. 24.4). L'arbre est sollicité dans une section I, par un moment de flexion  $M$  qui provoque un champ de contraintes distribuées linéairement (fig. 24.5). L'effet de l'effort tranchant est souvent négligeable. Toute variation de la charge influence la contrainte, mais le mouvement affecte aussi la sollicitation du matériau. En tournant à la vitesse  $\omega$ , un élément de matière situé à la surface de l'arbre

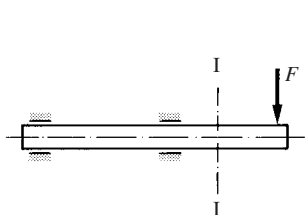


Fig. 24.4 Arbre avec charge radiale.

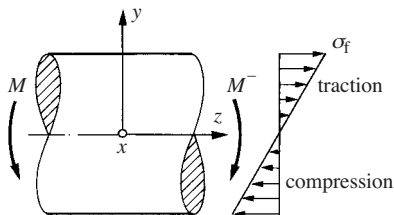


Fig. 24.5 Contrainte de flexion dans une section de l'arbre de la figure 24.4.

(fig. 24.6) se déplace dans le champ de contraintes. Sa distance  $y$  à l'axe neutre varie constamment de sorte que la contrainte évolue selon la loi harmonique

$$\sigma = \frac{M}{I_x} R \sin \omega t \quad (24.11)$$

Il en résulte une variation alternée de la contrainte du matériau qui fluctue entre  $\sigma_{\min}$  et  $\sigma_{\max}$  (fig. 24.7) avec une amplitude égale à la contrainte de flexion :

$$\sigma_a = \sigma_f = \frac{M}{I_x} R$$

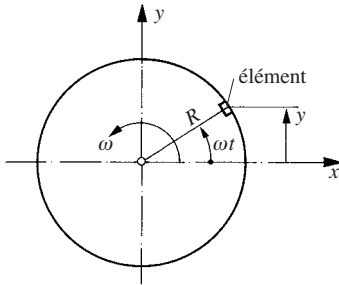


Fig. 24.6 Rotation d'un élément de matière.

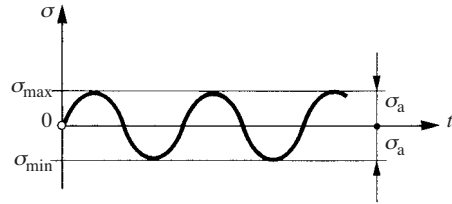


Fig. 24.7 Contrainte alternée.

Ce cas de sollicitation est appelé **flexion rotative**. Il est beaucoup utilisé dans des machines d'essais de fatigue.

En résumé, les variations de contrainte sollicitant le matériau résultent :

- de variations de la charge appliquée ;
- du mouvement de la matière dans un champ de contraintes ;
- de ces deux causes à la fois.

### Domaine de sollicitation dynamique du matériau

L'évolution des contraintes et le nombre de cycles sont déterminants pour le comportement du matériau. Considérons une pièce dans laquelle une contrainte évolue au cours du temps selon la figure 24.8. La contrainte cinéto-statique évolue entre les valeurs  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , mais des vibrations transitoires provoquent des variations encore plus rapides entre les limites  $\sigma_{\min}$  et  $\sigma_{\max}$ . Au cours de la vie de la machine, le mouvement de base se produit  $N_1$  fois, tandis qu'à chaque mouvement, on enregistre  $n$  oscillations vibratoires jusqu'à ce qu'elles soient amorties à 5% de leur amplitude maximale. Le nombre total d'oscillations vaut

$$N_2 = n N_1 \quad (24.12)$$

On distingue plusieurs cas :

- $N_2 < 10^4$  ; le matériau est sollicité dans le domaine oligocyclique. On raisonne en première approximation comme si la charge était statique, la contrainte déterminante pour le calcul est  $\sigma_{\max}$ .



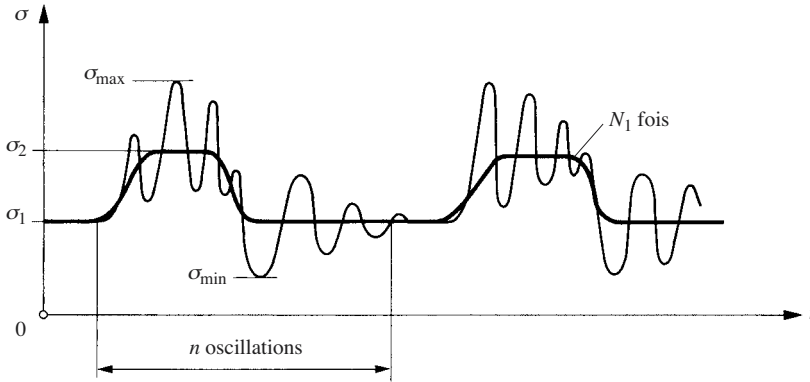


Fig. 24.8 Evolution d'une contrainte.

- $10^4 < N_2 < 10^6$  ; on calcule dans le domaine d'endurance limitée avec la plus sévère des conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_m = \sigma_1 \quad \text{et} \quad \sigma_a = \sigma_1 - \sigma_{\min} \\ \sigma_m = \sigma_2 \quad \text{et} \quad \sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_2 \end{array} \right\} \quad (24.13)$$

$\sigma_m$  est la contrainte moyenne et le nombre de cycles à considérer est  $N_2$ .

- $N_2 \geq 10^6$  et  $N_1 < 10^6$  ; calculer à la limite de fatigue avec la plus sévère des conditions (24.13).
- $N_1 \geq 10^6$  ; le matériau est sollicité dans le domaine de fatigue illimitée. On calcule à la fatigue avec la contrainte moyenne

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \quad (24.14)$$

et l'amplitude de contrainte alternée

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (24.15)$$

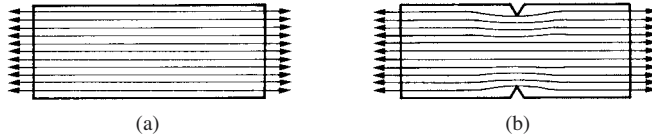
Pour des évolutions des contraintes plus complexes, on applique des méthodes statistiques et une théorie adéquate de dommage cumulé. La présentation de ces méthodes sort du cadre de cet ouvrage, le lecteur consultera par exemple [24.6, 24.7].

### 24.3.3 Concentrations de contraintes

#### Contrainte maximale

Les perturbations de la géométrie régulière idéale créent des concentrations locales de contraintes. On comprend intuitivement le phénomène par l'analogie du flux de force. Par exemple, le flux de force à travers une barre de section constante sollicitée en traction (fig. 24.9a) est représenté par des lignes équidistantes. Dans les sections éloignées d'une entaille (fig. 24.9b), les lignes de force sont encore distri-

buées uniformément, mais lorsqu'elles s'approchent de l'entaille, elles se resserrent pour passer à travers la section réduite en accroissant localement la contrainte. La déviation des lignes de force est plus importante à proximité du fond des entailles qu'au cœur de la barre. *La concentration de contrainte est d'autant plus importante que les lignes de force sont plus fortement déviées.*



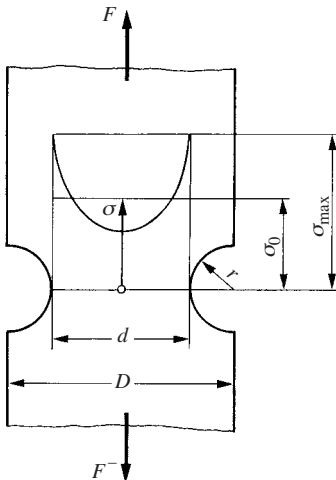
**Fig. 24.9** Flux de force de traction dans une barre: (a) pièce à section constante; (b) pièce entaillée.

Considérons une tige entaillée sollicitée en traction simple (fig. 24.10) et désignons par  $A$  la section la plus petite offerte au passage du flux de force au fond de l'entaille. La contrainte de traction calculée par la théorie élémentaire vaut

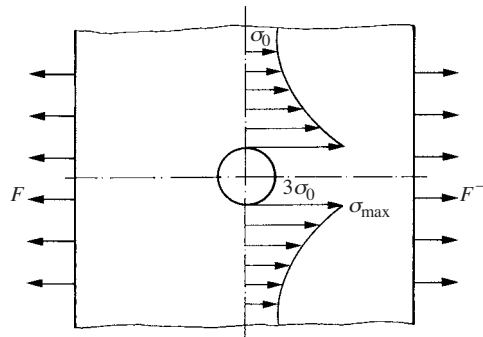
$$\sigma_0 = \frac{F}{A} \quad (24.16)$$

C'est une contrainte moyenne dite aussi **contrainte nominale**, malgré l'ambiguïté avec la contrainte nominale définie au paragraphe 24.3.1. L'entaille constitue un **concentrateur de contraintes**, la distribution de contrainte réelle est visible dans la figure 24.10, il existe une pointe de contrainte  $\sigma_{\max}$  au fond de l'entaille. On définit le **facteur de concentration de contraintes théorique**:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = \frac{\text{contrainte maximale}}{\text{contrainte nominale}} \quad (24.17)$$

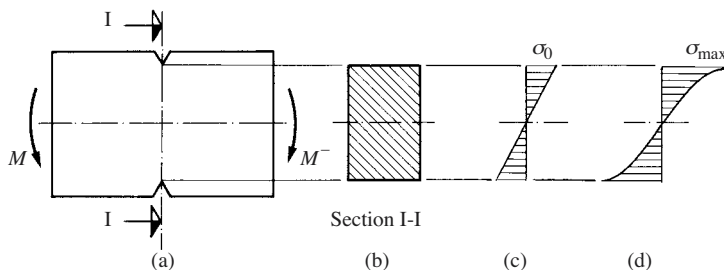


**Fig. 24.10** Distribution des contraintes de traction dans une tige entaillée.



**Fig. 24.11** Distribution des contraintes de traction dans une plaque semi-infinie avec un trou.

La figure 24.11 montre que la contrainte maximale au bord d'un trou dans une plaque en traction est égale à trois fois la contrainte qui règne à grande distance du trou, alors  $K_t = 3$ . La concentration de contraintes se manifeste aussi en flexion (fig. 24.12) et en torsion.



**Fig. 24.12** Poutre entaillée sollicitée en flexion: (a) poutre avec entaille; (b) section de calcul; (c) distribution de contrainte nominale; (d) distribution de contrainte avec concentration de contrainte.

La valeur du facteur de concentration de contraintes théorique se calcule à l'aide de la théorie de l'élasticité ou par éléments finis en supposant que le comportement du matériau soit parfaitement élastique. Dans les géométries plus compliquées, on le mesure souvent en recourant à la méthode de la photoélasticité.  $K_t$  ne dépend que de la géométrie et du mode de sollicitation, il est indépendant du matériau (seulement pour les matériaux isotropes).

La contrainte maximale se calcule par les formules suivantes:

- traction, flexion

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_0 \quad (24.18)$$

- cisaillement, torsion

$$\tau_{\max} = K_t \tau_0 \quad (24.19)$$

où  $K_t$  est le plus souvent donné par des diagrammes, par exemple les figures 24.13 et 24.14;  $\sigma_0$  et  $\tau_0$  sont les contraintes nominales.

L'application de ces formules implique quelques précautions:

- utiliser la valeur de  $K_t$  correspondant au cas de sollicitation effectif;
- calculer la contrainte nominale par la même formule que celle qui a été utilisée pour définir  $K_t$  (c'est habituellement dans la section la plus petite);
- vérifier que  $\sigma_{\max}$  se trouve dans le domaine de comportement élastique du matériau.

Soulignons que le phénomène de concentration est local et n'affecte pas la distribution des contraintes dans les parties éloignées du concentrateur.

### Etat de contrainte

Dans une zone de concentration de contraintes existe un état de contrainte triaxial, même en cas de traction simple. On se contente de le montrer par un raisonnement qualitatif en insistant sur l'aspect physique.

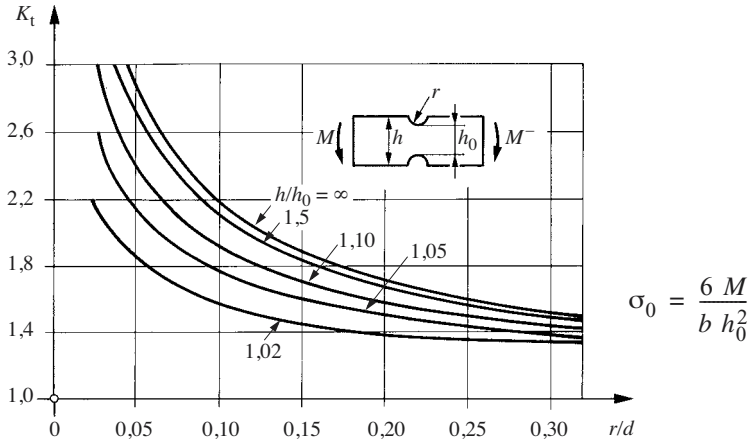


Fig. 24.13 Facteur de concentration de contraintes d'une barre plate en flexion.

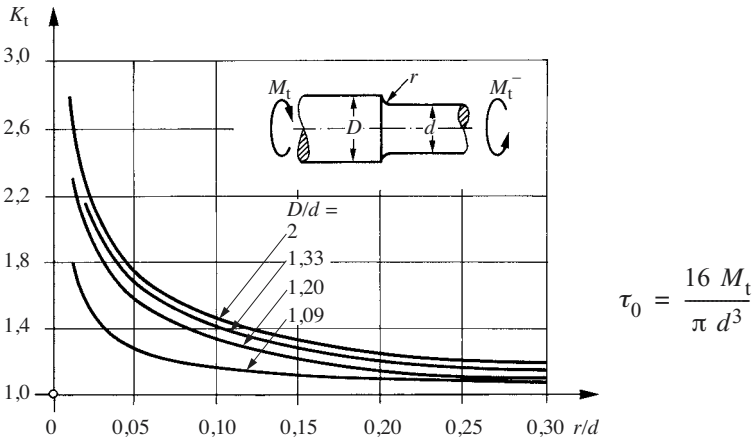
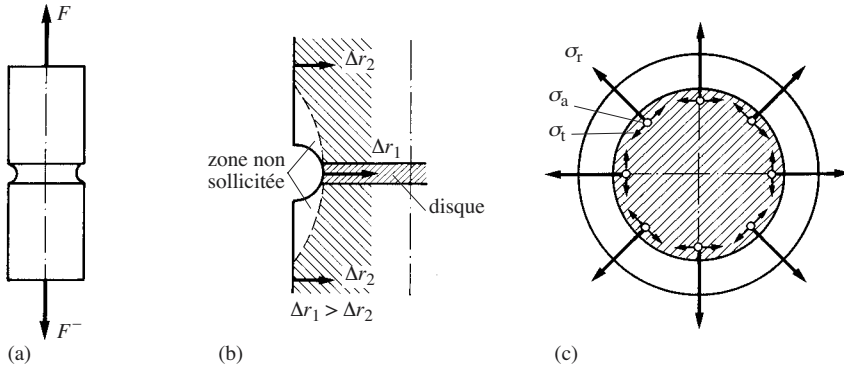


Fig. 24.14 Facteur de concentration de contraintes d'une tige cylindrique en torsion.

Une tige cylindrique sollicitée en traction pure est munie d'une gorge circulaire (fig. 24.15a). La contrainte de traction axiale est plus élevée dans la section centrale de l'entaille qu'en pleine tige où la section est plus grande. La contraction radiale dans l'entaille est également plus grande que dans le reste de la tige puisque l'allongement axial est grand,  $\Delta r_1 > \Delta r_2$ . Du fait de la continuité de la matière, la contraction radiale dans l'entaille est empêchée par le voisinage de matière faiblement déformée (fig. 24.15b), ceci d'autant plus qu'il existe au voisinage immédiat de l'entaille une zone peu ou pas du tout sollicitée en traction. Tout se passe donc comme si un disque délimité par l'entaille était encastré de part et d'autre dans une pièce peu déformable; il se produit un phénomène de frettage de ce disque. L'empêchement de la déformation se traduit par des contraintes radiales  $\sigma_r$  qui s'équilibrent par des contraintes circonférentielles  $\sigma_t$  (fig. 24.15c). En fin de compte, on voit que le matériau dans l'entaille se trouve en état de



**Fig. 24.15** Tige avec gorge circulaire en traction : (a) tige; (b) coupe méridienne; (c) contraintes principales dans la gorge.

contrainte triaxial ( $\sigma_a$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$ ). Même un matériau ductile se comporte alors de manière fragile dans l'entaille, comme on l'a expliqué au paragraphe 23.3.2.

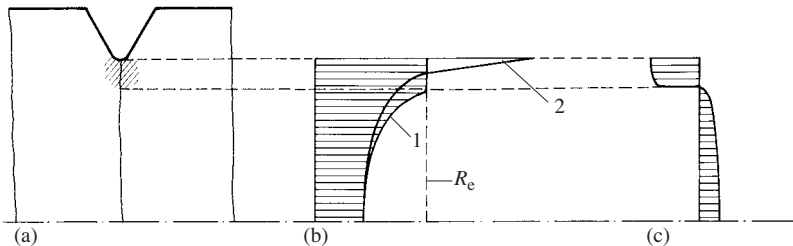
En conclusion, les *concentrateurs de contraintes fragilisent le matériau*. Ce fait a des conséquences très importantes lors de sollicitations dynamiques : rupture en cas de choc, fissuration de fatigue.

### Plastification à fond d'entaille

Un matériau ductile subit des déformations plastiques au fond de l'entaille dès que la contrainte  $y$  atteint la limite d'écoulement. La contrainte ne dépasse alors pas la limite élastique (fig. 24.16); la zone plastifiée s'étend au fur et à mesure que la contrainte moyenne augmente, courbe (1), jusqu'à ce que finalement toute la section se trouve dans un état de déformation plastique. En revanche, la pointe de contrainte se développe pleinement dans un matériau fragile jusqu'à la rupture de la pièce, courbe (2). Par conséquent :

- Il n'y a pas besoin de tenir compte des concentrateurs de contraintes avec des matériaux ductiles sollicités statiquement; mais on verra qu'ils jouent un rôle majeur lors de sollicitations dynamiques (fatigue et chocs). Cependant, l'écrouissage accroît la résistance du matériau tout en le fragilisant (§ 23.3.3).
- Les concentrateurs de contraintes sont dangereux pour les matériaux fragiles.

Après décharge subsistent des contraintes résiduelles dans les pièces entaillées qui ont été sollicitées jusque dans le domaine plastique (fig. 24.16c).



**Fig. 24.16** Concentration de contraintes, relaxation ductile : (a) zone plastifiée au fond d'une entaille; (b) distribution des contraintes; matériau ductile (1), matériau fragile (2); (c) contraintes résiduelles.

### Effet d'entailles en fatigue

Les concentrateurs de contraintes tels que gorges, congés, changements de section, épaulements, trous, sont responsables de la majorité des ruptures de fatigue rencontrées en pratique. Les concentrateurs de contraintes de contact sont souvent aussi à l'origine de fissurations de fatigue. En cas de sollicitation dynamique, on définit le **facteur de réduction de résistance à la fatigue** appelé aussi **facteur d'entaille pour la fatigue** :

$$K_f = \frac{\text{limite de fatigue sans concentrateur de contraintes}}{\text{limite de fatigue avec concentrateur de contraintes}} \quad (24.20)$$

Le facteur d'entaille présente une parenté avec le facteur de concentration de contraintes théorique  $K_t$  défini plus haut. Tandis que  $K_t$  est indépendant du matériau, on observe que le facteur d'entaille dépend de la résistance à la traction du matériau, de la géométrie de l'entaille et du mode de sollicitation.

Pour les matériaux fragiles, on a  $K_f = K_t$  et pour les matériaux ductiles  $K_f < K_t$ . Dans certains cas isolés, on a observé  $K_f > K_t$  si une sollicitation brutale a provoqué une fissure. On admettra pourtant pour les calculs de dimensionnement toujours

$$K_f \leq K_t \quad (24.21)$$

On a fait de nombreuses tentatives pour calculer le facteur d'entaille à partir du facteur de concentration de contraintes :

- Thum [24.8] définit un **facteur de susceptibilité du matériau**

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (24.22)$$

qui dépend du matériau et du rayon à fond d'entaille, voir Sors [24.9].

- Siebel et Petersen déduisent le facteur d'entaille du facteur de concentration de contraintes, du gradient de contrainte relatif et de la limite élastique du matériau, voir [24.8, 24.10, 24.11]
- Bollenrath et Troost [24.12] ont développé une formule basée sur le gradient de déformation :

$$\frac{K_f}{K_t} = 1 - \frac{154/R_m}{\frac{1}{1 + R_m/1370} + r} \quad (24.23)$$

avec :

$R_m$  résistance à la traction du matériau [N/mm<sup>2</sup>]  
 $r$  rayon au fond de l'entaille [cm]

Ils font intervenir ici seulement la contrainte de rupture à la traction, car le mode de sollicitation de la pièce intervient déjà dans la détermination de  $K_t$ . La formule traduit correctement l'observation selon laquelle l'influence d'une

entaille est d'autant plus forte que la limite de rupture est plus élevée et que le rayon au fond de l'entaille est plus petit.

La formule de Bollenrath paraît aussi applicable pour d'autres matériaux que l'acier. Comme elle contient implicitement le gradient de déformation, il ne faut pas faire intervenir le facteur d'échelle  $c_e$  dans le calcul du facteur de correction de la résistance du matériau (23.25) qui devient dans ce cas :

$$c = c_a c_R c_S c_T \quad (24.24)$$

avec :

- $c_a$  facteur de confiance statistique
- $c_R$  facteur d'état de surface
- $c_S$  facteur de traitement de surface
- $c_T$  facteur de température

Le calcul du facteur d'entaille est naturellement entaché d'erreurs. Il est plus sûr d'utiliser les valeurs de  $K_f$  déterminées expérimentalement pour les formes de concentrateurs les plus courantes. A cet effet, il faut consulter les normes et la littérature spécialisée. Enfin, pour des pièces vitales, on réalise des essais de résistance à la fatigue sur les pièces réelles. Cette méthode est onéreuse, mais elle présente l'avantage de donner la résistance effective en intégrant tous les facteurs d'influence. On procède toujours ainsi dans l'industrie aéronautique ou automobile, et chaque fois qu'une machine est produite en grande quantité.

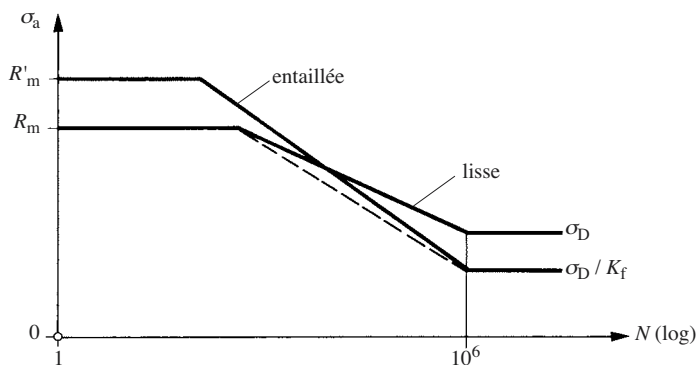


Fig. 24.17 Courbes de fatigue pour des éprouvettes lisses ou entaillées.

Le facteur d'entaille défini par la formule (24.20) n'est valable que dans le domaine d'endurance illimitée. Selon la figure 23.13, la résistance à la rupture statique d'une pièce entaillée est supérieure à celle d'une pièce lisse à cause de la triaxialité des contraintes à fond d'entaille. La figure 24.17 représente le diagramme de fatigue d'une éprouvette lisse et celui d'une éprouvette entaillée dont la section nominale est égale à la section de la pièce lisse. Il est plus sûr d'effectuer les calculs de dimensionnement dans le domaine d'endurance limitée avec les valeurs de résistance de la droite traitillée dans la figure.

### Effet de concentrateurs de contraintes en cas de sollicitations combinées

Pour une géométrie donnée, la valeur du facteur de concentration de contraintes et celle du facteur d'entaille dépendent du genre de sollicitation. Il convient donc de calculer les contraintes maximales pour chaque type de sollicitation avec le facteur correspondant. L'application de ce principe sera illustrée aux paragraphes 24.6.2 et 24.6.3.

#### 24.3.4 Tracé des pièces

Rappelons que les concentrations de contraintes ne dépendent que de la géométrie et qu'elles sont d'autant plus intenses que les lignes du flux de force sont plus fortement déviées. Pour diminuer les concentrations de contraintes, il faut donc impérativement agir au niveau du dessin des pièces et soigner chaque détail. Les règles à observer sont en fait très simples.

#### Adoucir les concentrations de contraintes

Pour cela, il faut veiller à :

- éviter les entailles vives;
- arrondir le fond des entailles, utiliser de grands rayons de courbure (fig. 24.18);
- opérer les changements de section très progressivement (fig. 24.19).

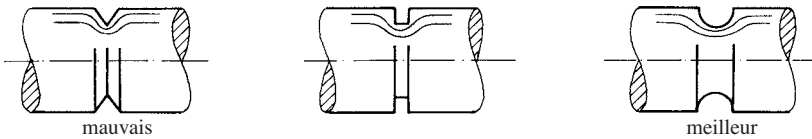


Fig. 24.18 Entailles vives ou arrondies.

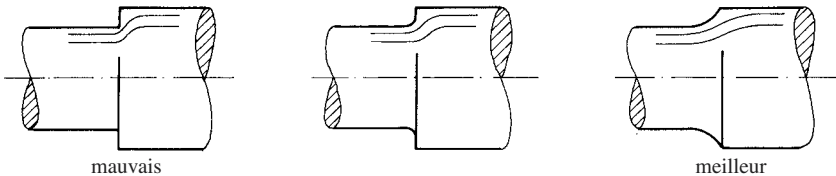


Fig. 24.19 Changement de section.

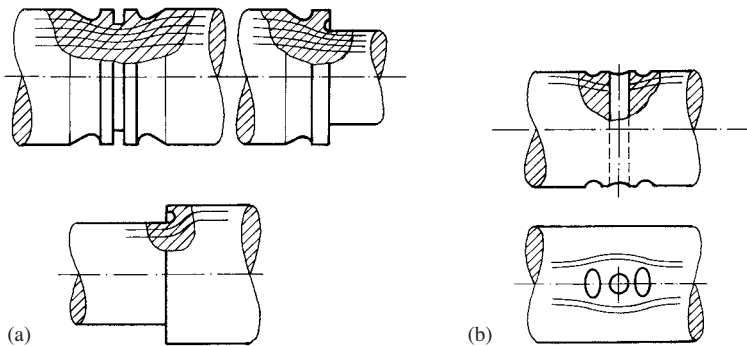


Fig. 24.20 Entailles de décharge: (a) changement de section; (b) trou débouchant à la surface.



Une technique intéressante consiste à obliger les lignes de force à contourner un obstacle en douceur. Pour cela, on enlève un peu de matière de part et d'autre de l'entaille en créant ce qu'on appelle des *entailles de décharge* (fig. 24.20). Cela assouplit aussi les zones voisines de l'entaille et diminue la triaxialité.

Il est très avantageux de situer les rainures, gorges et filetages en dehors du champ de contrainte principal (fig. 24.21).

La figure 24.22 montre un vilebrequin en acier moulé tracé correctement comparé à un vilebrequin aux formes rudimentaires.

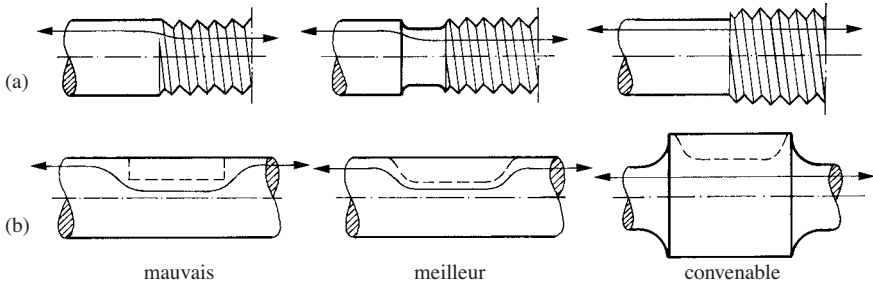


Fig. 24.21 Situation de concentrateurs dans le champ de contrainte : (a) filetage; (b) rainure de clavette.

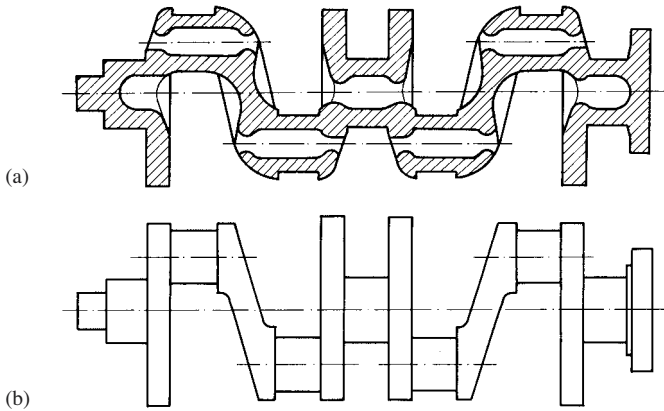


Fig. 24.22 Comparaison de deux vilebrequins (selon Thum): (a) tracé favorable; (b) vilebrequin rudimentaire.

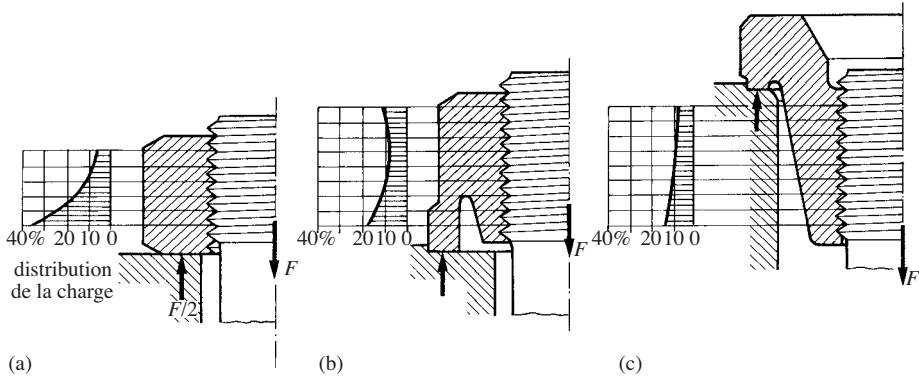
### Adapter la déformation de pièces adjacentes

L'étude de la transmission de force entre pièces (sect. 8.6 et 8.7) démontre que la distribution de charge est plus régulière si les déformations des pièces de part et d'autre de leur liaison sont orientées dans le même sens. A contrario, la figure 8.55 montre par exemple une forte pointe de la contrainte de cisaillement dans une liaison collée ou brasée lorsqu'une pièce est sollicitée en traction et l'autre en compression.

Un écrou ordinaire (fig. 24.23a) est comprimé tandis que la vis est tendue; la portion de filetage située à l'entrée de la force est la plus chargée. Il est inutile, dans ce cas, de beaucoup prolonger l'écrou pour accroître la résistance de l'assemblage. En modifiant judicieusement la forme de l'écrou (fig. 24.23b et c), sa partie filetée vient

en traction comme la vis et la distribution de charge dans l'assemblage est beaucoup plus régulière.

La figure 8.58 illustre l'adaptation d'un moyeu à la torsion de l'arbre.



**Fig. 24.23** Ecrus et distribution de charge dans le filetage : (a) écrou ordinaire comprimé; (b) écrou avec une gorge de décharge; (c) écrou en traction.

### Egaliser la pression de contact

La pression de contact entre les pièces est souvent peu uniforme et donne aussi lieu à des concentrations de contraintes. Quelques moyens pour égaliser la pression ont été présentés au paragraphe 8.7.2.

### 24.3.5 Contrainte de comparaison

#### Méthodologie

Les éléments de machines sollicités par des efforts extérieurs sont le siège d'un champ de contraintes qui se décrit en principe dans un repère orthonormé par :

- trois contraintes normales,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ;
- trois contraintes tangentielles,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ .

On sait qu'il est possible d'orienter le repère de façon que les contraintes tangentielles soient toutes nulles. Ces axes particuliers sont dits **axes principaux**; les plans orthogonaux correspondants sont dits **plans principaux** et les contraintes normales à ces plans, parallèles aux axes principaux sont les **contraintes principales**. On les désigne habituellement dans un ordre décroissant par  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ .

On distingue trois **états de contrainte** :

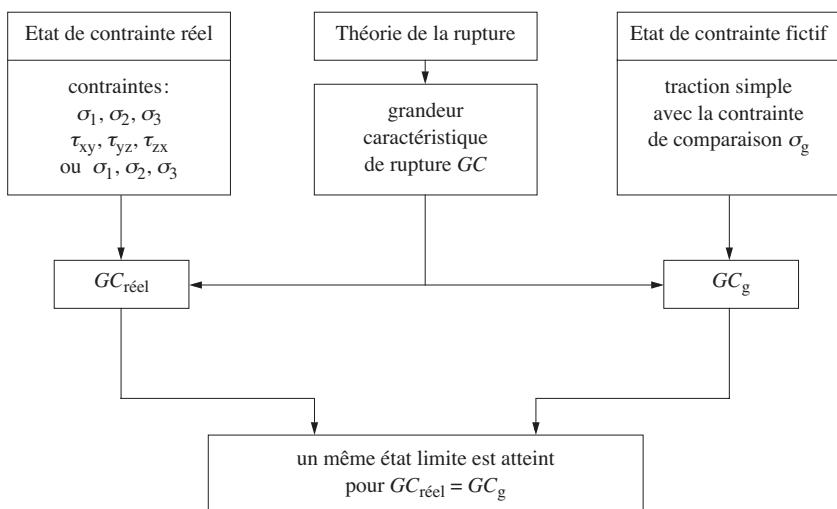
- l'état de contrainte uniaxial, deux contraintes principales sont nulles;
- l'état de contrainte biaxial ou plan, une contrainte principale est nulle;
- l'état de contrainte triaxial.

Il importe de prévoir le comportement local d'un matériau dont l'état de contrainte est connu, soit par calcul, soit expérimentalement. En cas de sollicitation uniaxiale, il suffit de situer la contrainte dans le diagramme de traction d'une éprouvette du matériau considéré pour savoir quel sera le comportement prévisible.

Les choses sont plus délicates en cas de sollicitation biaxiale ou triaxiale, car le comportement dépend du niveau des trois contraintes principales. On ne dispose généralement pas de résultats d'essais de laboratoire avec des états de contrainte analogues; c'est pourquoi on cherche à prédire le comportement effectif en se basant uniquement sur les résultats d'essais en traction. Voici la démarche de la méthode.

La **théorie de la rupture** suppose qu'une rupture survient lorsque la valeur maximale d'une grandeur caractéristique de l'état de contrainte multiaxial est égale ou supérieure à la valeur de cette grandeur caractéristique en état de traction simple pour le même état limite. Cette théorie est basée sur des **critères de rupture** dont la validité doit être prouvée a posteriori par l'expérience. L'expression rupture prend ici un sens plus large que simplement «casser», elle signifie en fait la transition d'un comportement du matériau à un autre comportement (état limite).

On exprime mathématiquement l'équivalence entre les deux états de contrainte en égalant la valeur de la grandeur caractéristique  $GC$  calculée pour l'état de contrainte multiaxial à la valeur de cette grandeur caractéristique calculée en traction (ou compression) simple pour une contrainte  $\sigma_g$  (fig. 24.24). Cette contrainte  $\sigma_g$  est appelée **contrainte de comparaison** ou **contrainte équivalente** parce qu'elle permet en principe d'apprécier le comportement du matériau en la situant dans le diagramme de traction d'une éprouvette.



**Fig. 24.24** Organigramme de définition de la contrainte de comparaison.

Il faut toujours avoir à l'esprit que la contrainte de comparaison  $\sigma_g$  est une contrainte fictive théorique qu'on ne rencontre pas dans la pièce; elle sert au calcul, mais ne correspond pas à une réalité physique.

Il existe plusieurs critères de rupture permettant de calculer une contrainte de comparaison. Présentons, sans démonstration, les critères de rupture utilisés couramment en calcul d'organes de machines.

## Transition élastique-plastique

### *Théorie de l'énergie de distorsion maximale*

L'état limite élastique est le mieux décrit par le critère du plus grand travail de distorsion (Von Mises-Hencky) qui admet que *l'état limite est atteint lorsque l'énergie de distorsion du matériau est égale à l'énergie de distorsion limite du matériau sollicité uniaxialement*.

Si l'état de contrainte est décrit par les contraintes normales et tangentielles, on calcule la contrainte de comparaison par la formule suivante :

$$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (24.25)$$

ou, si les contraintes principales sont connues, par

$$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (24.26)$$

Dans le cas d'un état de contrainte plan, on a

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (24.27)$$

L'état limite de transition élastique-plastique est atteint lorsque  $\sigma_g = R_e$ . Soit, avec la dernière formule,

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = R_e^2 \quad (24.28)$$

Cette équation représente une ellipse dont le grand axe est incliné à  $45^\circ$  (fig. 24.25). Dans le cas d'un matériau ductile, l'ellipse passe aussi par les points  $\sigma_1 = R_e$  et  $\sigma_2 = R_{ec}$  en compression ( $R_{ec} < 0$ ).

La torsion pure est représentée par une droite à  $-45^\circ$  car  $\sigma_2 = -\sigma_1$ . La contrainte de traction limite et le cisaillement maximal valent

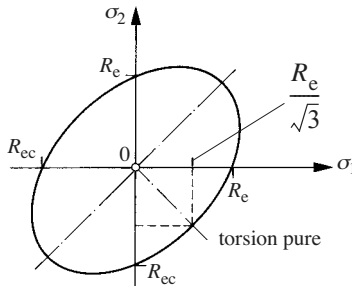


Fig. 24.25 Ellipse de rupture de l'équilibre élastique selon von Mises.

$$\sigma_1 = \tau_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} R_e \quad (24.29)$$

On rencontre souvent des pièces sollicitées par une contrainte de traction  $\sigma$  et par une contrainte de cisaillement  $\tau$ , par exemple une vis. Dans ce cas, la formule (24.25) donne :

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (24.30)$$

#### *Théorie du cisaillement maximal*

Tresca a formulé l'hypothèse selon laquelle *un état limite d'un matériau isotrope est atteint lorsque la plus forte contrainte de cisaillement est égale à la contrainte de cisaillement de ce matériau au même état limite en sollicitation uniaxiale.*

On sait que les contraintes de cisaillement sont données par les formules suivantes :

$$\tau_{12} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|$$

$$\tau_{23} = \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|$$

$$\tau_{31} = \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1|$$

La contrainte de cisaillement en traction simple avec la contrainte de comparaison vaut

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma_g$$

En vertu de l'hypothèse de Tresca, la contrainte de comparaison déterminante d'un état de contrainte multiaxial correspond à la plus forte des trois valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{g1} &= |\sigma_1 - \sigma_2| \\ \sigma_{g2} &= |\sigma_2 - \sigma_3| \\ \sigma_{g3} &= |\sigma_3 - \sigma_1| \end{aligned} \right\} \quad (24.31)$$

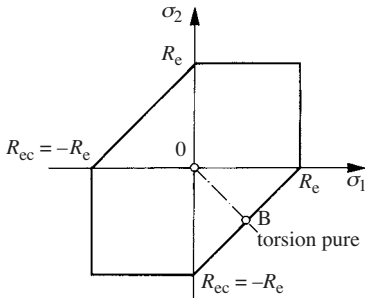
La limite d'écoulement d'un matériau ductile est atteinte si n'importe laquelle de ces contraintes de comparaison est égale à la limite élastique. L'état limite complet est décrit par les relations

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm R_e \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm R_e \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \pm R_e \end{aligned} \right\} \quad (24.32)$$

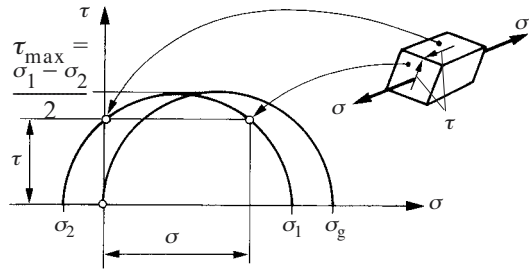
Dans le cas d'un état de contrainte biaxial ou plan, lorsque  $\sigma_3 = 0$ , il reste

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm R_e \\ \sigma_2 &= \pm R_e \\ \sigma_1 &= \pm R_e \end{aligned} \right\} \quad (24.33)$$

Cet état limite est représenté à la figure 24.26. L'hexagone s'inscrit dans l'ellipse décrivant la transition élastique-plastique par la théorie de l'énergie de distorsion. Les formules (24.31) sont par conséquent plutôt pessimistes; mais on les utilise souvent à cause de leur simplicité.



**Fig. 24.26** Etat limite biaxial à la limite d'écoulement.



**Fig. 24.27** Cercles de Mohr pour le critère du cisaillement maximum.

Dans le cas particulier d'une sollicitation en traction  $\sigma$  avec un cisaillement  $\tau$ , la figure 24.27 montre qu'on a la contrainte de comparaison

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (24.34)$$

### Rupture statique d'un matériau ductile

La rupture statique d'un matériau en état de sollicitation biaxial ou triaxial est difficile à prévoir. On admet cependant que la rupture survient lorsque la contrainte de comparaison atteint la résistance à la traction  $R_m$  mesurée en traction simple; on admet en outre que la résistance en compression est la même, soit  $|R_{mc}| = R_m$ . En acceptant la théorie du cisaillement maximum, l'état de contrainte limite est décrit par les équations (24.32) et (24.33) dans lesquelles on remplace la limite élastique  $R_e$  par la résistance à la traction  $R_m$ .

### Comportement statique d'un matériau ductile

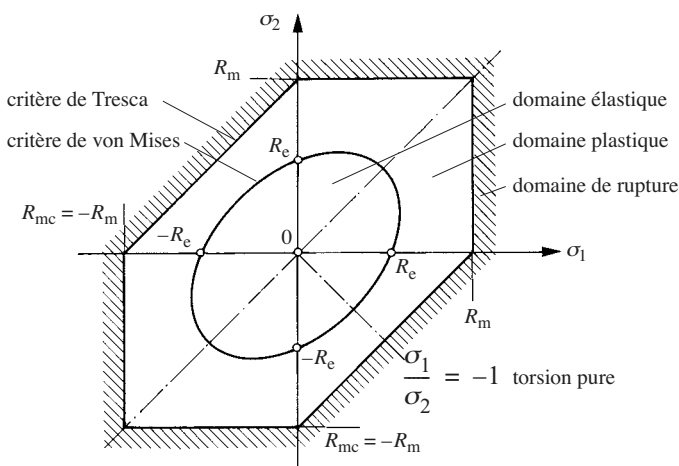
En construction mécanique, on admet souvent que les états limites d'un matériau ductile sollicité statiquement sont décrits par les théories de rupture suivantes:

- théorie de l'énergie de distorsion maximale pour la transition élasto-plastique;
- théorie du cisaillement maximal pour la rupture.

Le domaine de déformation prévisible d'un matériau ductile se détermine en situant la contrainte de comparaison sur la courbe de traction expérimentale de ce matériau. En considérant les transitions et limites caractéristiques, on a :

- $\sigma_g \leq R_{p0,2}$  le matériau est sollicité dans le domaine conventionnel d'élasticité;
- $R_{p0,2} < \sigma_g \leq R_m$  le matériau se trouve en état de déformation plastique;
- $\sigma_g \geq R_m$  le matériau se rompt.

La contrainte de comparaison se calcule par les formules présentées ci-dessus selon le domaine de déformation du matériau. Celui-ci étant a priori inconnu, on peut situer un point dont les coordonnées sont les contraintes principales, en cas de sollicitation biaxiale, dans le diagramme de la figure 24.28. Il existe des représentations analogues pour les états triaxiaux.



**Fig. 24.28** Domaines caractéristiques et états limites d'un matériau parfaitement ductile en état de contrainte biaxial.

### Rupture statique d'un matériau fragile

Le critère de rupture doit rendre compte des faits suivants :

- la relation  $\sigma - \varepsilon$  est linéaire jusqu'à la rupture, il n'y a aucune déformation plastique apparente (fig. 23.10a);
- la résistance à la compression est habituellement un multiple de la résistance à la traction,  $|R_{mc}| > R_m$  ;
- en torsion, la rupture se produit pour  $\sigma_1 = \tau_{tm}$  peu inférieur à la résistance à la traction  $R_m$  .

Mohr admet que la rupture de l'équilibre élastique se produit lorsque le plus grand cercle représentant l'état de contrainte est tangent à la courbe intrinsèque du matériau; la contrainte intermédiaire  $\sigma_2$  ne joue aucun rôle. Ce critère offre l'avantage d'être applicable lorsque  $|R_{ec}| > R_e$  et pour tous les états limites.

En assimilant la courbe intrinsèque aux cercles de Mohr de traction et de compression et à leur tangente extérieure (fig. 24.29), l'état limite satisfait la relation

$$\frac{\sigma_1}{R_m} + \frac{\sigma_3}{R_{mc}} = 1 \quad (24.35)$$

Dans le cas d'une traction simple avec la contrainte de comparaison, on aurait à la limite de rupture :

$$\frac{\sigma_g}{R_m} = 1$$

En égalant cette expression à (24.35), on trouve la contrainte de comparaison :

$$\sigma_g = \sigma_1 + \frac{R_m}{R_{mc}} \sigma_3 \quad (24.36)$$

Il faut remarquer que  $R_{mc}$  et  $\sigma_3$  sont des grandeurs négatives.

La figure 24.30 représente le polygone de rupture; dans les quadrants I et III, il est identique à ce que donne l'hypothèse de la plus grande contrainte normale.

En torsion,  $\tau_t = \sigma_1 = -\sigma_3$ . On voit que  $\sigma_g \approx \sigma_1$  lorsque  $|R_{mc}| \gg R_m$ .

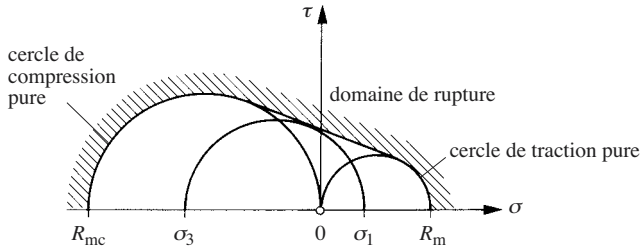


Fig. 24.29 Approximation de la courbe intrinsèque.

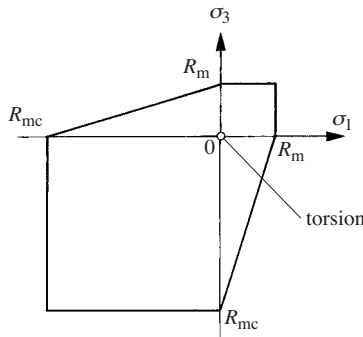


Fig. 24.30 Polygone de rupture, selon Mohr.



### Rupture de fatigue

Le cas de la rupture de fatigue sera traité au paragraphe 24.6.3. Disons d'emblée que le calcul des contraintes de comparaison y est basé sur le critère de l'énergie de distorsion maximale.

## 24.4 FACTEUR DE SÉCURITÉ À LA RÉSISTANCE

### 24.4.1 Facteur de sécurité structurale

Un élément de machine est soumis à une *charge effective*  $Q$ , mais il serait capable d'être encore chargé jusqu'à une certaine *charge limite*  $Q_{\text{lim}}$  au-delà de laquelle il serait endommagé. Cette limite est appelée *capacité de charge* ou *charge ultime*. Voici trois exemples :

- une barre en traction, de section  $A$ , est chargée par une force effective  $F$ ; sa capacité de charge à la limite élastique conventionnelle est  $F_{\text{lim}} = A R_{p0,2}$  ;
- un roulement est chargé par une force effective  $F$ ; sans changer la vitesse ni les conditions de lubrification, il peut supporter une charge  $F_{\text{lim}}$  au-delà de laquelle existe une probabilité de défaillance de 10% pour que le roulement présente de l'écaillage avant une certaine durée d'exploitation imposée à l'avance;
- l'arbre de sortie d'un engrenage est chargé par un couple effectif  $M$ ; au-delà d'une certaine valeur limite  $M_{F \text{ lim}}$  survient une rupture de dent par fatigue; au-delà de  $M_{H \text{ lim}}$ , les flancs des dents sont endommagés par écaillage.

Le facteur de sécurité est par définition le rapport de la charge limite à la charge effective :

$$S = \frac{Q_{\text{lim}}}{Q} \quad (24.37)$$

La capacité de charge ne dépend que de la géométrie et du matériau de la pièce, tandis que la charge effective lui est imposée par les éléments voisins. La charge limite et la charge effective sont indépendantes.

Plaçons-nous maintenant au sein d'une pièce dont le matériau présente une résistance limite  $R_{\text{lim}}$ . Au point le plus sollicité existe un état de contrainte dont la contrainte de comparaison  $\sigma_g$  se calcule à l'aide des formules présentées au paragraphe 24.3.5 selon le comportement attendu du matériau et selon la résistance limite envisagée. Le *facteur de sécurité structurale*, appelé autrefois coefficient de sécurité, vaut, par définition,

$$S = \frac{R_{\text{lim}}}{\sigma_g} \quad (24.38)$$

Ce facteur de sécurité présente un caractère local, car il est défini en un point de la pièce.

### 24.4.2 Facteur de sécurité de surcharge extérieure

Une machine est souvent destinée à exercer un effort; par exemple, une presse exerce une force de matriçage, un camion transporte une charge. Désignons par  $Q_u$

l'effort utile de la machine et par  $Q_u \lim$  l'effort qui provoque une avarie de la machine. Nous appelons *facteur de sécurité de surcharge extérieure* le rapport

$$S_s = \frac{Q_u \lim}{Q_u} \quad (24.39)$$

Sa valeur est souvent donnée dans les spécifications des machines.

Cherchons la relation entre le facteur de sécurité structurale et celui de surcharge. Supposons qu'une contrainte en un point résulte de la somme d'une contrainte constante  $\sigma_0$  et d'une contrainte  $\sigma_u$  provoquée par la charge extérieure utile de la machine :

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_u \quad (24.40)$$

En multipliant cette contrainte par le facteur de sécurité locale, on obtient le même état limite qu'en multipliant seulement la contrainte extérieure par le facteur de sécurité de surcharge extérieure  $S_s$ , soit

$$S(\sigma_0 + \sigma_u) = \sigma_0 + S_s \sigma_u = R_{\lim}$$

Cette équation fournit, après un changement d'écriture,

$$S = S_s - \frac{\sigma_0}{\sigma_0 + \sigma_u} (S_s - 1) \quad (24.41)$$

On voit que *le facteur de sécurité structurale est plus petit que le facteur de sécurité de surcharge extérieure lorsque la contrainte due aux charges s'ajoute à une contrainte constante.*

Par conséquent, il est dangereux de juger la sécurité structurale effective à partir de la sécurité de surcharge.

### Exemples

La sécurité de surcharge d'un engin de levage vaut 2,5. La charge ne provoque que 30% de la contrainte totale dans l'une des membrures, le reste de la contrainte provenant du poids propre. Selon (24.41), le facteur de sécurité structurale vaut seulement 1,45. Cet exemple montre combien on peut se tromper sur la sécurité effective d'une pièce en ne considérant que la sécurité de surcharge extérieure.

Cas typique, quoiqu'avec un raisonnement un peu différent, les câbles sèment parfois de la confusion dans les esprits. Supposons qu'on veuille charger un câble par une traction  $F$ . Les règlements exigeant de respecter un facteur de sécurité statique en traction  $S_R$ , il faut choisir un câble dont la charge de rupture est  $F_m = S_R F$ . Avec une section d'acier  $A$ , la contrainte de rupture du câble est  $F_m/A$ , mais l'enroulement du câble sur une poulie ou sur un tambour de treuil provoque encore une contrainte de flexion  $\sigma_f$ , de sorte que la contrainte de traction effective disponible dans le brin rectiligne à la limite de rupture dans la partie fléchie vaut

$$\sigma_{\lim} = \frac{S_R F}{A} - \sigma_f$$

Le facteur de sécurité de surcharge statique vaut en réalité seulement

$$S_s = \frac{A \sigma_{\text{lim}}}{F} = S_R - \frac{A \sigma_f}{F} \quad (24.42)$$

La sécurité vis-à-vis de la limite de fatigue est encore nettement inférieure, mais les câbles ne se rompent heureusement jamais brutalement par fatigue, seulement brin après brin. On les remplace lorsque le nombre de ruptures de brins visibles en surface sur une longueur d'un mètre excède un certain nombre fixé dans les normes d'installations à câbles.

#### 24.4.3 Concept aléatoire du facteur de sécurité

On a longtemps pensé que le facteur de sécurité avait un caractère déterministe. On a pris conscience qu'il n'en est rien et qu'il doit au contraire être interprété dans une optique probabilistique; sa valeur est en relation directe avec la probabilité de ruine de l'organe considéré.

La valeur théorique des contraintes effectives est incertaine car :

- les charges effectives sont relativement mal connues (sauf le poids propre), on rencontre souvent des surcharges imprévisibles;
- la géométrie réelle de la pièce diffère du dessin (tolérances de fabrication);
- le calcul des contraintes repose sur des modèles imparfaits et des hypothèses simplificatrices.

Par ailleurs, les caractéristiques de résistance  $R_{\text{lim}}$  du matériau sont aussi mal connues :

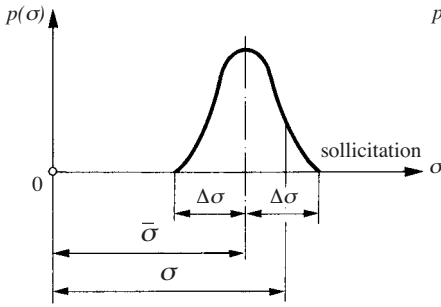
- les valeurs des résistances de catalogue sont entachées d'erreurs de mesure;
- la résistance du matériau de la pièce est affectée par les procédés d'élaboration et de fabrication, notamment par la précision des traitements thermiques;
- le comportement réel du matériau dépend de la géométrie et des conditions de fonctionnement.

Les incertitudes affectent les deux membres de la relation de sécurité, mais on les regroupe en un facteur de sécurité unique qui tient compte de toutes les incertitudes. Ces réflexions expliquent pourquoi certains auteurs ont voulu appeler le facteur de sécurité, facteur d'incertitude, ou aussi facteur d'ignorance. La grandeur effective et la grandeur limite ont donc un caractère aléatoire. Par conséquent, la marge de sécurité

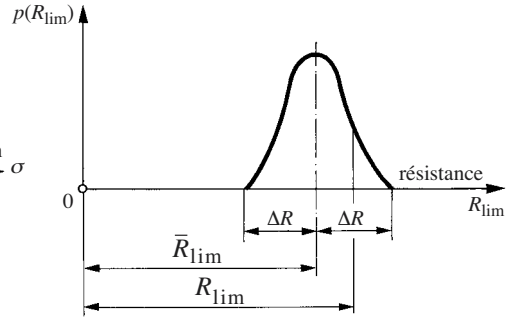
$$\sigma_M = R_{\text{lim}} - \sigma \quad (24.43)$$

est aussi une grandeur aléatoire.

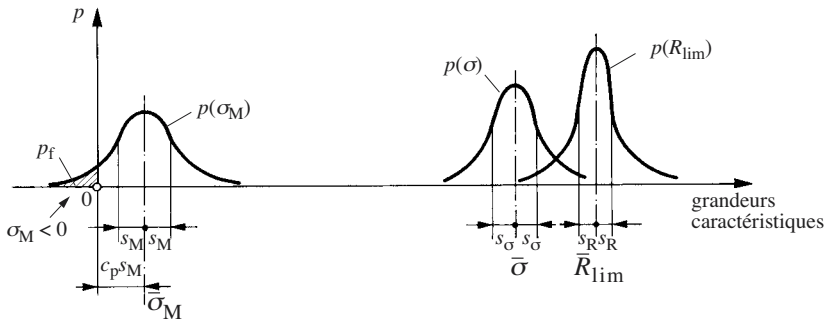
L'étude statistique de la sollicitation effective des pièces conduit à une répartition de la densité de probabilité typique selon la figure 24.31. Bien que cette courbe ne soit pas forcément symétrique par rapport à la valeur moyenne  $\bar{\sigma}$ , supposons que les écarts maximaux à la moyenne soient  $\Delta\sigma$ . La distribution de la résistance du matériau est analogue, les écarts maximaux sont  $\Delta R$  (fig. 24.32).



**Fig. 24.31** Distribution statistique de la sollicitation effective du matériau.



**Fig. 24.32** Distribution statistique de la résistance d'un matériau.



**Fig. 24.33** Interprétation aléatoire de la marge de sécurité.

Supposons pour simplifier les calculs que  $R_{lim}$  et  $\sigma$  soient des distributions de Gauss (fig. 24.33) caractérisées par leur valeur moyenne  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{R}_{lim}$  et par leur écart type  $s_{\sigma}$ ,  $s_R$ .

L'application du calcul des probabilités donne :

- la valeur moyenne de la marge de sécurité

$$\bar{\sigma}_M = \bar{R}_{lim} - \bar{\sigma} \quad (24.44)$$

- l'écart type de la marge de sécurité

$$s_M = \sqrt{s_R^2 + s_{\sigma}^2} \quad (24.45)$$

On voit dans la figure 24.33 que la marge de sécurité  $\sigma_M$  peut avoir des valeurs négatives, ce qui signifie la rupture de la pièce. La marge de sécurité peut aussi s'écrire en faisant intervenir la notion d'intervalle de confiance

$$\bar{\sigma}_M = c_p s_M \quad (24.46)$$

L'indice de fiabilité  $c_p$  dépend de la probabilité  $p_f$  que  $\sigma_M$  soit négatif,  $p_f$  est la **probabilité de ruine** et la quantité  $1 - p_f$  est la **fiabilité**. Le tableau 24.34 indique la relation entre ces grandeurs pour une distribution gaussienne.

**Tableau 24.34** Probabilité de ruine et indice de fiabilité.

$p_f$	0,5	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$c_p$	0	1,28	2,33	3,09	3,72	4,26	4,75

Introduisons (24.44) et (24.45) dans (24.46), on obtient une équation qui permet de calculer la valeur de  $c_p$  à partir des valeurs moyennes et des écarts types des distributions. On trouve

$$c_p = \frac{\bar{R}_{lim} - \bar{\sigma}}{\sqrt{s_R^2 + s_\sigma^2}} \tag{24.47}$$

Le tableau 24.34 donne ensuite la probabilité de ruine de la pièce.  
Selon la définition traditionnelle, le facteur de sécurité vaudrait

$$S = \frac{\bar{R}_{lim}}{\bar{\sigma}} \tag{24.48}$$

Mais en le calculant à partir de (24.47), on obtient une expression du *facteur de sécurité nécessaire* pour que la probabilité de ruine soit inférieure à  $p_f$  lorsque les écarts types des distributions de  $\sigma$  et de  $R_{lim}$  sont connues. Soit

$$S \geq S_p = 1 + \frac{c_p}{\bar{\sigma}} \sqrt{s_R^2 + s_\sigma^2} \tag{24.49}$$

ou

$$S \geq S_p = \frac{1}{1 - \frac{c_p}{\bar{R}_{lim}} \sqrt{s_R^2 + s_\sigma^2}} \tag{24.50}$$

L'application de ces formules exige de connaître la distribution statistique de  $\sigma$  et de  $R_{lim}$  ou leur écart type. De grands efforts de recherche vont dans ce sens, mais ce n'est vraiment possible que pour des objets fabriqués en grandes séries.

**24.4.4 Choix du facteur de sécurité minimal**

Le constructeur est confronté au choix de la valeur du facteur de sécurité, ce qui est souvent pour lui l'occasion de tourments, car ce choix engage toujours sa responsabilité. Il se trouve en principe devant le dilemme suivant: une attitude timorée engage à choisir un facteur élevé, mais conduit inmanquablement à une construction lourde et coûteuse; inversement, une construction hardie présentant un petit facteur de

sécurité est dangereuse et peut être à l'origine d'un accident. La valeur du facteur de sécurité doit donc se choisir soigneusement sans tomber dans ces extrêmes; nous décrivons ci-après les procédures les plus courantes.

### Sécurité et probabilité de ruine

L'approche probabiliste du facteur de sécurité offre l'avantage de faire comprendre qu'une construction n'est jamais absolument sûre. Il faut accepter comme un fait inéluctable que l'accroissement du facteur de sécurité réduit, certes, la probabilité de ruine, mais n'exclut jamais complètement un accident.

On peut en principe calculer le facteur de sécurité minimal correspondant à une certaine probabilité de ruine à l'aide des formules (24.49) ou (24.50). Mais il faudrait pour cela bien connaître les distributions de la contrainte et de la résistance, de sorte que ce calcul reste délicat.

Une autre approche, qui se base aussi sur des raisonnements probabilistiques, consiste à tenir compte séparément de l'incertitude frappant la contrainte théorique et de l'incertitude concernant la résistance du matériau. On définit:

- La **contrainte de dimensionnement**

$$\sigma_d = S_d \bar{\sigma} \quad (24.51)$$

avec:

$\bar{\sigma}$  contrainte effective théorique

$S_d$  **facteur de dimensionnement**

- La **résistance de dimensionnement**

$$R_{lim\ d} = \frac{\bar{R}_{lim}}{S_R} \quad (24.52)$$

avec:

$\bar{R}_{lim}$  résistance limite du matériau

$S_R$  **facteur de résistance**

La relation de sécurité structurale s'exprime par (fig. 24.35):

$$\sigma_d \leq R_{lim\ d} \quad (24.53)$$

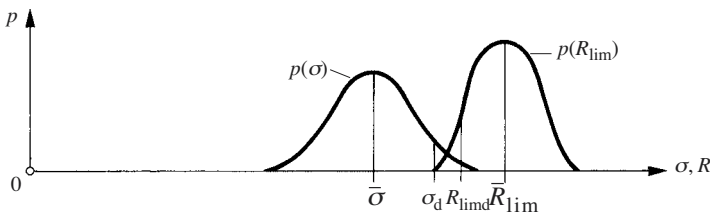


Fig. 24.35 Contrainte de dimensionnement et résistance de dimensionnement.

ou

$$S_d \bar{\sigma} \leq \frac{\bar{R}_{\text{lim}}}{S_R} \quad (24.54)$$

Avec la définition du facteur de sécurité (24.48), on a

$$S \geq S_d S_R \quad (24.55)$$

Cette approche est utilisée couramment en construction métallique, car elle permet de tenir compte très simplement de facteurs de dimensionnement différenciés selon le type d'action sur la structure.

Il convient de choisir le facteur de sécurité d'autant plus grand que les conséquences d'une rupture sont plus désastreuses. Selon leur gravité, on distingue les cas de rupture suivants :

- pièces n'affectant pas l'exploitation d'une machine ;
- pièces mettant une machine ou une installation hors service, mais ne pouvant entraîner aucune blessure de personne ; en cas de rupture prématurée pendant la période de garantie, l'exploitant a des chances d'obtenir du constructeur un dédommagement devant une cour civile ;
- pièces dont la rupture provoque un accident avec des lésions corporelles simples ou mortelles entraînant automatiquement des poursuites pénales contre l'exploitant ou le fabricant de la machine.

### Sécurité optimale

Un facteur de sécurité élevé se traduit par une augmentation des dimensions, de la masse et du prix des pièces. Inversement, une petite valeur implique un certain risque de rupture et d'accident. Il existe donc une valeur optimale pour laquelle le coût d'exploitation est minimum.

Considérons, par exemple, l'arbre d'entrée du réducteur d'un treuil pour engin de levage. Si  $p_f$  est sa probabilité de rupture, on peut prévoir  $Np_f$  ruptures pour  $N$  cycles de charge de l'arbre. Une rupture entraîne les dépenses suivantes :

- $C_0$  coût de l'arbre et de toutes les pièces endommagées consécutivement à la rupture,
- $C_1$  frais de réparation,
- $C_2$  perte d'exploitation (manque à gagner) durant l'immobilisation de l'engin de levage.

Le coût d'exploitation de l'engin pendant les  $N$  cycles considérés étant  $C_3$ , le coût total des ruptures d'arbres et des frais d'exploitation vaut

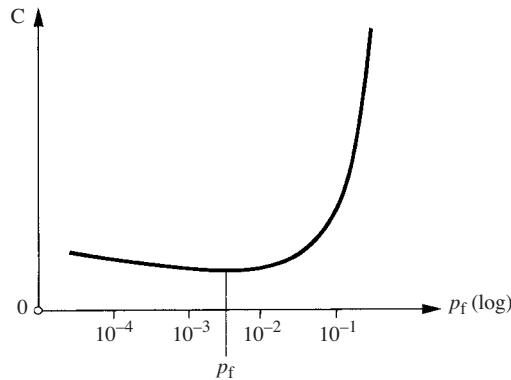
$$C = Np_f(C_0 + C_1 + C_2) + C_3 \quad (24.56)$$

Le coût  $C_0$  des pièces augmente un peu lorsque  $p_f$  décroît, car les pièces sont plus grosses lorsque la probabilité de ruine diminue. Les frais d'exploitation  $C_3$  augmentent avec  $1/p_f$ , car les frais financiers (intérêt de l'investissement et amortissement) et les consommations d'énergie et de lubrifiant augmentent avec la masse de la machine.  $C_1$  et  $C_2$  sont constants. En fin de compte, le premier terme de (24.56) aug-

mente avec  $p_f$  tandis que le second diminue. On trouve la valeur optimale ou valeur économique de la probabilité de ruine à partir de l'équation

$$\frac{dC}{dp_f} = 0 \quad (24.57)$$

Le minimum de cette fonction est généralement assez plat (fig. 24.36). On a donc avantage à choisir une probabilité de ruine plutôt faible. On trouve ensuite l'indice de fiabilité dans le tableau 24.34 et la valeur du facteur de sécurité nécessaire par les formules (24.49) ou (24.50).



**Fig. 24.36** Allure de la courbe du coût d'exploitation en fonction de la probabilité de ruine.

Cette méthode est séduisante, mais on devrait encore y inclure la valeur de la réputation du constructeur et de l'utilisateur qui pourraient eux aussi être ruinés par des accidents trop nombreux. En outre comment faire si une avarie est susceptible d'entraîner des accidents de personnes? Soit on décrète que la vie humaine n'a pas de prix et la fonction coût n'a pas de minimum, soit on introduit cyniquement dans les calculs la valeur d'assurance RC des personnes éventuellement lésées. Une analyse détaillée de cette méthode figure dans [24.13].

### Facteurs de sécurité empiriques

Il est difficile d'évaluer le facteur de sécurité car il doit prendre en compte les imperfections de réalisation des pièces, les incertitudes de calcul et la dispersion des valeurs caractéristiques du matériau. Pour serrer la réalité de plus près, on soumet souvent des pièces, des sous-ensembles ou des machines entières à des essais de résistance faits dans les conditions d'emploi normal ou en surcharge. En conduisant un grand nombre d'essais jusqu'à la rupture, on trouve la valeur réelle du facteur de sécurité et sa dispersion. Cette méthode est utile pour apprécier l'importance des impondérables, pour vérifier les méthodes de calcul et pour améliorer la qualité de la fabrication. Elle est très développée dans la construction d'engins fabriqués en grandes séries ou dangereux: véhicules routiers, chemins de fer, aérospace, sous-marins, technique nucléaire. Lorsqu'on connaît bien les efforts de rupture et leur dispersion, on peut s'approcher, en service courant, très près des conditions critiques.



### Facteurs de sécurité usuels

Les méthodes évoquées ci-dessus exigent toutes de disposer d'un important matériel statistique, ce qui n'est pas à la portée de chacun. Les manuels donnent des valeurs de coefficients de sécurité en usage en construction mécanique courante. Selon [24.1], on choisit habituellement :

- $S = 1,5$  à  $3$  vis-à-vis des ruptures de fatigue
- $S = 1,2$  à  $2$  vis-à-vis de la limite élastique
- $S = 2$  à  $4$  vis-à-vis de la rupture statique
- $S = 3$  à  $5$  vis-à-vis du flambage ou du voilement

### Facteurs de sécurité réglementaires

Pour certains types de construction, la valeur du facteur de sécurité, la résistance de calcul du matériau employé et les méthodes de calcul sont fixées par des règlements ou par des normes. Ainsi, par exemple, l'Association suisse d'inspection technique (ASIT) prescrit que l'enveloppe d'une chaudière à vapeur fonctionnant à  $200^{\circ}\text{C}$ , construite en acier H II, doit être calculée avec une résistance à la traction de  $410\text{ N/mm}^2$ , avec un facteur de sécurité de 2,7 vis-à-vis de la rupture et avec un facteur de sécurité de 1,6 vis-à-vis de la limite élastique de  $210\text{ N/mm}^2$ . La résistance admissible la plus petite pour le calcul de l'épaisseur de l'enveloppe vaut alors  $\sigma_{\text{adm}} = 210/1,6 = 131\text{ N/mm}^2$ .

Ces règlements sont appréciés des constructeurs, car ils leur permettent de rejeter leur propre responsabilité sur les auteurs des règlements et de se mettre ainsi à l'abri de poursuites judiciaires pour négligence en cas d'accident.

## 24.5 PRÉDIMENSIONNEMENT

### 24.5.1 Méthodologie

#### Généralités

Le prédimensionnement vise à déterminer *rapidement* la taille d'un élément ou d'un organe afin d'obtenir une vision globale de la machine dès le début d'un projet et d'en supputer le coût. Les calculs sont forcément imprécis, car il manque souvent les valeurs numériques de nombreux paramètres, mais ils doivent néanmoins permettre de cerner la réalité d'assez près. On néglige les effets secondaires ou on en tient compte seulement par des éléments de correction multiplicatifs ou additifs basés sur l'expérience acquise. Insistons sur la rapidité du prédimensionnement, sa durée ne devrait pas excéder quelques pourcents de la durée totale d'une étude. Par analogie, le prédimensionnement correspond à peu près à l'esquisse que fait un peintre de son tableau dans le but de proportionner les objets qu'il veut représenter sur sa toile pour exprimer son idée artistique.

Une étude d'avant-projet se caractérise par :

- des simplifications visant à négliger les influences secondaires et les influences du deuxième ordre ;
- une estimation de certains paramètres ;
- un large appel à l'expérience acquise dans des constructions antérieures.

L'imprécision des résultats n'est pas gênante, car on est de toute façon souvent conduit à choisir la taille définitive d'un organe ou d'un élément de machine sur la base du matériel disponible ou des dimensions imposées par les normes, par exemple les modules d'engrenages ou la taille de roulements.

Présentons deux méthodes de prédimensionnement.

### Méthode directe

Dans les cas simples, on peut calculer immédiatement la dimension cherchée. La forme de la pièce, les efforts qui lui sont appliqués ainsi que le matériau dont elle est faite sont déterminés par une étude préliminaire. L'algorithme de la figure 24.37 montre la démarche de calcul :

- calculer la contrainte de comparaison avec la dimension inconnue  $x$  ;
- déterminer la résistance limite du matériau selon son comportement à la sollicitation considérée ;
- choisir la valeur du facteur de sécurité minimal nécessaire ;
- calculer la contrainte admissible ;
- écrire l'inéquation de sécurité ;
- résoudre l'inéquation de sécurité par rapport à la dimension  $x$  cherchée, on obtient  $x > x_{\min}$  ou, selon le cas,  $x < x_{\max}$  ;
- choisir la dimension effective selon des considérations constructives, d'usinage et/ou selon le matériel disponible ; le cas échéant, si la dimension est inacceptable, modifier la géométrie et/ou choisir un autre matériau pour que la dimension convienne (itération).

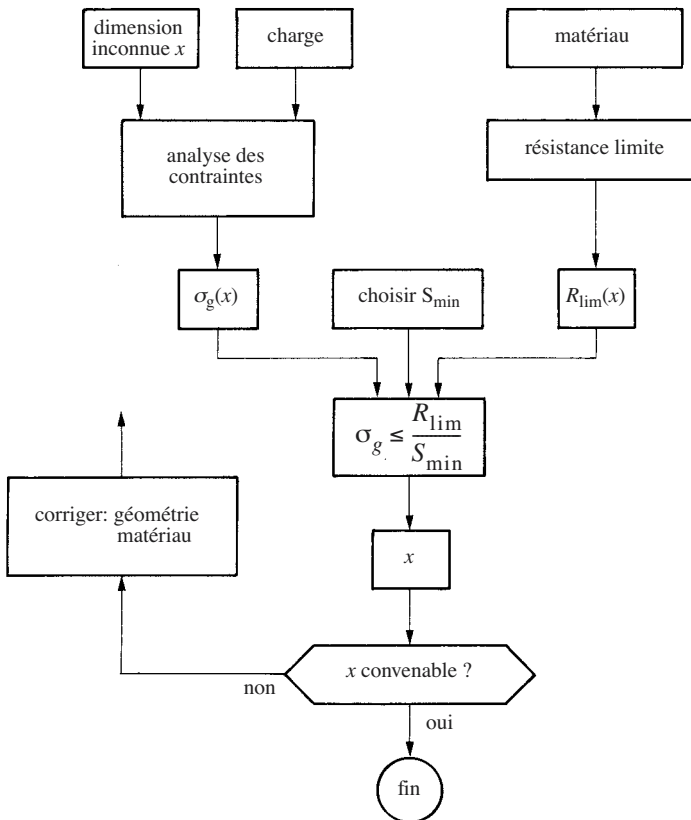


Fig. 24.37 Algorithme de dimensionnement direct.

*Exemple numérique*

Calculer le diamètre de l'axe de la charnière d'une porte de visite dont la masse est 60 kg (fig. 24.38).

L'axe est sollicité statiquement en flexion et cisaillement. On utilise une goupille ajustée qu'on ne calcule qu'en flexion. La porte repose sur la charnière inférieure.

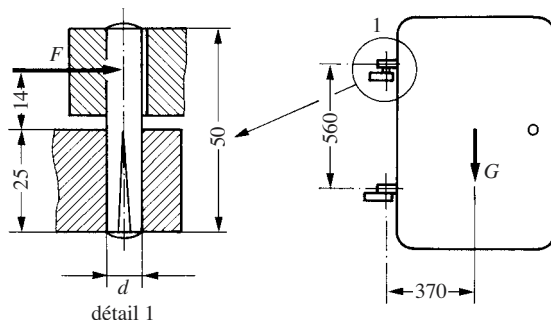


Fig. 24.38 Charnière d'une porte.

- Force appliquée à la goupille :

$$F = 60 \times 9,81 \frac{370}{560} = 389 \text{ N}$$

- Contrainte de flexion :

$$\sigma_f = \frac{32}{\pi d^3} 389 \times 14 = \frac{55470}{d^3} \text{ N/mm}^2 \quad d [\text{mm}]$$

- Contrainte de flexion admissible pour les goupilles normalisées, selon une tablelle :

$$\sigma_{f \text{ adm}} = 200 \dots 240 \text{ N/mm}^2$$

- Inéquation de sécurité

$$\frac{55470}{d^3} \leq 200 \dots 240$$

- Diamètre de la goupille :  $d \geq 6,1 \dots 6,5 \text{ mm}$
- Diamètre de la goupille normalisée choisie :  $d = 8 \text{ mm}$

Il y aurait lieu de vérifier encore la résistance de la goupille à la pression latérale.

**Méthode indirecte**

Le dimensionnement par la méthode directe est souvent impraticable parce que :

- le calcul de la contrainte de comparaison dépend d'une ou de plusieurs dimensions qui sont conditionnées par des considérations constructives ;

- les charges appliquées à la pièce dépendent de ses propres dimensions;
- les facteurs de concentration de contraintes et d'entailles dépendent de la géométrie, laquelle dépend à son tour des dimensions cherchées.

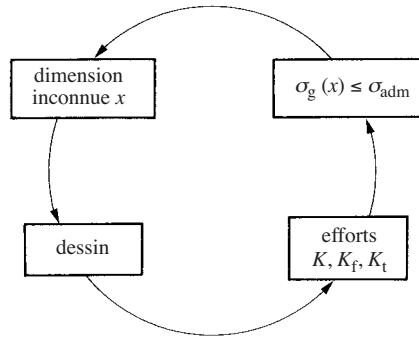


Fig. 24.39 Cercle vicieux de dimensionnement.

Le calcul est enfermé dans un cercle vicieux contenant aussi le dessin d'étude (fig. 24.39). La méthode indirecte permet d'en sortir par l'une ou l'autre procédure suivante :

- *Choisir provisoirement* arbitrairement la dimension cherchée sur la base de l'expérience acquise dans des constructions similaires ; puis dessiner et faire un calcul de vérification simple, éventuellement itérer selon la figure 24.40.
- *Faire un calcul direct simplifié* en négligeant certains effets, mais en les anticipant en choisissant d'abord des valeurs de résistance du matériau très basses.

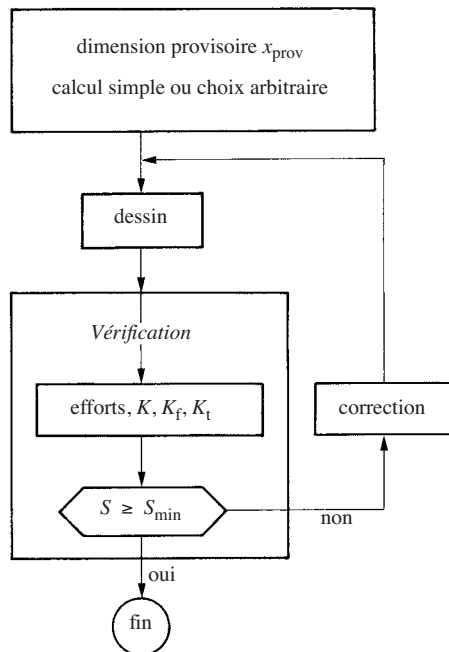


Fig. 24.40 Algorithme de calcul avec choix initial d'une dimension.

*Exemple*

Un arbre de réducteur (fig. 24.41) porte un pignon et une roue dentée à dents droites, il transmet le couple  $M_t$ . L'arbre est sollicité en torsion et en flexion. Le moment de flexion dépend principalement de la force normale  $F_{n1}$  sur la denture du pignon (donc de  $d_1$ ) et des distances  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $\ell_3$ . Mais ces grandeurs dépendent à leur tour du diamètre de l'arbre, lequel est lui-même fonction du moment de flexion. La force sur la denture de la roue (non représentée) est plus petite que  $F_{n1}$ , son orientation dépend de la disposition du réducteur. L'analyse de constructions existantes révèle qu'il existe des proportions relativement constantes entre les dimensions (sect. 24.7), de sorte que le moment de flexion ne dépend finalement approximativement que du diamètre de l'arbre et de  $F_{n1}$ . Cette force est proportionnelle au couple transmis et inversement proportionnelle au diamètre  $d_1$  du pignon, lequel est souvent conditionné par le diamètre de l'arbre. On peut finalement écrire que le moment de flexion est proportionnel au couple transmis par l'arbre,

$$M = \zeta M_t$$

où le facteur  $\zeta$  varie relativement peu d'une construction à l'autre.

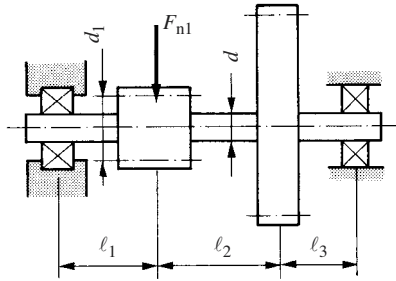


Fig. 24.41 Disposition de principes d'un arbre de réducteur.

Calculons la contrainte de comparaison par (24.30) (hypothèse de Von Mises):

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\zeta M_t}{I} \frac{d}{2}\right)^2 + 3\tau_t^2}$$

où la contrainte de torsion vaut

$$\tau_t = \frac{M_t}{I_p} \frac{d}{2}$$

En remarquant que, pour une section circulaire,  $I_p = 2I$ , on trouve

$$\sigma_g = \tau_t \sqrt{4\zeta^2 + 3}$$

L'arbre est sollicité en flexion alternée et on suppose que la torsion est aussi alternée par une inversion périodique du couple. Faisons intervenir un facteur d'entaille en flexion  $K_{ff}$  et un autre en torsion  $K_{ft}$  en supposant  $K_{ff} \approx 1,22 K_{ft}$ . L'inégalité de sécurité s'écrit alors :

$$K_{ft} \tau_t \sqrt{7\xi^2 + 3} \leq \frac{c \sigma_{Df}}{S}$$

où  $c$  est le facteur de correction de la résistance discuté au paragraphe 23.5.4 et  $S$  est le facteur de sécurité. Ecrivons l'inégalité sous la forme

$$\tau_t \leq \frac{\sigma_{Df}}{n S} \quad (24.58)$$

avec

$$n = \frac{1}{c} K_{ft} \sqrt{6\xi^2 + 3} \quad (24.59)$$

que nous appelons *facteur d'anticipation de contrainte de comparaison*. Une évaluation numérique donne :

- arbre avec flexion  $n = 8$  à  $11,3$
- arbre en torsion pure  $n = 4$  à  $5,5$

Appelons encore *résistance de prédimensionnement à la torsion* la valeur

$$\tau_{t\,pd} = \frac{\sigma_{Df}}{n S} \quad (24.60)$$

Alors

$$\tau_t \leq \tau_{t\,pd} \quad (24.61)$$

Cette inégalité fournit le diamètre provisoire de l'arbre :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \tau_{t\,pd}}} \quad (24.62)$$

La valeur du facteur de sécurité effectif ressortira du calcul de vérification ultérieur.

### Mise en garde

Nous dénonçons sévèrement la pratique des ouvrages de calcul d'organes de machines qui appellent contrainte de torsion *admissible*  $\tau_{t\,adm}$  le second membre de (24.61). Ils donnent des valeurs pour divers matériaux valables seulement pour le calcul des arbres. Cette présentation est fautive et dangereuse, car elle laisse dans l'ombre tout ce qui se cache derrière ces chiffres. Elle laisse planer une ambiguïté avec la véritable signification de la contrainte admissible (§ 24.2.2) et porte à croire que la sécurité est très grande. Il faut abandonner cette mauvaise pratique.

## 24.5.2 Pratique du prédimensionnement

### Généralités

Le prédimensionnement des organes de machine doit nécessairement être rapide. C'est pourquoi il existe des formules, adaptées à chaque élément de machine, qui reposent sur des hypothèses simplificatrices. Elles ne prennent généralement en compte que les sollicitations principales et contiennent des facteurs de correction empiriques qui expriment la différence entre le comportement réel des pièces et le modèle théorique simplifié. Dans d'autres cas, le dimensionnement se base uniquement sur des valeurs empiriques. L'incohérence apparente des valeurs numériques de résistance, des méthodes de calcul et des simplifications, complique la tâche du constructeur et accrédite l'idée que le calcul des organes de machine s'apparente aux recettes de cuisine. Rien n'est plus faux, il s'agit au contraire de méthodes adaptées à la complexité des pièces et des phénomènes permettant des calculs simples et rapides. On observe d'ailleurs une évolution vers une élévation du niveau scientifique du calcul.

Voici les procédures pratiques usuelles.

### Méthode semi-empirique

Le calcul détaillé des contraintes dans un organe de machine est souvent très compliqué si on veut tenir compte de tous les phénomènes qui entrent en jeu. Considérons, par exemple, la simple liaison d'un arbre et d'un moyeu par une clavette (fig. 24.42). Les déformations en torsion de l'arbre et du moyeu ont pour effet que la distribution axiale de la pression sur les flancs de la clavette présente l'allure visible à la figure 24.43. La pression est la plus forte du côté de l'entrée du couple par l'arbre, elle présente encore une pointe sur le diamètre de l'arbre parce que les poussées latérales  $F_{u1}$  et  $F_{u2}$  ne sont pas alignées et tendent à basculer la clavette dans son logement. Militzer [24.14] a étudié cette distribution de pression, il propose de dimensionner l'assemblage de façon que la pression maximale n'excède pas 90% de la limite élastique ou de la limite de fatigue de la clavette selon la dynamique du couple transmis. Par ailleurs, l'arbre et le moyeu doivent aussi résister à cette pression latérale ainsi qu'aux contraintes qui en résultent. On entrevoit la complication du problème. Cette étude dépasse les besoins du praticien qui cherche rapidement la longueur nécessaire d'une clavette normalisée pour transmettre le couple.

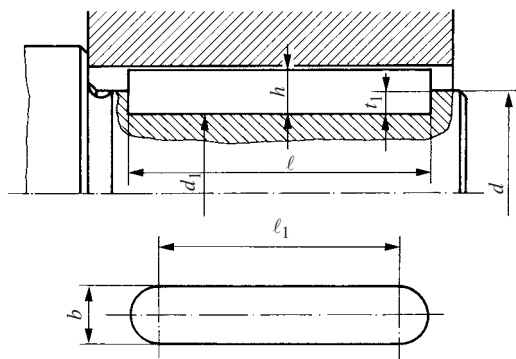


Fig. 24.42 Clavette plate fixe.

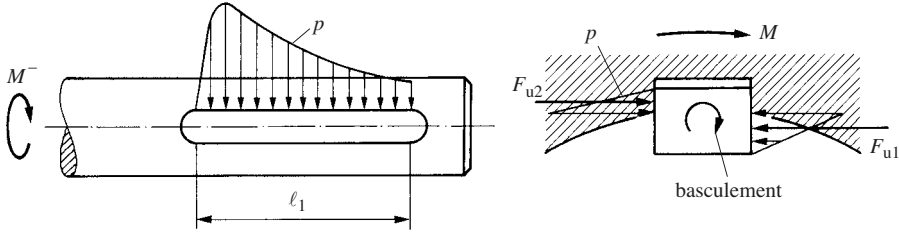


Fig. 24.43 Distribution des pressions sur une clavette.

Le calcul s'effectue en pratique avec une théorie très simplifiée qui suppose que la pression est uniforme sur les flancs de la clavette et que la force de contact est égale à la force périphérique sur le diamètre de l'arbre. Avec les paramètres visibles dans la figure 24.42, la pression moyenne au moyeu vaut

$$\bar{p} = \frac{2M}{d \ell_1 (h - t_1)} \quad (24.63)$$

La pression sur l'arbre est plus petite que sur le moyeu parce que  $t_1 > h/2$  pour les clavettes normalisées. La pression moyenne ne doit pas dépasser une certaine pression admissible  $p_{adm}$  ; cette condition permet de trouver la longueur utile de la clavette nécessaire :

$$\ell_1 \geq \frac{2M}{d(h - t_1)p_{adm}} \quad (24.64)$$

La pression admissible est en relation avec la résistance limite du moyeu :

$$p_{adm} = \frac{R_{lim}}{n} \quad (24.65)$$

où :

$$\begin{aligned} R_{lim} &= R_m && \text{pour un matériau fragile} \\ R_{lim} &= R_e && \text{pour un matériau ductile et un couple constant} \\ R_{lim} &= \sigma_D \text{ ou } \sigma_{D0} && \text{selon que le couple est alterné ou répété} \end{aligned}$$

Le facteur de réduction  $n$  contient le facteur de sécurité et le rapport  $p_{max}/\bar{p}$  , on lui donne la valeur 1,3 à 2. En l'absence d'analyse théorique précise, on a déterminé  $p_{adm}$  à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle déjà par des essais de laboratoire.

Cette méthode se base sur des hypothèses simplificatrices et sur des valeurs de résistance admissibles déterminées empiriquement. Elle n'est applicable que si les essais sont effectués dans des conditions en tout point identiques au service réel de l'organe considéré et si les valeurs admissibles sont calculées avec les mêmes formules que pour le dimensionnement. Mais ces résultats numériques ne sont pas applicables ailleurs ; par exemple, la pression admissible sous la tête d'une vis n'a rien à voir avec celle d'une clavette.



Nous appelons cette démarche *semi-empirique*, parce qu'elle est basée à la fois sur une théorie (même simple) et sur des essais spécifiques dont les résultats sont utilisés *ensuite* pour dimensionner les pièces.

Voici quelques exemples d'éléments de machines dimensionnés par la méthode semi-empirique :

- assemblages rivés, soudés, brasés, collés ;
- goupilles ;
- assemblages arbre-moyeux à clavettes, cannelures, polygonaux ;
- paliers en état de frottement mixte ou sec ;
- roulements.

### Catalogues

On trouve de très nombreux éléments et organes de machines dans le commerce : éléments d'assemblage, courroies, chaînes, engrenages, roulements, embrayages, freins, joints, réducteurs, variateurs. Cette tendance va s'accroissant pour des raisons de rationalisation et de compétitivité. Les catalogues, généralement bien faits, contiennent toutes les formules et indications nécessaires au choix des éléments.

#### *Effort admissible*

Les éléments de machines du commerce sont très souvent caractérisés par la charge maximale qu'ils sont en mesure de supporter. Cette charge est, au sens de la théorie, une charge admissible. La condition d'aptitude au service s'écrit :

$$Q \leq Q_{\max} = Q_{\text{adm}} \quad (24.66)$$

On donne, par exemple, la force axiale transmissible par un circlip ou le couple transmissible par un accouplement, mais sans qu'on sache quelle est la sécurité effective. Dans les cas critiques, il convient de toujours faire des essais ou d'interroger le fabricant.

#### *Vitesse admissible*

Les catalogues contiennent aussi, s'il y a lieu, la vitesse maximale admissible des organes tournants. Par exemple, la vitesse périphérique d'une poulie en fonte grise ne doit pas dépasser 35 m/s.

#### *Indices caractéristiques*

La valeur admissible des indices caractéristiques figurent dans les catalogues. Par exemple :

- le produit  $p_v$  pour les couples cinématiques glissants (glissières, paliers lisses) ;
- le produit  $nd$  des roulements.

### Normes

Les normes ISO, DIN et autres, contiennent de précieuses procédures de calcul et les valeurs numériques nécessaires.

### **Normes industrielles**

Les industriels élaborent souvent des recommandations à l'usage interne de leur bureau d'étude. Elles reposent sur l'expérience pratique acquise dans la construction et l'exploitation de leur machine. Elles tiennent compte d'une rationalisation de la fabrication.

### **Manuels**

Il existe de nombreux manuels qui donnent des procédures de calcul et les valeurs numériques nécessaires.

### **Contraintes fonctionnelles multiples**

Certains organes doivent satisfaire simultanément plusieurs exigences. Il convient de dimensionner l'organe pour chacune d'entre elles, puis de retenir la dimension qui les satisfait toutes.

## **24.6 VÉRIFICATION**

### **24.6.1 Généralités**

#### **Démarche**

Le calcul de vérification de la sécurité structurale d'une pièce implique que son dessin et son matériau soient connus. Il se déroule comme suit (fig. 24.44) :

- déterminer la nature, l'intensité et la dynamique des charges appliquées à la pièce ;
- étudier le comportement du matériau ;
- analyser l'état de contrainte ;
- estimer la valeur des facteurs de concentration de contraintes théoriques et des facteurs de réduction de résistance à la fatigue ;
- calculer la contrainte de comparaison à l'aide de la théorie de la rupture valable pour le comportement présumé du matériau ;
- définir l'état limite déterminant du matériau ;
- calculer le facteur de sécurité ;
- apprécier le facteur de sécurité ; le cas échéant, corriger la pièce ou modifier le matériau.

#### **Choix de la théorie de la rupture**

Le choix de la théorie convenant à chaque cas est crucial. On opère ce choix sur la base des éléments suivants :

- la nature et la nuance du matériau ;
- la dynamique des contraintes (§ 24.3.2) ;
- l'épaisseur des pièces ;
- la température de service.

#### *Contraintes statiques*

Le dimensionnement est basé sur la résistance statique des matériaux (sect. 23.3). Il sera résumé au paragraphe 24.6.2.

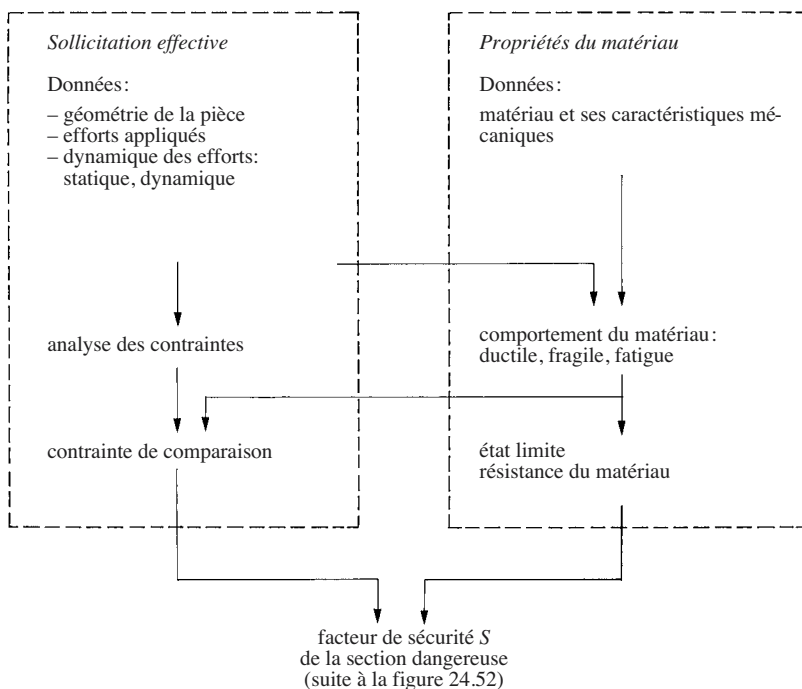


Fig. 24.44 Algorithme simplifié de vérification à la résistance.

### Contraintes dynamiques

Il convient de calculer avec la théorie de la fatigue oligocyclique si les contraintes approchent la limite élastique et varient seulement moins de  $10^3$  à  $10^4$  fois. Lorsque les contraintes varient plus souvent, on calculera avec la résistance à la fatigue des matériaux (sect. 23.5) en tenant compte des effets d'entailles (§ 24.3.3); le paragraphe 24.6.3 présente la méthode de vérification. Le cas des chocs est évoqué au paragraphe 24.6.4.

### Épaisseur des pièces

L'épaisseur des pièces influence la résistance et le comportement des matériaux; voir les paragraphes 23.3.3, 23.4.2 et 23.5.2.

### Température de service

La température d'un matériau influence fortement son comportement: il se fragilise au froid ou flue à haute température et la durée d'exposition aux températures élevées est essentielle.

### Diagramme de comportement

Le diagramme 24.45 représente la résistance à la traction selon la température d'utilisation d'un matériau. Il est découpé en domaines de comportement.

La contrainte de service est limitée par la courbe de résistance à la rupture; au-dessus de cette courbe, le matériau se rompt toujours. C'est la résistance à la rupture

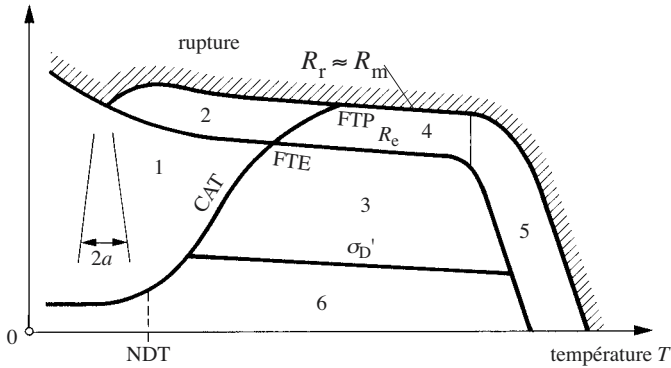


Fig. 24.45 Diagramme de comportement d'un matériau.

ultime  $R_r$  qui intervient, mais on se contente en pratique de calculer avec la résistance à la traction  $R_m$ .

La courbe de limite élastique  $R_e$  correspond à la transition entre le domaine de déformation globalement élastique et le domaine de déformation plastique (§ 23.3.1). Dans le cas d'un matériau fragile, les courbes  $R_r$  et  $R_e$  sont confondues. Précisons les domaines caractéristiques du diagramme 24.45 :

- Domaine 1* La résistance du matériau à la propagation d'une fissure dépend principalement de la taille des défauts. Appliquer la mécanique linéaire élastique de la rupture (sect. 23.4).
- Domaine 2* Comme dans le domaine 1, la propagation d'une fissure dépend de la taille des défauts, mais on applique la mécanique élasto-plastique de la rupture.
- Domaine 3* Limitation de la résistance par les phénomènes de fatigue (sect. 23.5).
- Domaine 4* Le matériau se trouve en état de déformation plastique, résistance à la fatigue oligocyclique.
- Domaine 5* Fluage à température élevée.
- Domaine 6* Domaine des basses contraintes, aucune rupture ne se produit, quels que soient le nombre de cycles de sollicitation ou la taille des défauts. Les grosses machines d'autrefois étaient habituellement sollicitées dans ce domaine. Seule l'usure en limitait la longévité.

### Section dangereuse

*La section dangereuse d'une pièce est la section où le facteur de sécurité local vis-à-vis d'un état limite défini est le plus petit.*

Il faut en principe calculer le facteur de sécurité en tout point d'une pièce, mais on évite ce travail fastidieux en supputant les endroits dangereux. L'expérience et le bon sens sont très utiles pour cela.

Examinons le cas de la résistance statique d'une pièce. D'une manière générale, on peut dire que la contrainte de comparaison en un point peut s'écrire sous la forme du rapport d'une fonction  $Q$  des efforts intérieurs locaux (force de traction-compression, effort tranchant, moment de flexion et de torsion) à une fonction  $G$  de la géométrie de la section considérée

$$\sigma_g = \frac{Q(\text{efforts int rieurs})}{G(g \text{ om trie de la section})} \quad (24.67)$$

En tenant compte d'un facteur de concentration de contraintes  $K_t$  valable pour le genre de sollicitation dominant de la pièce ainsi que de la résistance  $R_{lim}$  du matériau pour l'état limite considéré, le facteur de sécurité vaut

$$S = \frac{R_{lim}}{K_t \sigma_g} = \frac{R_{lim}}{K_t} \frac{G(g \text{ om trie de la section})}{Q(\text{efforts int rieurs})} \quad (24.68)$$

Cette forme générale de l'expression du facteur de sécurité permet de tirer les conclusions importantes suivantes :

- on ne peut pas dire a priori où se trouve la section dangereuse sans examiner la distribution des efforts intérieurs et la géométrie de la pièce ;
- la section dangereuse se situe souvent à l'endroit d'un concentrateur de contrainte ;
- lorsqu'une pièce de section constante est soumise à une sollicitation uniforme, la section dangereuse est celle dont le concentrateur de contraintes est le plus intense.

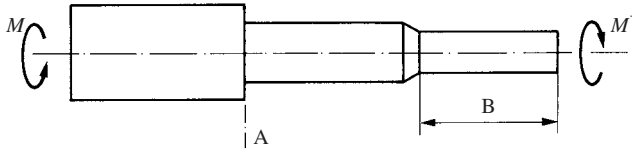


Fig. 24.46 Sections dangereuses selon la dynamique de l'effort.

La section dangereuse lors d'une sollicitation de fatigue n'est pas toujours la même que dans le cas d'une charge statique. La figure 24.46 représente, par exemple, un arbre fabriqué en un acier ductile sollicité en torsion. La section A est dangereuse en charge alternée à cause du grand effet d'entaille de l'épaulement. En revanche, les sections de la zone B sont dangereuses en cas de surcharge statique parce que leur moment de résistance est le plus petit. Si le matériau était fragile, la section A serait aussi dangereuse lors d'une charge statique à cause de la très forte concentration de contrainte à la discontinuité du diamètre et en cas de choc.

Des logiciels de calcul par éléments finis, précieux pour vérifier des pièces de forme compliquée, indiquent la distribution des contraintes par des couleurs qui font immédiatement ressortir les zones dangereuses.

### Charges exceptionnelles

En dehors de son fonctionnement normal, il arrive qu'un organe de machine soit sollicité par une charge exceptionnelle, par exemple, le freinage d'urgence d'un véhicule ou un choc accidentel. Il convient de vérifier qu'il supporte, sans dommage, aussi la charge exceptionnelle ; mais comme il s'agit de cas rares, la vérification se base sur les caractéristiques de résistance statiques des matériaux.

### 24.6.2 Résistance statique

On a vu que la résistance statique du matériau dépend de la dimension transversale des pièces, du traitement subi par le matériau et de la température de service (§ 23.3.3). Les caractéristiques de résistance statique corrigée du matériau sont :

- $R'_{p0,2}$  la limite élastique à 0,2% de déformation résiduelle;
- $R'_e$  la limite conventionnelle d'élasticité;
- $R'_m$  la résistance à la traction;
- $R'_{mc}$  la résistance à la compression (matériau fragile).

Les contraintes effectives se calculent en tenant compte des facteurs de concentration de contraintes théoriques (24.17). Ces derniers sont valables seulement dans le domaine élastique pour les matériaux ductiles, mais jusqu'à la rupture pour les matériaux fragiles.

#### Matériaux ductiles

Sauf quelques cas particuliers, les pièces de machines travaillent dans le domaine élastique. La contrainte de comparaison se détermine alors à l'aide de la théorie de Von Mises-Hencky par les formules (24.25) à (24.27) en faisant intervenir les facteurs de concentration de contraintes. Par exemple, dans le cas d'un arbre soumis à une contrainte de flexion et à une contrainte de torsion, on a, sur la base de (24.30),

$$\sigma_g = \sqrt{(K_{tf} \sigma)^2 + 3(K_{tt} \tau_t)^2} \quad (24.69)$$

avec :

- $\sigma$  contrainte nominale de flexion
- $\tau_t$  contrainte nominale de torsion
- $K_{tf}$  facteur de concentration de contraintes en flexion
- $K_{tt}$  facteur de concentration de contraintes en torsion

Le facteur de sécurité vis-à-vis de la transition élasto-plastique conventionnelle vaut

$$S = \frac{R'_{p0,2}}{\sigma_g} \quad (24.70)$$

La sécurité vis-à-vis de la rupture ductile

$$S = \frac{R'_m}{\sigma_g} \quad (24.71)$$

se calcule avec la contrainte de comparaison selon (24.31) ou (24.34) sans faire intervenir les concentrations de contraintes à cause de la plastification du matériau.

#### Rupture fragile

La figure 24.30 représente le polygone de rupture d'un état de contrainte plan. Dans le premier quadrant, le facteur de sécurité est égal à la plus petite des deux valeurs :

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{R'_m}{\sigma_1} \\ S &= \frac{R'_m}{\sigma_3} \end{aligned} \right\} \quad (24.72)$$

Dans le quatrième quadrant,  $\sigma_1 > 0$  et  $\sigma_3 < 0$ ; avec (24.36) on a

$$S = \frac{R'_m}{\sigma_1 + \frac{R'_m}{R'_{mc}} \sigma_3} \quad (24.73)$$

On raisonne de manière analogue dans les autres quadrants.

### 24.6.3 Résistance à la fatigue

#### Résistance limite

##### *Sollicitation alternée*

La résistance limite à des contraintes alternées se détermine à partir d'un diagramme de Wöhler en fonction de la longévité voulue (fig. 24.47). Le diagramme se construit avec les éléments suivants :

- la limite élastique  $R'_e$  et la résistance à la traction  $R'_m$  corrigées du matériau des pièces, non pas celles d'éprouvettes (§ 23.3.3);
- la limite de fatigue corrigée  $\sigma'_D$  (23.26) valable pour la sollicitation dominante, en traction ou en flexion.

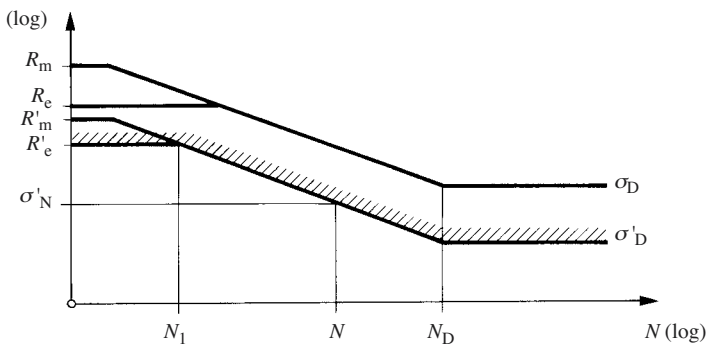


Fig. 24.47 Diagramme de Wöhler corrigé.

La longévité de fatigue conventionnelle est habituellement  $N_D = 2 \times 10^6$ ;  $N_1 = 10^3$  à  $10^4$  selon le matériau. A une longévité souhaitée  $N$  correspond la limite d'endurance  $\sigma'_N$ .

### Sollicitation ondulée

La résistance du matériau d'une pièce à une sollicitation ondulée quelconque est représentée commodément par un polygone dans le diagramme de Haigh représenté à la figure 23.44.

### Contraintes de comparaison

La rupture de fatigue dépend de la contrainte moyenne et de la composante alternée. La première se traite comme une contrainte statique, la seconde s'analyse avec les lois de comportement en fatigue. Dans un concentrateur de contraintes, les contraintes moyennes sont affectées par le facteur de concentration de contraintes statique, tandis que les amplitudes des contraintes sont à multiplier par le facteur d'entaille correspondant pour tenir compte de l'effet dynamique du concentrateur de contraintes. Les contraintes de comparaison se calculent sur la base de l'hypothèse de l'énergie de distorsion maximale à l'aide des formules (24.25) ou (24.26).

### Sécurité structurale

Supposons que la contrainte de comparaison se compose de deux parties :

- une contrainte statique constante  $\sigma_{g0}$  ;
- une contrainte dynamique susceptible de surcharge avec sa contrainte moyenne  $\sigma_{gm}$  et l'amplitude de contrainte  $\sigma_{ga}$  .

En utilisant le diagramme de Haigh, le point figuratif E des contraintes effectives doit se trouver à l'intérieur du polygone limite défini au paragraphe 23.5.4 (fig. 24.48). La résistance effective  $\sigma'_D$  se détermine à partir de la résistance à la fatigue en flexion alternée  $\sigma_{Df}$ , lorsque la composante alternée de la sollicitation en flexion ou en torsion domine. Si la traction variable domine, on se base sur la résistance à la fatigue en traction alternée. De plus, selon le nombre de sollicitations, ce seront soit des limites de fatigue soit des limites d'endurance limitée.

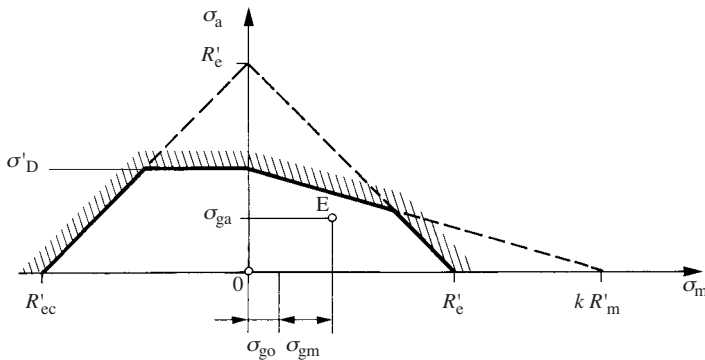


Fig. 24.48 Point figuratif de la contrainte de comparaison effective dans le polygone limite réel.

Certains auteurs incluent le facteur d'entaille directement dans le facteur de correction  $c$  du matériau. Nous préférons l'introduire dans le calcul de la contrainte alternée de comparaison afin de pouvoir tenir compte séparément des valeurs valables pour chaque mode de sollicitation.



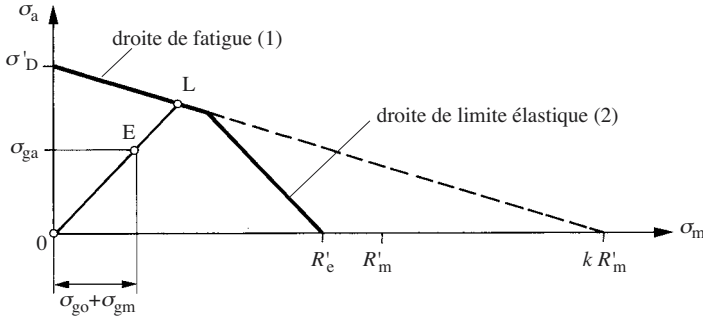


Fig. 24.49 Calcul du facteur de sécurité structural.

Le facteur de sécurité structurale vaut par définition (fig. 24.49):

$$S = \frac{\overline{OL}}{\overline{OE}} \quad (24.74)$$

Selon la position de l'intersection L de la droite O-E avec le polygone limite, on distingue deux cas:

- L se trouve sur la droite de fatigue (1):

$$S = \frac{1}{\frac{\sigma_{g0} + \sigma_{gm}}{k R'_m} + \frac{\sigma_{ga}}{\sigma'_D}} \quad (24.75)$$

- L se trouve sur la droite de limite élastique (2):

$$S = \frac{R'_e}{\sigma_{g0} + \sigma_{gm} + \sigma_{ga}} = \frac{R'_e}{\sigma_{g \max}} \quad (24.76)$$

On peut se dispenser de chercher graphiquement où se trouve le point limite L. Il suffit de calculer les deux valeurs du facteur de sécurité et de ne prendre en considération que la plus petite.

Les formules contiennent implicitement le facteur de sécurité statique correspondant au cas particulier où la composante alternée est nulle. En effet, on obtient le facteur de sécurité vis-à-vis de la rupture statique ( $k = 1$ ) en faisant  $\sigma_{ga} = 0$  et  $k = 1$  dans la formule (24.75). Alors:

$$S = \frac{R'_m}{\sigma_{g0} + \sigma_{gm}} = \frac{R'_m}{\sigma_g} \quad (24.77)$$

Le facteur de sécurité vis-à-vis de la limite élastique se trouve par (24.76):

$$S = \frac{R'_e}{\sigma_{g0} + \sigma_{gm}} = \frac{R'_e}{\sigma_g} \quad (24.78)$$

On retrouve les formules (24.71) et (24.70).

### Calcul avec le facteur d'application

On rencontre souvent dans la littérature des formules de dimensionnement, notamment pour des organes de transmission, basées sur le calcul du facteur de sécurité par la formule :

$$S = \frac{\sigma'_{D0}}{K_a \sigma_{gN}} \quad (24.79)$$

avec :

- $\sigma'_{D0}$  limite de fatigue corrigée en sollicitation répétée, en flexion pour des arbres
- $K_a$  facteur d'application
- $\sigma_{gN}$  contrainte de comparaison calculée pour l'effort nominal (puissance nominale à la vitesse nominale)

Selon la définition (17.211) du facteur d'application, le dénominateur représente la contrainte maximale appliquée. En outre, la limite de fatigue en contrainte répétée est voisine de la limite élastique. La formule (24.79) est donc pratiquement identique à la formule plus rigoureuse (24.76), mais elle ne donne une estimation correcte du facteur de sécurité que lorsque  $K_a \leq 2$ . En revanche, lorsque  $K_a > 2$ , c'est-à-dire lorsque la contrainte minimale est négative, la formule (24.79) donne un résultat optimiste. Par exemple, avec  $K_a = 3,5$  et un acier Ac 70, la sécurité est surestimée de 35% en traction et de 23% en flexion ou en torsion. En conclusion, nous recommandons de *ne jamais utiliser la formule (24.79) lorsque le facteur d'application est supérieur à deux*.

### Sécurité de surcharge extérieure

La contrainte statique est constante tandis que la contrainte dynamique est susceptible de surcharge (§ 24.4.2). Sur la base de la figure 24.50, on a le facteur de sécurité de surcharge

$$S_s = \frac{\overline{O'L}}{\overline{O'E}} \quad (24.80)$$

Selon la position du point L, on envisage deux cas :

- L se trouve sur la droite de fatigue (1) :

$$S_s = \frac{1 - \frac{\sigma_{g0}}{k R'_m}}{\frac{\sigma_{gm}}{k R'_m} + \frac{\sigma_{ga}}{\sigma'_D}} \quad (24.81)$$

- L se trouve sur la droite de limite élastique (2) :

$$S_s = \frac{R'_e - \sigma_{g0}}{\sigma_{gm} + \sigma_{ga}} \quad (24.82)$$

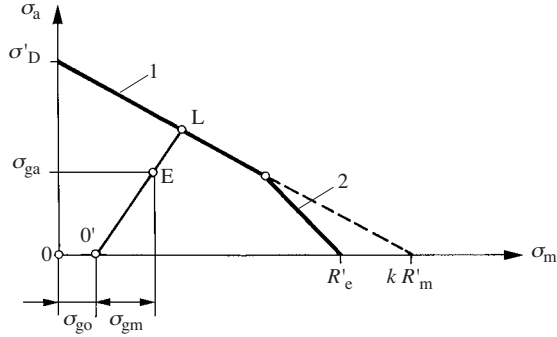


Fig. 24.50 Sécurité de surcharge extérieure.

Le facteur de sécurité effectif est la plus petite des deux valeurs, cette constatation dispense de tracer le diagramme.

**Exemple: vérification des arbres**

Dans le cas général, un arbre est sollicité par des contraintes ondulées dont les composantes moyennes et alternées sont:

- traction:  $\sigma_m, \sigma_a$
- flexion:  $\sigma_{fm}, \sigma_{fa}$
- torsion:  $\tau_{tm}, \tau_{ta}$

La contrainte de comparaison moyenne se calcule par la formule 24.30. En remarquant que les contraintes de traction et de flexion sont parallèles, avec les facteurs de concentration de contrainte correspondant, il vient la **contrainte de comparaison moyenne**:

$$\sigma_{gm} = \sqrt{(K_t \sigma_m + K_{tf} \sigma_{fm})^2 + 3(K_{tt} \tau_{tm})^2} \quad (24.83)$$

avec les facteurs de concentration de contraintes théorique suivants:

- $K_t$  en traction;
- $K_{tf}$  en flexion;
- $K_{tt}$  en torsion.

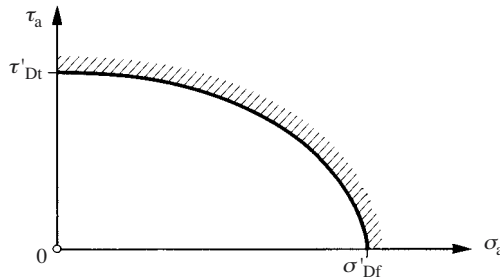


Fig. 24.51 Ellipse limite d'une pièce sollicitée simultanément en flexion alternée et en torsion alternée.

Des travaux expérimentaux révèlent que l'état limite en fatigue d'éprouvettes soumises simultanément à de la flexion alternée et à de la torsion alternée est représenté par un quart d'ellipse (fig. 24.51). C'est encore vrai lorsque les variations de chaque type de contrainte ne sont pas en phase. On démontre que la **contrainte de comparaison alternée** est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_{ga} = \sqrt{(K_f \sigma_a + K_{ff} \sigma_{fa})^2 + \left(\frac{\sigma'_{Df}}{\tau'_{Dt}}\right)^2 (K_{ft} \tau_{ta})^2} \quad (24.84)$$

avec :

$K_f$	facteur d'entaille en traction
$K_{ff}$	facteur d'entaille en flexion
$K_{ft}$	facteur d'entaille en torsion
$\sigma'_{Df}$	limite de fatigue corrigée en flexion
$\tau'_{Dt}$	limite de fatigue corrigée en torsion

Les valeurs de  $\sigma_{gm}$  et de  $\sigma_{ga}$  permettent maintenant de calculer le facteur de sécurité structurale comme on l'a montré plus haut.

#### Calcul usuel des arbres

Les ouvrages de dimensionnement d'organes de machines préconisent fréquemment le calcul de la contrainte de comparaison dans un arbre par la formule suivante :

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_f^2 + 3(\alpha_0 \tau_t)^2} \quad (24.85)$$

$\sigma_f$  et  $\tau_t$  sont respectivement la contrainte de flexion et la contrainte de torsion calculées en tenant compte des concentrateurs de contraintes. La contrainte de flexion est habituellement alternée tandis que la contrainte de torsion est soit constante, soit répétée.

Le facteur  $\alpha_0$  tient compte du fait que la résistance du matériau dépend de la dynamique des sollicitations ; on admet :

- $\alpha_0 \approx 0,7$  lorsque la flexion est alternée et la torsion est constante ou répétée ;
- $\alpha_0 = 1$  lorsque la flexion et la torsion ont la même dynamique ; par exemple alterné-alterné ou répété-répété.

La formule (24.85) ne sépare pas l'effet des contraintes moyennes constantes et des contraintes alternées. On calcule le facteur de sécurité par comparaison avec la limite de fatigue corrigée en flexion  $\sigma'_{Df}$ .

### 24.6.4 Résistance au choc

#### Pièces homogènes

Les chocs sollicitent les matériaux par des contraintes qui varient très rapidement. Les matériaux réagissent par un accroissement instantané de leur limite élastique et de leur résistance à la traction ; en revanche, l'allongement à la rupture diminue ; ils se fragilisent (§ 23.3.3). La contrainte effective devrait se calculer en

tenant compte des phénomènes de propagation d'ondes (sect. 17.8). Moyennant certaines restrictions, notamment lorsque la masse provoquant le choc est très grande par rapport à celle qui le subit, on peut se contenter de comparer l'énergie cinétique de choc à l'énergie potentielle de rupture de la pièce. Cette dernière s'évalue en tenant compte de la fragilisation du matériau.

L'incertitude de ces calculs est grande; par ailleurs les ruptures fragiles sont brutales et souvent dangereuses. C'est pourquoi on admet dans ces cas des facteurs de sécurité élevés, de l'ordre de 2 à 4.

### Pièces non homogènes

La résistance des pièces contenant des défauts (fissures, soufflures) s'apprécie sur la base du facteur critique d'intensité des contraintes dynamiques au choc en mode I,  $K_{Id}$  (§ 23.4.1). Le facteur d'intensité des contraintes effectives  $K_I$  se calcule avec la contrainte dynamique de choc. Le facteur de sécurité vaut

$$S = \frac{K_{Id}}{K_I} \quad (24.86)$$

### 24.6.5 Appréciation du facteur de sécurité

Une pièce est jugée apte au service lorsque

$$S \geq S_{\min} \quad (24.87)$$

où  $S$  est le facteur de sécurité théorique et  $S_{\min}$  le facteur de sécurité minimal voulu selon le paragraphe 24.4.4.

Si l'inégalité n'est pas satisfaite, on accroît le facteur de sécurité par l'un ou/et l'autre des moyens suivants:

- augmenter les sections et les moments de résistance de la pièce;
- diminuer les efforts appliqués;
- diminuer les efforts intérieurs en modifiant le tracé de la pièce;
- utiliser un matériau plus résistant, mais en n'oubliant pas que la ductilité d'un acier au carbone diminue lorsque sa résistance à la traction augmente.

Il arrive que le facteur de sécurité théorique soit beaucoup plus grand que la valeur minimale nécessaire. Dans ce cas, la pièce est nettement surdimensionnée et on a un intérêt économique à réduire le facteur de sécurité. On diminue les sections de la pièce ou/et on choisit un matériau un peu moins résistant et du même coup souvent meilleur marché. La figure 24.52 montre le principe de la démarche.

On passe à l'exécution lorsque les calculs indiquent une sécurité structurale convenable (toutes autres conditions aussi satisfaites). Mais on aura toujours à l'esprit que les calculs de vérification sont théoriques, seule l'utilisation pratique sanctionnera leur justesse. C'est pourquoi on soumet souvent des pièces, des sous-ensembles ou des machines entières à des essais de fonctionnement et de surcharge de longue durée.

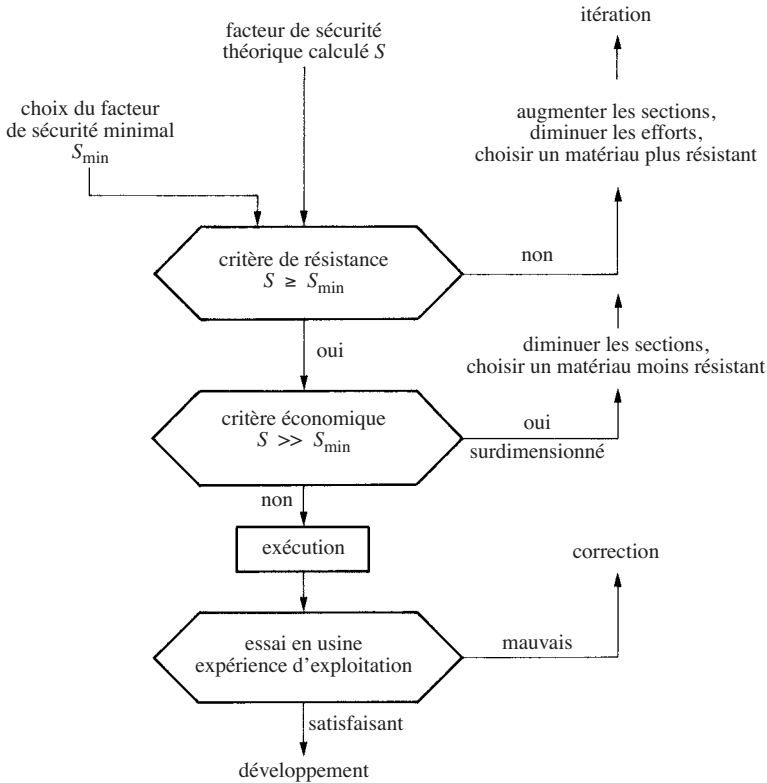


Fig. 24.52 Algorithme d'appréciation de la sécurité.

### 24.6.6 Longévité en fatigue

La longévité de pièces sollicitées en fatigue est limitée par la durée d'initiation et de propagation des fissures. On utilise des méthodes de calcul différentes selon qu'une pièce est neuve ou déjà fissurée.

#### Pièces neuves sans défaut

##### Régime de contraintes constant

La longévité d'une pièce neuve s'évalue sur la base du diagramme de Wöhler. Admettons tout d'abord qu'elle soit soumise à un régime de contrainte ondulée. Dans un diagramme de Haigh (fig. 24.53), traçons la droite passant par le point représentatif E des sollicitations effectives et le point A d'abscisse  $kR'_m$ . Le point B donne la valeur  $\sigma'_N$  de la limite d'endurance. On trouve l'endurance  $N$  en reportant cette valeur dans un diagramme de Wöhler corrigé (fig. 24.54). Les diagrammes donnent habituellement l'endurance à 50% de survie; l'endurance pour une probabilité de survie supérieure s'obtient à l'aide de la droite construite à partir de la limite de fatigue à  $p\%$  de survie:

$$\sigma'_{Dp} = c_a \sigma'_D \quad (24.88)$$

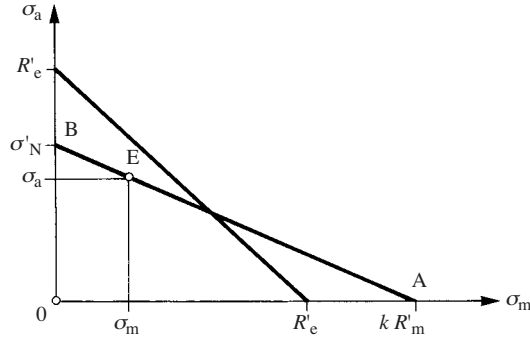


Fig. 24.53 Contrainte d'endurance limitée.

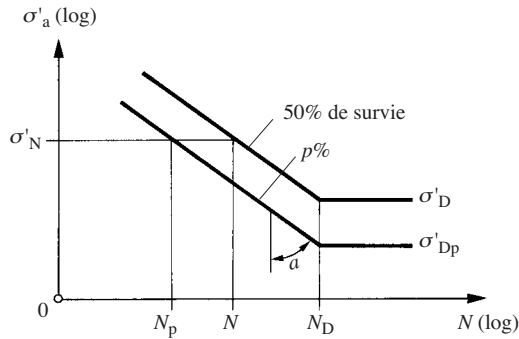


Fig. 24.54 Estimation de la durée de vie.

Le facteur de confiance statistique  $c_a$  est en relation avec l'intervalle de confiance choisi. Pour 99% de survie, on donne  $c_a = 0,794$  pour de l'acier.

La longévité se tire de l'équation de la droite de fatigue, analogue à (23.13). On obtient

$$N_p = \frac{N_D}{\left( \frac{\sigma'_N}{\sigma'_{Dp}} \right)^a} \quad (24.89)$$

où  $a$  caractérise la pente des droites.

#### Régime de contraintes variable

Les pièces sont souvent soumises à des charges très variables selon leurs conditions de fonctionnement. Il suffit de penser à une aile d'avion qui peut se trouver temporairement très sollicitée lors d'un vol par mauvais temps. L'évaluation de la longévité en régime de contrainte variable est en principe possible si on suppose que la rupture exige une certaine énergie  $U$ .

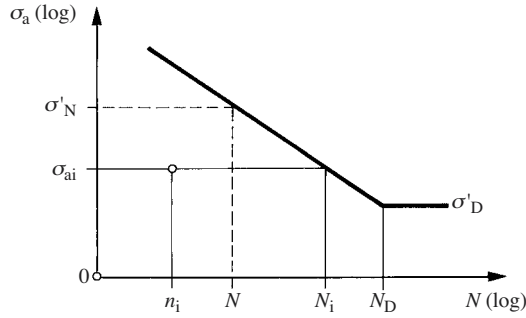


Fig. 24.55 Endommagement partiel.

Supposons que le matériau soit soumis à  $n_i$  cycles de contraintes alternées d'amplitude  $\sigma_{ai}$ , la longévité correspondante est  $N_i$  (fig. 24.55). La théorie linéaire des détériorations cumulatives de Miner [24.15] postule que la détérioration à un certain niveau de contrainte est proportionnelle au nombre de cycles effectués. Par conséquent, chaque cycle contribue à la rupture par l'énergie  $U/N_i$  et l'énergie de rupture apportée pour  $n_i$  cycles vaut

$$U_i = n_i \frac{U}{N_i}$$

Ce raisonnement peut se répéter pour  $m$  niveaux de contrainte. Selon Miner, la rupture survient lorsque

$$\sum_1^m U_i = U$$

ou, après simplification par  $U$ ,

$$\sum_1^m \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (24.90)$$

La longévité est le nombre total de cycles effectués jusqu'à la rupture :

$$L = \sum_1^m n_i \quad (24.91)$$

Dans le cas où l'amplitude des contraintes évolue de manière continue au lieu de varier par échelon, la somme (24.90) se remplace par une intégrale :

$$\int_0^L \frac{dn}{N} = 1 \quad (24.92)$$



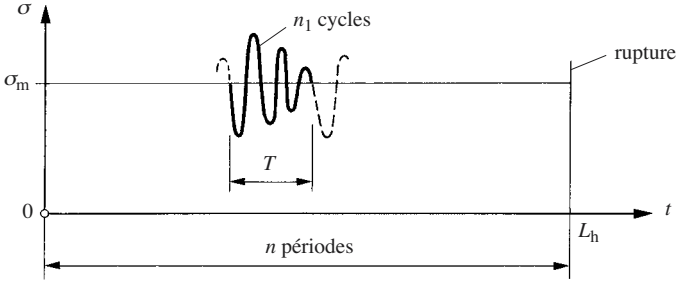


Fig. 24.56 Evolution cyclique d'une contrainte.

On connaît souvent l'évolution de la contrainte au cours du temps. Supposons qu'une machine fonctionne avec des périodes répétitives d'une durée  $T$  comprenant chacune  $n_1$  cycles (fig. 24.56). La *fraction de détérioration* subie pendant cette période vaut

$$\Phi = \int_0^{n_1} \frac{dn}{N} \quad (24.93)$$

Selon Miner, le nombre de périodes  $n$  jusqu'à rupture est tel que  $\Phi n = 1$ , d'où

$$n = \frac{1}{\Phi}$$

Il suffit maintenant d'exprimer le fait que le point de coordonnées  $[N, \sigma'_N]$  se trouve sur la courbe de Wöhler (fig. 24.55). Par (24.89), on a

$$n = N_D \frac{1}{\int_0^{n_1} \left( \frac{\sigma'_N}{\sigma'_D} \right)^a dn} \quad (24.94)$$

avec:

$N_D$	nombre de cycles à la limite de fatigue
$\sigma'_N$	limite d'endurance corrigée au niveau de contrainte de $N$ cycles
$\sigma'_D$	limite de fatigue corrigée
$a$	exposant de pente de la courbe de Wöhler
$n_1$	nombre de cycles pendant une période

La longévité temporelle est finalement:

$$L_h = T n \quad (24.95)$$

L'expérience enseigne que la théorie de Miner ne rend pas parfaitement compte de la réalité. L'équation (24.90) devrait s'écrire

$$\sum_1^m \frac{n_i}{N_i} = C \quad (24.96)$$

où  $C$  est compris entre 0,2 et 1 si la contrainte évolue en décroissant ou entre 1 et 6 si la contrainte évolue en croissant.

Il existe des théories basées sur d'autres hypothèses d'endommagement du matériau en fonction du nombre de cycles et du niveau de contrainte [24.4, 24.5, 24.7]. Mais les complications d'application ne justifient pas l'amélioration de la prédiction espérée; c'est pourquoi on préfère encore se contenter de la théorie linéaire exposée ci-dessus.

### Exemple numérique

Un acier est sollicité 1000 fois en traction alternée avec une amplitude de  $280 \text{ N/mm}^2$ . Combien de cycles peut-il encore supporter avec une amplitude de  $195 \text{ N/mm}^2$  et une probabilité de survie de 99% ( $c_a = 0,794$ ) ?

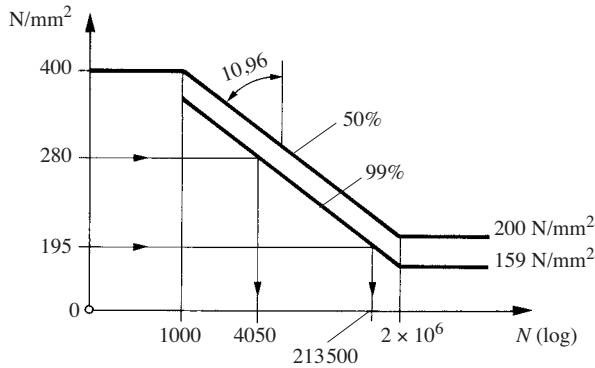


Fig. 24.57 Diagramme de Wöhler.

La limite de fatigue à 99% est  $200 \times 0,794 = 159 \text{ N/mm}^2$  (fig. 24.57). L'application de (24.89) donne la longévité pour  $280 \text{ N/mm}^2$

$$N_{99} = \frac{2 \times 10^6}{\left(\frac{280}{159}\right)^{10,96}} = 4050 \text{ cycles}$$

On trouverait 50 000 cycles à 50% de survie, la différence est considérable.

Le même calcul que ci-dessus donne, pour  $\sigma_a = 195 \text{ N/mm}^2$  et 99% de survie, une endurance de 213 500 cycles.

Ecrivons l'équation (24.96) en choisissant la valeur de la constante  $C = 0,3$ ,

$$\frac{1000}{4050} + \frac{n_{195}}{213500} = 0,3$$

On trouve  $n_{195} = 11\,330$  cycles. La longévité totale est  $n = 1000 + 11\,330 = 12\,330$  cycles.

La forte influence des paramètres prouve qu'il faut calculer la longévité avec la plus grande prudence.

### Pièces fissurées

Supposons qu'une fissure soit amorcée à l'issue du stade de germination. On veut décrire sa croissance jusqu'à la longueur limite où la rupture finale survient brusquement; soit parce que la contrainte dans la section restante atteint la limite de résistance statique du matériau, soit parce que la longueur de la fissure est égale à la longueur critique de rupture fragile (§ 23.4.1).

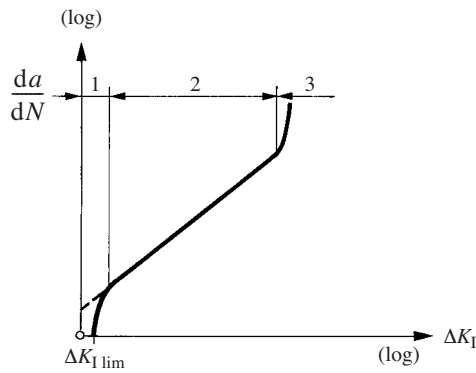


Fig. 24.58 Taux de propagation des fissures en fonction de la variation du facteur d'intensité des contraintes.

La progression d'une fissure à chaque cycle de sollicitation, ou **taux de propagation**  $da/dN$ , dépend de la variation du facteur d'intensité des contraintes et de la valeur moyenne de ce facteur (fig. 24.58). On distingue trois phases :

- *Phase 1* : au-dessous d'un seuil limite  $\Delta K_{I \text{ lim}}$ , la fissure ne progresse que très lentement, sans doute à cause de la relaxation plastique des contraintes au front de la fissure. Cette limite est en relation avec la limite de fatigue répétée  $\sigma_{D0}$ .
- *Phase 2* : la progression d'une fissure de longueur  $a$  peut s'exprimer par la loi de Paris-Erdogen :

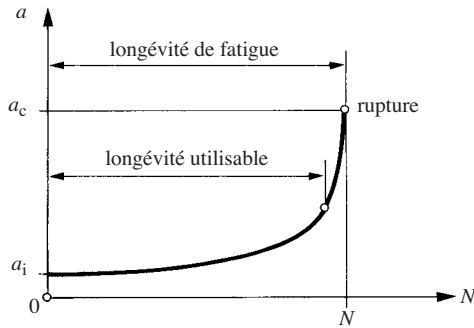
$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K_I)^n \quad (24.97)$$

où  $A$  et  $n$  sont des constantes du matériau. En reprenant la définition du facteur d'intensité des contraintes (23.5), sa variation est directement proportionnelle à la variation de la contrainte

$$\Delta K_I = f(g) \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \quad (24.98)$$

où  $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ . Rappelons que le facteur de géométrie  $f(g)$  augmente avec la longueur  $a$  de la fissure (fig. 23.16 et 23.17). Ainsi, le taux de propagation est d'autant plus grand que la fissure est plus longue (cercle vicieux).

- *Phase 3*: au-delà d'une certaine limite, la progression s'accélère rapidement. La rupture survient lorsque le facteur d'intensité de contrainte est égal à la valeur critique  $K_{Ic}$  ou lorsque la fissure atteint la longueur critique correspondante  $a_c$ .



**Fig. 24.59** Propagation d'une fissure avec une variation de contrainte constante en fonction du nombre de cycles.

La progression d'une fissure est très rapide en fin de vie (fig. 24.59) parce que sa longueur intervient directement dans  $\Delta K_I$  figurant dans la formule (24.97) et que l'exposant  $n$  est élevé ( $n = 2$  à 10 selon le matériau).

La formule (23.8) donne la longueur de fissure critique

$$a_c = \frac{1}{\pi f(g)^2} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_{\max}} \right)^2 \quad (24.99)$$

avec :

$f(g)$	facteur de géométrie
$K_{Ic}$	facteur d'intensité de contrainte critique
$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$	contrainte maximale

On calcule la longévité en intégrant (24.97) entre la longueur de fissure initiale  $a_i$  et la longueur finale  $a_c$ . Il vient

$$N = \int_{a_i}^{a_c} \frac{da}{A(\Delta K_I)^n} \quad (24.100)$$

On doit intégrer au moyen d'une méthode numérique à cause de l'influence compliquée de  $a$  sur  $\Delta K_I$ . Mais dans le cas particulier où  $\Delta\sigma = 2\sigma_a$  est constant, et en supposant que  $f(g)$  varie très peu, on trouve

$$N = \frac{1}{A \left[ f(g) 2 \sigma_a \sqrt{\pi} \right]^n (1 - n/2)} \left( a_c^{1-n/2} - a_i^{1-n/2} \right) \quad (24.101)$$

Ce calcul révèle sur quels paramètres il faut agir pour accroître la longévité de fatigue d'une pièce susceptible de présenter des défauts :

- augmenter la longueur critique de fissure en choisissant un matériau offrant une valeur  $K_{Ic}$  élevée ;
- diminuer  $\sigma_{\max}$  en vue d'accroître  $a_c$  ;
- diminuer la variation de contrainte  $\Delta\sigma$  afin de réduire la vitesse de progression de la fissure ; ce paramètre est très sensible car il intervient à la puissance  $n$  qui vaut 2,25 à 3,25 selon l'acier ;
- améliorer la qualité de la fabrication et des contrôles dans le but de diminuer la taille initiale des défauts et de prolonger la durée de germination.

L'aspect aléatoire de la longévité provient essentiellement de l'incertitude sur le seuil de démarrage de la progression des fissures.

#### 24.6.7 Méthodes numériques

Le calcul par éléments finis a pris un essor considérable. Cette méthode est puissante, elle permet de *vérifier* la résistance et les déformations de pièces aux formes compliquées. Il existe de nombreux logiciels, certains pour les structures en matériaux composites fibrés. Il convient cependant de formuler quelques réserves.

D'abord, la méthode des éléments finis s'applique bien aux calculs de vérification d'une pièce dont on possède le dessin d'exécution. Elle ne permet pas le prédimensionnement des pièces qu'il faut continuer de faire par les méthodes traditionnelles, mais certains logiciels savent optimiser la forme des pièces selon le principe d'égale résistance.

La méthode des éléments finis permet des tâtonnements relativement rapides, mais l'ingénieur doit d'emblée reconnaître les paramètres importants et connaître leur influence. Ces notions ne s'apprennent qu'au travers des formules analytiques de la mécanique des solides (résistance des matériaux) classiques.

Les résultats d'un calcul par éléments finis sont sujets à caution. Il faut une certaine expérience pour mailler correctement un volume, les mailleurs automatiques ont aussi leurs limites. On décèlera des résultats absurdes en faisant toujours impérativement un calcul préalable simple par les méthodes analytiques classiques, même s'il faut pour cela simplifier la géométrie. On est d'ailleurs souvent surpris qu'une étude préliminaire avec de bonnes hypothèses donne en quelques heures des résultats très proches de ce que fournissent les éléments finis après des semaines de travail. Enfin, il est prudent de mesurer les déformations, soit en laboratoire, soit sur la machine en service, et de ne pas faire aveuglément confiance aux calculs, aussi sophistiqués soient-ils.

#### 24.6.8 Matériaux non métalliques

Le dimensionnement de pièces en matériaux non métalliques repose sur les mêmes principes que pour les métaux. Il faut cependant tenir compte de leurs spéci-

ficités (§ 23.7.1) pour concevoir et calculer les éléments de machines. Le détail de ces questions sort du cadre de cet ouvrage, nous nous limitons à attirer l'attention sur quelques particularités.

## Polymères

Les polymères thermoplastiques présentent un comportement de traction statique non linéaire ; voir par exemple la figure 6.4 pour un polyamide. Ils n'ont souvent qu'un très petit domaine élastique, ou même pas du tout. On doit donc souvent admettre que les éléments de machines en polymère fonctionnent dans le domaine plastique ; mais on accepte, dans les calculs rapides, de les dimensionner comme si la loi de Hooke était quand même valable.

Les thermoplastiques sont en gros dix fois moins résistants que les métaux et cent fois plus déformables. C'est pourquoi la défaillance de pièces résulte plus souvent de déformations exagérées que de leur rupture. On vérifiera donc attentivement la compatibilité de la déformation avec les exigences fonctionnelles. Le fluage joue souvent un rôle déterminant, notamment dans la relaxation des contraintes des assemblages qui perdent progressivement leur fermeté.

Les polymères sont plus résistants en compression qu'en traction. On apprécie leur limite de rupture et de fluage par une théorie de rupture basée sur l'énergie de distorsion mais adaptée à ces propriétés dissymétriques.

Le calcul de résistance est encore incertain parce que l'hypothèse d'isotropie de la mécanique des solides élémentaire n'est pas remplie. En effet, des contraintes résiduelles internes consécutives à la fabrication (refroidissement inhomogène et/ou maintien sous pression de la pièces après injection, incorporation d'inserts) se superposent de manière non linéaire aux sollicitations de service. Les contraintes résiduelles peuvent progressivement se relaxer en déformant la pièce.

La résistance à la fatigue des pièces en polymère est difficile à évaluer uniquement sur la base d'essais d'éprouvettes. Les concentrations de contraintes se manifestent de manière contrastée à cause du comportement élastoplastique. Une grande prudence est de mise et des essais en condition d'emploi sont de rigueur pour les pièces importantes.

Compte tenu de la grande sensibilité des polymères à la chaleur, on commence toujours par évaluer la température de service puis on en déduit les caractéristiques nécessaires pour le dimensionnement. Les organes dans lesquels de la chaleur est générée par frottement se calculent par des méthodes semi-empiriques ; voir, par exemple, [24.16].

## Engrenages

Les critères de dimensionnement sont :

- la résistance des dents,
- la résistance des flancs à la pression hertzienne,
- la déformation des dents.

Le grippage typique des engrenages en acier ne s'observe pas avec les polymères. C'est pourquoi le calcul de la température de surface selon Block (§ 19.6.5) est inutile.

La puissance transmissible par les engrenages en polymère est faible.

## Paliers

Les paliers lisses avec coussinet en polymère se prêtent bien à une marche à sec s'ils sont peu chargés. Leurs critères de dimensionnement sont :

- La température maximale de surface doit être inférieure à la température de fusion du coussinet, elle intervient dans l'appréciation de l'usure.
- La résistance statique à la pression effective de contact. On tiendra compte du jeu et de l'écrasement du coussinet.
- La déformation statique du coussinet calculée en tenant compte du fluage.
- L'usure admissible est limitée par des considérations d'aptitude au service. L'usure s'évalue empiriquement, le coefficient d'usure augmente fortement avec la rugosité de l'arbre.

### Matériaux composites fibrés

Dans les cas très simples, on peut calculer les contraintes et les déformations sur la base de caractéristiques moyennes du matériau obtenues en appliquant des règles de mélange. Mais il est plus sûr d'utiliser un logiciel spécial pour matériaux fibrés qui tient compte de la mécanique interne exacte des stratifiés. Enumérons quelques particularités de ces matériaux :

- Ils vieillissent à la lumière et l'humidité abaisse leur résistance.
- Ils gonflent s'ils absorbent de l'eau.
- La multiplication de cycles thermiques provoque des microfissures qui compromettent leur résistance.
- La rupture de quelques fibres ne conduit pas immédiatement à la rupture. La résistance baisse progressivement, une rupture statique n'a pas un caractère fragile.
- Les fibres de carbone ne se fatiguent pas en soi, mais des fissures surviennent dans les matrices en polymères et à la liaison avec les fibres. Le développement des fissures est nettement plus lent que dans les métaux. Les défaillances de fatigue ne sont normalement pas brutales parce que les fibres s'opposent à la propagation rapide des fissures.
- Un concentrateur de contrainte affaiblit toute pièce vis-à-vis d'une rupture statique à cause de la faible plasticité des fibres. En revanche, l'effet est moins marqué en fatigue que pour les métaux.
- Le critère de rupture de Tsai-Hill paraît faire ses preuves [24.17 et 24.18].
- La mécanique de la rupture mise au point pour les métaux n'est pas transposable aux matériaux composites à cause de leur inhomogénéité naturelle.

## 24.7 TAILLE ET PROPORTION

### 24.7.1 Principe d'égale résistance

On a toujours intérêt à diminuer la masse et le coût des machines. Aussi faut-il éviter tout surdimensionnement inutile. Le principe d'égale résistance veut que le facteur de sécurité vis-à-vis de la ruine ait partout la même valeur, toutes les sections étant également dangereuses.

#### Pièces d'égale résistance

Considérons l'axe d'une grande poulie avec une charge radiale  $F$  au milieu de la portée (fig. 24.60). Dans une section située entre le palier gauche et le centre règne le moment de flexion

$$M = \frac{F}{2} x$$

En admettant que la contrainte de flexion soit égale à la valeur admissible  $R_{\text{lim}}/S$ , le diamètre de l'axe vaut

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 S}{\pi R_{\text{lim}}} F x} \quad (24.102)$$

L'axe d'égale résistance est un paraboloïde cubique de révolution. La figure montre comment on approchait autrefois la forme théorique par des cônes et par des cylindres de divers diamètres. Mais la fabrication de pièces profilées d'égale résistance par les machines à commandes numériques est aujourd'hui facile et bon marché.

Les ressorts à lame modernes sont aussi d'égale résistance pour emmagasiner le plus d'énergie possible par unité de masse (§ 12.4.2).

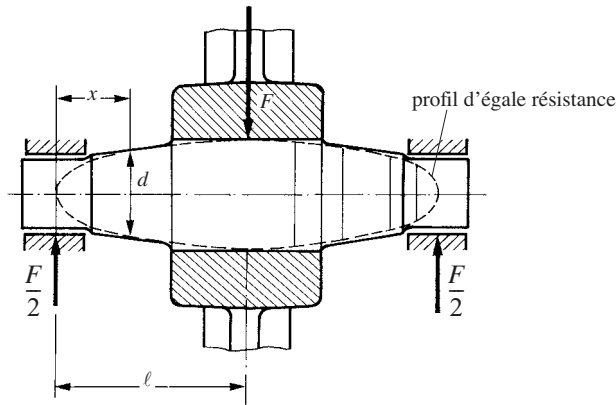


Fig. 24.60 Axe profilé.

### Modes de ruine multiples simultanés

Les exemples ci-dessus concernent des pièces n'ayant qu'un seul mode de rupture, mais on rencontre des organes exposés à plusieurs modes de ruine. Il est avantageux que tous les modes de ruine surviennent simultanément afin d'éviter un surdimensionnement inutile.

#### Voilement de tubes en torsion

Un exemple simple est fourni par un tube cylindrique sollicité en torsion. Sa contrainte de torsion ne doit pas dépasser une certaine valeur admissible et, s'il est à paroi mince, il ne doit pas voiler.

Calculons la contrainte de torsion :

$$\tau_t = \frac{16 D M_t}{\pi (D^4 - d^4)} \approx \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{D^3 e/D} \quad (24.103)$$

avec :

$D$  diamètre extérieur  
 $d$  diamètre intérieur



$e$  épaisseur de paroi ( $e \ll D$ )  
 $M_t$  moment de torsion

La contrainte critique de voilement d'un tube parfait est donnée par la formule :

$$\tau_{tc} = 1,256 E \frac{(e/D)^{5/4}}{(\ell/D)^{1/2}} \quad (21.24)$$

où l'on a encore :

$E$  module d'élasticité  
 $\ell$  longueur du tube

Le matériau est utilisé au mieux et le tube est le plus léger lorsque la contrainte de torsion effective est égale à la contrainte admissible de voilement. En multipliant la contrainte critique par 0,7 pour tenir compte des écarts de circularité et avec un facteur de sécurité au voilement  $S$ , cette condition s'écrit :

$$\tau_t = \frac{0,7}{S} \tau_{tc}$$

Introduisons les expressions des contraintes, on obtient une équation dont on tire l'épaisseur. En portant ensuite cette valeur dans (24.103), on a une nouvelle équation qui fournit le diamètre du tube optimal pour la contrainte de torsion admissible  $\tau_{t \text{ adm}}$ . On trouve finalement

$$D_{\text{opt}} = \frac{0,808}{S^{4/13}} \frac{E^{4/13}}{\tau_{t \text{ adm}}^{9/13}} \frac{M_t^{5/13}}{\ell^{2/13}} \quad (24.104)$$

En portant maintenant cette valeur dans l'expression de l'épaisseur, on obtient :

$$e_{\text{opt}} = 0,975 S^{8/13} \frac{\tau_{t \text{ adm}}^{5/13}}{E^{8/13}} \ell^{4/13} M_t^{3/13} \quad (24.105)$$

#### Exemple numérique

$$\begin{aligned} M_t &= 400 \text{ Nm} & \tau_{t \text{ adm}} &= 35 \text{ N/mm}^2 \\ \ell &= 3,2 \text{ m} & E &= 200\,000 \text{ N/mm}^2 \\ S &= 3 \end{aligned}$$

On trouve :  $D = 86,7 \text{ mm}$  et  $e = 0,967 \text{ mm}$ .

On choisirait finalement un tube de 85 mm de diamètre extérieur et 1 mm d'épaisseur de paroi. On remarque que le tube est très mince.

#### Tube comprimé

Un tube cylindrique comprimé par une force axiale est le plus léger lorsque son diamètre et son épaisseur sont tels qu'il flambe et voile pour la même charge axiale. Ce problème a été traité au paragraphe 21.3.3.

### Assemblages filetés

Les modes de rupture d'un ensemble vis-écrou sont :

- rupture par traction de la vis au fond d'un filet;
- arrachage par cisaillement du filet de la vis;
- arrachage par cisaillement du filet de l'écrou.

On peut choisir pour l'écrou un matériau dont la résistance est légèrement inférieure à celle de la vis, car l'aire offerte par le filet de l'écrou au cisaillement est supérieure à celle du filet de la vis.

Un des filets est arraché si la vis est peu engagée dans l'écrou; en revanche, la vis casse avant que le filet ne cède si elle est vissée profondément. La longueur de vissage est optimale lorsque la rupture de la vis et le cisaillement du filet le moins résistant surviennent pour la même force de traction. Le rapport de la longueur engagée optimale au diamètre de la vis vaut :

- vis et écrou en acier de résistances adaptées: 0,7 à 0,9
- vis en acier, écrou en alliage léger: 1,2 à 1,5

### Coques de sous-marins

La coque d'un sous-marin se détruit par rupture du bordé, voilement du bordé entre les couples, flambage d'ensemble de la coque ou flambage d'un couple (fig. 24.61). Le dimensionnement conduit au poids de coque minimal si tous les modes de ruine étaient atteints pour la même immersion. Ce problème a été abordé au paragraphe 23.7.6 en rapport avec le choix du matériau de la coque.

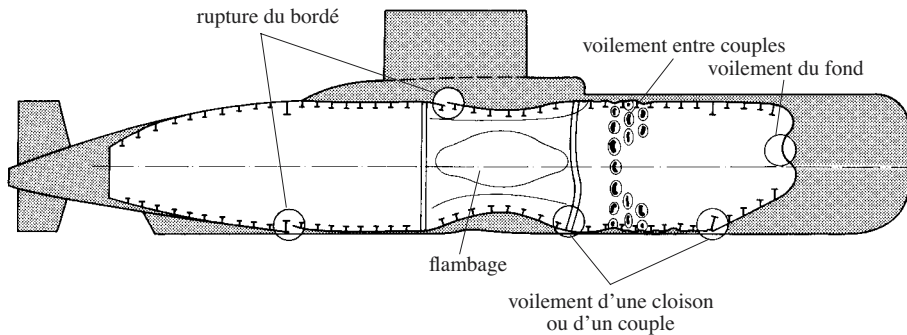


Fig. 24.61 Les modes de ruine d'une coque de sous-marin.

### Egale résistance des machines

On évite qu'une pièce soit nettement plus faible que toutes les autres, car elle compromet à elle seule la robustesse et la fiabilité de l'ensemble. *Une construction est équilibrée lorsque toutes les pièces remplissent leurs fonctions avec des facteurs de sécurité de valeurs voisines.*

Dans l'exemple du sous-marin ci-dessus, il faudrait que les robinets de coque et la tuyauterie résistent à la même immersion que la coque pour satisfaire le principe d'égalité de résistance. Mais il serait ridicule qu'un sous-marin se perde à cause de la rupture d'un simple tube, c'est pourquoi on dimensionne ces accessoires pour une pres-

sion de rupture supérieure à la pression de ruine de la coque afin d'accroître la fiabilité et la sûreté du bâtiment.

### Equilongévité

Du principe d'égalité de résistance dérive celui d'équilongévité. Il consiste à dimensionner une machine de telle façon que les organes dont l'aptitude au service est limitée par des détériorations de surface (usure) ou par de la fatigue aient approximativement tous la longévité nominale souhaitée. L'exploitation est facilitée.

#### 24.7.2 Taille des éléments de machines

Pour faciliter la conception d'un mécanisme, il est utile de savoir comment l'effort transmis par un élément de machine influence sa taille. Voici quelques exemples courants,  $B$  étant chaque fois un coefficient spécifique.

##### Arbres

Un arbre plein de diamètre  $d$  qui transmet le couple pur  $M_t$  subit la contrainte de torsion

$$\tau_t = \frac{16 M_t}{\pi d^3}$$

En cas de fatigue alternée avec un concentrateur de contraintes dont le facteur d'entaille en torsion vaut  $K_{ft}$ , on a l'inégalité de sécurité structurale :

$$K_{ft} \tau_t \leq \frac{\sigma'_D}{S\sqrt{3}}$$

La combinaison de ces deux équations fournit le diamètre de l'arbre :

$$d \geq d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{16\sqrt{3}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{K_{ft} S}{\sigma'_D}} M_t^1}^3 = B M_t^{1/3} \quad (24.106)$$

On obtient une relation analogue pour le dimensionnement à la résistance vis-à-vis d'une force radiale.

##### Engrenages cylindriques

Le diamètre primitif d'un pignon calculé sur la base de la résistance à la flexion de ses dents vaut

$$d_l \geq d_{lF} = 1,64 \sqrt[3]{\frac{z_1}{\psi_d} \frac{S_F}{\sigma_{F \lim}}} M_l^1}^3 = B_{lF} M_l^{1/3} \quad (24.107)$$

avec :

$z_1$  nombre de dents du pignon

$\psi_d = \frac{b}{d_1}$	largeur de la denture relative au diamètre
$\sigma_{F \text{ lim}}$	contrainte de flexion limite
$S_F$	facteur de sécurité à la flexion
$M_1$	couple au pignon

En dimensionnant l'engrenage sur la base de la pression de contact, on a

$$d_1 \geq d_{1H} = 1,84 \sqrt[3]{\frac{Z_E^2}{\psi_d} \frac{u+1}{u} \frac{S_H^2}{\sigma_{H \text{ lim}}^2} M_1^1}^3 = B_{1H} M_1^{1/3} \quad (24.108)$$

avec encore :

$Z_E$	facteur de matériau
$u = \frac{z_2}{z_1}$	rapport d'engrenage ( $z_2 < 0$ pour une denture intérieure)
$\sigma_{H \text{ lim}}$	pression hertzienne limite
$S_H$	facteur de sécurité à la pression hertzienne

Le diamètre effectif doit satisfaire les deux formules.

### Vis sans fin

Le diamètre de la vis vaut :

$$d_v \geq B M_v^{1/3} \quad (24.109)$$

où  $M_v$  est le couple à la vis.

### Accouplements élastiques

Selon les catalogues, le diamètre extérieur des accouplements suit approximativement la loi

$$D \approx B M_t^{1/3} \quad (24.110)$$

où  $M_t$  est le couple nominal transmissible.

### Embrayages multidisques

Le diamètre extérieur, selon un catalogue, peut s'écrire sous la forme

$$D \approx B M_E^{1/3,6} \quad (24.111)$$

où  $M_E$  est le couple d'embrayage.

**Courroies dentées**

Le pas de la denture vaut :

$$p \geq B \left( \frac{M_1}{\psi_p} \right)^{\frac{1}{3 \cdot 3,9}} \quad (24.112)$$

avec :

$B$  coefficient dépendant du nombre de dents du pignon, de la structure de la courroie et de ses matériaux

$\psi_p = \frac{b}{p}$  largeur de la courroie relative au pas

$M_1$  couple au pignon

**Chaînes à rouleaux**

Le pas d'une chaîne vaut :

$$p \geq B \left( \frac{M_1}{n^{0,83}} \right)^{1/3} \quad (24.113)$$

avec :

$n = 1, 2, 3$  selon que la chaîne est simple, double ou triple

$M_1$  couple au pignon

**Roulements**

Les catalogues donnent la formule suivante pour calculer la longévité d'un roulement exprimée en heures :

$$L_h = a_1 a_{23} \frac{10^6}{60 n} \left( \frac{C}{F_e} \right)^p \quad (24.114)$$

Introduisons la vitesse de l'arbre

$$n = \frac{30 \omega}{\pi}$$

et la capacité dynamique de base sous la forme

$$C = c d^m \quad (24.115)$$

On obtient une équation qui fournit l'alésage nécessaire d'un roulement pour une vitesse, une charge et une longévité donnée :

$$d = \left( \frac{\omega L_h}{1745 a_1 a_{23} f_T} \right)^{1/\text{mp}} \left( \frac{F_e}{c} \right)^{1/m} \quad (24.116)$$

avec :

$F_c$	charge équivalente calculée selon les catalogues
$L_h$	longévité en heures de service
$a_1$	facteur de fiabilité
$a_{23}$	facteur pour le matériau et les conditions de fonctionnement
$c$	coefficient dépendant du type et du modèle de roulement
$f_T$	facteur de température
$m$	exposant d'alésage
$p$	exposant de durée de vie
$\omega$	vitesse angulaire

Le tableau 24.62 donne les valeurs des exposants  $m$  et  $p$  des roulements.

**Tableau 24.62** Exposants caractéristiques des roulements.

Type de roulement	$p$	$m$
roulements à billes à gorges profondes	3	1,5
roulements à galets cylindriques	10/3	1,5
roulements à rouleaux coniques	10/3	1,3
roulements à rotule	10/3	1,3
butées à billes	3	1,1

### Vis d'assemblage

Le diamètre d'une vis d'assemblage sollicitée par une force transversale ou par une force axiale vaut :

$$d \geq BF^{1/2} \quad (24.117)$$

### Moyeux frettés, emmanchements coniques, clavettes

L'alésage nécessaire pour transmettre un couple  $M$  est :

$$d = \left( \frac{d}{\ell} \right)^{1/3} BM^{1/3} \quad (24.118)$$

avec :

$$\frac{\ell}{d} \quad \text{longueur relative du moyeu}$$

### Conclusion

L'analyse de ces lois et l'étude d'autres organes permettent d'écrire d'une manière générale la relation entre la taille  $x$  caractéristique d'un organe et l'effort  $Q$  qui le sollicite sous la forme

$$x = BQ^\alpha \quad (24.119)$$

ou

$$Q = \left(\frac{x}{B}\right)^\beta$$

(24.120)

Les valeurs de  $B$ , de  $\alpha$  et de  $\beta$  dépendent de l'organe considéré, de son mode de ruine et de son matériau; mais  $\beta = 1/\alpha$ . Le tableau 24.63 résume les valeurs des exposants.

**Tableau 24.63** Exposants des relations entre taille et effort.

Eléments	Lois: Exposants:	$x \sim Q^\alpha$ $\alpha$	$Q \sim x^\beta$ $\beta$
arbres, engrenages, accouplements		1/3	3
pas des chaînes, moyeux		1/3	3
roulements à billes à gorges profondes		1/1,5	1,5
roulements à galets cylindriques		1/1,5	1,5
roulements à galets coniques ou à rotule		1/1,3	1,3
courroies dentées		1/(3 à 3,9)	3 à 3,9
embrayages multidisques		1/3,6	3,6
vis de mouvement		1/2	2
vis d'assemblage		1/2	2
poutres, dimension $x$ d'une section de forme invariable			
sollicitée en:			
– traction, cisaillement		1/2	2
– flexion, torsion		1/3	3

24.7.3 Proportions entre organes

Généralités

Supposons qu'un organe (1) soit chargé par un effort  $Q_1$ . Selon le paragraphe précédent, sa dimension  $x_1$  peut se calculer par une formule du type

$$x_1 = B_1 Q_1^{\alpha_1}$$

De même, pour un organe (2) du même mécanisme

$$x_2 = B_2 Q_2^{\alpha_2}$$

Les efforts sont liés par une relation linéaire

$$Q_2 = i_Q Q_1$$

où  $i_Q$  est le rapport d'efforts.

La dimension du second organe par rapport au premier, c'est-à-dire la proportion géométrique entre les deux, s'écrit

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{B_2}{B_1} i_Q^{\alpha_2} Q_1^{\alpha_2 - \alpha_1}$$

(24.121)

Les facteurs  $B_1$  et  $B_2$  dépendent notamment de la résistance du matériau des pièces.

Cette formule montre que :

- la proportion est indépendante de l'effort si  $\alpha_1 = \alpha_2$  ;
- la proportion dépend uniquement de la résistance des matériaux et du rapport d'efforts.

En examinant les formules données dans le paragraphe 24.7.2, on constate que ces conclusions s'appliquent pratiquement à tous les organes de transmission et aux liaisons arbre-moyeu.

Il résulte du principe d'égalité de résistance que les proportions géométriques des éléments de machines sont fixées par des lois physiques et échappent partiellement à la fantaisie du projeteur. C'est pourquoi, par exemple, un réducteur à engrenages transmettant une puissance de 1 kW est semblable à un appareil transmettant 100 kW avec le même rapport de transmission. Il existe donc des *proportions harmonieuses* des organes de machines, dont il se dégage une esthétique mécanique qui permet à des gens expérimentés de construire sans faire beaucoup de calculs et de déceler souvent du premier coup d'œil le point faible d'une machine. Cela explique aussi pourquoi l'allure générale d'une machine est internationale et n'a rien à voir avec le sens artistique du peuple qui l'a fabriquée. Nous devons toutefois mettre en garde contre l'attitude de certains constructeurs qui ne veulent se fier qu'au « pifomètre » et qui jugent superflu tout calcul un tant soit peu détaillé.

Voici quelques exemples.

### Clavette plate

Examinons la liaison d'un moyeu et d'un arbre par une clavette plate normalisée. La longueur utile de la clavette est donnée par la formule :

$$\ell_1 \geq \frac{2M}{d(h - t_1)p_{adm}} \quad (24.64)$$

Les paramètres géométriques sont visibles dans la figure 24.42.

Calculons la longueur relative au diamètre de l'arbre ; avec un changement d'écriture, on obtient :

$$\frac{\ell_1}{d} \geq \frac{2M}{d^3 p_{adm}} \frac{d}{h - t_1}$$

Introduisons le diamètre de l'arbre donné par la formule de prédimensionnement (24.62). Il vient

$$\frac{\ell_1}{d} \geq \psi \frac{\tau_{t pd}}{p_{adm}} \quad (24.122)$$

avec le facteur de proportion

$$\psi = \frac{\pi}{8} \frac{d}{h - t_1} \quad (24.123)$$



donné par la figure 24.62 pour des clavettes plates normalisées. La longueur relative augmente avec le diamètre de l'arbre; elle dépend du rapport de la résistance de prédimensionnement de l'arbre à la pression admissible de la clavette dans le moyeu. En supposant que l'arbre soit sollicité simultanément en flexion et par un couple pulsé, on a le rapport  $\ell_1/d$  pour diverses combinaisons de matériaux et avec  $y = 3$  à 7 :

Moyeu $p_{adm}$		GG 40 60 N/mm <sup>2</sup>	Ac 60.2 110 N/mm <sup>2</sup>
Arbre	$\tau_{tpd}$	$\ell_1/d$	$\ell_1/d$
Ac 50.2	15 N/mm <sup>2</sup>	0,75 à 1,75	0,4 à 0,95
18 Cr Ni 8	42 N/mm <sup>2</sup>	2,1 à 4,9	1,15 à 2,7

Cet exemple montre clairement que la proportion usuelle des moyeux s'accorde parfaitement avec la longueur de la clavette pour autant qu'on n'associe pas des matériaux disparates. A un arbre de haute qualité doit correspondre un moyeu suffisamment résistant. En règle générale, une bonne construction implique d'associer des matériaux de classes de qualité voisines. Les moyeux clavetés sur de gros arbres doivent être relativement plus longs que sur de petits arbres.

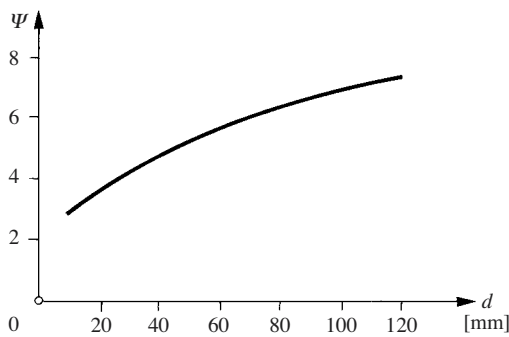


Fig. 24.62 Facteur de proportion de clavettes plates.

Engrenages

Le diamètre d'un pignon est donné soit par la formule (24.107), soit par (24.108). Supposons que la résistance à la flexion des dents soit déterminante; calculons le rapport du diamètre du pignon à celui de l'arbre donné par (24.106). En admettant la même valeur du facteur de sécurité pour l'arbre et pour le pignon, on trouve :

$$\frac{d_{1F}}{d_{a1}} = 0,794 \sqrt[3]{\frac{z_1}{\psi_d} \frac{\sigma'_b}{K_{ft} \sigma_{F \lim}} \frac{1}{b_f}} \tag{24.124}$$

Le facteur de correction  $b_f > 1$  tient compte du fait que l'arbre est aussi sollicité en flexion et non seulement en torsion comme dans la formule (24.106). On note que le rapport des diamètres est indépendant du couple, le rapport des résistances des matériaux est constant si l'arbre et le pignon sont taillés dans la masse.

### Paliers à roulement d'un engrenage

La force radiale appliquée à un roulement portant l'arbre du pignon d'un engrenage vaut

$$F_r \approx \zeta \frac{2 M_1}{d_1 \cos \alpha_n} \quad (24.125)$$

avec :

$M_1$	couple au pignon
$d_1$	diamètre primitif du pignon
$\alpha_n$	angle de pression normal (on néglige l'effet de l'angle d'hélice)
$\zeta$	facteur de distribution de la force apparente de denture sur le palier

En exprimant le diamètre primitif par (24.107) ou par (24.108), on peut écrire :

$$F_r = B_1 M_1^{2/3}$$

L'alésage du roulement nécessaire se calcule par (24.116). En supposant que la charge équivalente soit égale à la force radiale, c'est-à-dire que l'éventuelle charge axiale soit transmise par un autre roulement, on trouve

$$d = \left( \frac{\omega L_h}{1745 a_1 a_{23} f_T} \right)^{1/mp} \left( \frac{B_1}{c} \right)^{1/m} M_1^{2/3m} \quad (24.126)$$

Le diamètre de l'arbre est donné par (24.106). Comparons l'alésage du roulement au diamètre de l'arbre en écrivant le rapport

$$\frac{d}{d_a} = \left( \frac{\omega_1 L_h}{1745 a_1 a_{23} f_T} \right)^{1/mp} \left( \frac{B_1}{c} \right)^{1/m} \frac{1}{B} M_1^{2/3m - 1/3} \quad (24.127)$$

Dans le cas d'un roulement à billes à gorges profondes, on a  $m = 1,5$  et  $p = 3$  (tab. 24.62), alors

$$\frac{d}{d_a} \sim \omega_1^{0,222} M_1^{0,111}$$

Ce résultat signifie qu'à longévité égale, l'alésage du roulement nécessaire pour transmettre au bâti la force radiale d'un organe de transmission croît plus vite que le diamètre de l'arbre avec le couple transmis ; il augmente aussi avec la vitesse de l'arbre.

L'alésage d'un roulement est normalement voisin du diamètre de résistance de l'arbre,  $d \approx d_a$ . L'équation (24.127) fournit alors la longévité du roulement :

$$L_h = a_1 a_{23} f_T \frac{1745}{\omega_1} \left( \frac{c}{B_1} \right)^p B^{mp} M_1^{-(2-m)p/3} \quad (24.128)$$

En exprimant le couple par le rapport de la puissance  $P$  à la vitesse, on obtient aussi

$$L_h = a_1 a_{23} f_T 1745 \left( \frac{c}{B_1} \right)^p B^{mp} \omega_1^{(2-m)p/3-1} P^{-(2-m)p/3} \quad (24.129)$$

Pour un roulement à billes, on trouve :

$$L_h \sim \omega_1^{-1} M_1^{-0,5} \quad (24.130)$$

et

$$L_h \sim \omega_1^{-0,5} P^{-0,5} \quad (24.131)$$

Ces relations permettent de tirer les conclusions suivantes, valables pour un arbre portant un pignon d'engrenage ou un pignon de chaîne :

- pour une longévité donnée, l'alésage requis d'un roulement augmente plus vite que le diamètre de l'arbre avec le couple, il augmente aussi avec la vitesse ;
- la longévité des roulements diminue lorsque le couple de dimensionnement de l'arbre qui les porte augmente et lorsque la vitesse croît.

Ces lois expliquent pourquoi on est obligé de recourir à des paliers lisses dans les gros réducteurs rapides, car il n'existe alors aucun roulement qui offre une longévité suffisante. Ces conclusions se retrouvent partiellement dans la figure 2.53. Elles sont aussi valables pour d'autres organes de transmission.

#### 24.7.4 Adaptation des matériaux

On rencontre des cas où la taille d'un organe est définie par des considérations purement constructives. Il est alors judicieux de choisir un matériau bon marché juste suffisant pour résister aux charges.

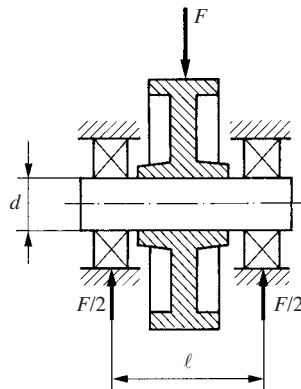


Fig. 24.63 Axe monté sur roulements avec une charge radiale.

Par exemple, un axe portant un galet ou une roue dentée (fig. 24.63) est chargé par une force radiale  $F$ . Il tourne sur deux roulements dont chacun transmet la charge  $F/2$  si la force est située au milieu de la portée. Le type des roulements étant choisi, leur taille dépend de la charge et de la longévité souhaitées. L'alésage des roulements se calcule par la formule (24.116) que l'on réécrit sous une forme abrégée avec  $F_c = F/2$  :

$$d = \left( f_1 \frac{F}{2c} \right)^{1/m} \quad (24.132)$$

où

$$f_1 = \left( \frac{\omega L_h}{1745 a_1 a_{23} f_T} \right)^{1/p} \quad (24.133)$$

Voir (24.116) pour la signification des symboles.

Par ailleurs, la contrainte de flexion maximale de l'axe vaut

$$\sigma = \frac{8F\ell}{\pi d^3} \quad (24.134)$$

La portée de l'axe est habituellement dans un rapport  $\ell/d$  approximativement constant avec le diamètre. Le diamètre de l'axe étant égal à l'alésage du roulement, on obtient

$$\sigma = \frac{8}{\pi} \frac{\ell}{d} \left( \frac{2c}{f_1} \right)^{\frac{2}{m}} F^{1-2/m} \quad (24.135)$$

Selon le type de roulement, l'exposant  $m$  varie entre 1,3 et 1,5. La contrainte évolue alors avec la charge selon  $F^{-0,33}$  à  $F^{-0,54}$ ; c'est-à-dire qu'elle est d'autant plus petite que la charge est plus forte parce que la taille des roulements croît plus vite que ce qui serait nécessaire pour la résistance de l'axe. On choisit finalement un matériau dont la résistance offre une sécurité juste suffisante, d'autant plus forte que la charge est plus faible. Ce résultat est de prime abord paradoxal.

### Application numérique

On a choisi des roulements à rotule sur deux rangées de rouleaux. L'axe tourne à 15 t/min et on attend une longévité de l'ordre de 14 000 heures. La capacité de charge nécessaire se tire de l'équation (24.116) dans lequel nous posons  $a_1 a_{23} = 1$ . Comparons deux cas de charge :

• charge, $F$	25	250	kN
• capacité de charge dynamique théorique nécessaire, $C$	53,4	534	kN
• désignation des roulements	22 206	23 124	
• capacité de charge selon catalogue, $C$	57	530	kN
• alésage, $d$	30	120	mm

• portée de l'axe, $\ell$	80	300	mm
• contrainte effective (24.135), $\sigma$	189	111	N/mm <sup>2</sup>
• acier de l'axe	34 Cr 4	Ac. 60	
• limite de fatigue en flexion, $\sigma_{fD}$	360	280	N/mm <sup>2</sup>
• facteur d'échelle, $c_e$ (fig. 23.38)	0,83	0,6	
• facteur de sécurité, $S = c_e \sigma_{fD} / \sigma$	1,58	1,51	

On constate bel et bien que la résistance requise pour l'acier du gros axe est plus petite que celle nécessaire pour le petit. Cette étude prouve qu'il faut harmoniser les matériaux avec la construction.

Le choix des matériaux d'un engrenage est un autre exemple intéressant. Il est notamment inutile de choisir des matériaux à haute résistance et de traiter les dents si un grand entraxe imposé par la construction ne l'exige pas (§ 26.6.3).

### 24.8 CONCLUSIONS PRINCIPALES

Le dimensionnement des éléments et organes de machines a pour but d'assurer leur aptitude au service et la sécurité structurale voulue. Les critères de dimensionnement s'expriment mathématiquement par des relations de sécurité.

Le dimensionnement s'effectue en principe en cinq étapes :

- le prédimensionnement qui donne rapidement la dimension inconnue grâce à des calculs simplifiés ;
- le choix de la dimension sur la base de considérations pratiques et constructives ;
- le calcul de vérification détaillé du facteur de sécurité ;
- l'analyse critique des résultats ;
- les corrections éventuelles.

La démarche est itérative.

La théorie applicable pour calculer la sécurité structurale d'un élément dépend de la dynamique des actions et du comportement du matériau. La sollicitation en fatigue est la plus fréquente.

La sécurité structurale s'apprécie en confrontant la contrainte effective à la résistance du matériau déterminée habituellement sur la base d'essais de traction. Un état de contrainte biaxial ou triaxial se ramène à une contrainte axiale, dite de comparaison, permettant de prévoir le comportement du matériau seulement sur la base des essais de traction. Le calcul de la contrainte de comparaison repose sur diverses hypothèses de rupture. On préconise l'emploi des théories de ruptures suivantes pour calculer la contrainte de comparaison :

- théorie du plus grand travail de distorsion (Von Mises-Hencky) pour la transition élastique-plastique et pour les calculs à la fatigue ;
- théorie de Mohr basée sur la contrainte de cisaillement maximale pour la rupture statique ;
- cas particulier de la théorie de Mohr, la théorie de la contrainte de cisaillement maximale (Tresca) pour la rupture de matériaux ductiles.

Les discontinuités géométriques provoquent des concentrations de contrainte. Les pointes de tensions sont dangereuses pour les matériaux fragiles ; en revanche, la

plastification locale des matériaux ductiles dans les concentrateurs de contraintes limite les contraintes mais écrouit le matériau. La contrainte maximale dans le domaine élastique se détermine à l'aide du facteur de concentration de contraintes théorique. Sa valeur peut se calculer par la théories de l'élasticité, on la mesure aussi expérimentalement.

Les concentrations des contraintes abaissent sensiblement la résistance à la fatigue des pièces, on en tient compte par le facteur d'entaille. Il existe plusieurs théories pour évaluer l'influence des entailles à partir du facteur de concentration de contraintes. Il faut éviter les entailles ou, si elles sont vraiment nécessaires, pour le moins en adoucir le profil. On améliore la résistance à la fatigue en durcissant et en polissant les surfaces.

On juge la sécurité structurale par le facteur de sécurité. La valeur de cette grandeur aléatoire est en étroite relation avec la probabilité de ruine. On distingue deux sortes de facteur de sécurité :

- le facteur de sécurité structurale, rapport d'une limite de résistance ultime à la contrainte de comparaison effective locale ;
- le facteur de sécurité de surcharge extérieure, rapport de l'effort utile ultime à l'effort utile effectif.

La contrainte locale dépend de l'effort utile exercé, mais comprend souvent aussi une composante constante de poids propre ou de précontrainte. Le facteur de sécurité structurale est alors inférieur au facteur de sécurité de surcharge extérieure.

Le prédimensionnement doit être rapide. Il s'effectue par les méthodes suivantes :

- La méthode directe donne la dimension cherchée par des calculs élémentaires qui anticipent les effets négligés à l'aide de facteurs de correction.
- La méthode indirecte s'applique lorsque l'action sur une pièce dépend de la taille de la pièce (cercle vicieux). On choisit arbitrairement la dimension cherchée pour dessiner le mécanisme ou on procède à un dimensionnement direct avec des valeurs de résistance assez basses pour anticiper certains effets, puis on vérifie la sécurité.
- La taille de l'organe se choisit dans un catalogue.

Le calcul de vérification sert à s'assurer de l'aptitude au service et de la sécurité structurale. Il convient de chercher soigneusement la section dangereuse. La vérification à la fatigue s'opère facilement dans un diagramme de Haigh où interviennent séparément la contrainte de comparaison moyenne statique et la contrainte de comparaison alternée. La première se calcule avec les facteurs de concentration de contraintes, la seconde avec les facteurs d'entaille.

Les calculs de dimensionnement effectués sur la base du facteur d'application sont trop optimistes lorsque ce facteur est supérieur à deux.

Il existe plusieurs approches pour estimer la longévité de pièces soumises à des variations de contraintes d'amplitudes quelconques. Malgré sa rusticité, la théorie linéaire des détériorations cumulatives de Miner paraît encore avoir la préférence à cause de sa simplicité. La mécanique des ruptures permet de pronostiquer la vitesse d'avance d'une fissure et d'estimer la durée de vie résiduelle d'une pièce.

L'allégement des pièces et l'économie financière incitent à enlever toute matière inutile. Il en découle le principe d'égale résistance, selon lequel le facteur de sécurité

d'une pièce a partout la même valeur. On évite le surdimensionnement d'une machine en donnant à toutes ses pièces approximativement la même valeur du facteur de sécurité. Une pièce présentant plusieurs modes de ruine est bien conçue lorsqu'elle est détruite simultanément dans tous les modes. Tous les organes dont l'aptitude au service est limitée par des détériorations de surface ou par de la fatigue devraient avoir la même longévité (principe d'équilongévité).

La taille des organes de machine dépend des charges. Sauf en traction, elle est le plus souvent proportionnelle à la racine cubique du couple ou de la force appliquée. Les proportions géométriques des pièces elles-mêmes et des organes entre eux ne dépendent finalement essentiellement que des matériaux et de la construction. Cette constatation est à la base de la notion de proportion harmonieuse qui permet le plus souvent de tracer les pièces sans grand calcul.

Lorsque la taille d'une pièce est imposée par des considérations constructives, on choisit le matériau selon la contrainte effective régnant dans la pièce.

## DIMENSIONNEMENT À LA VITESSE ET AUX DÉFORMATIONS

### 25.1 INTRODUCTION

Dans une machine fonctionnant très lentement, les accélérations des pièces sont faibles et les efforts d'inertie négligeables par rapport aux efforts statiques; les pièces se dimensionnent statiquement. En augmentant la vitesse, les forces d'inertie croissent rapidement, avec le carré de la vitesse; on en tient compte dans les calculs cinéto-statiques. A plus grande vitesse encore, les efforts d'inertie déforment les pièces et provoquent des vibrations, la machine devient bruyante et les mouvements imprécis; des organes chauffent et une pièce finit par casser ou un élément de guidage se grippe.

*Une machine est dite rapide lorsque ses performances principales sont limitées par la vitesse.*

On cherche à faire tourner les machines de plus en plus vite, il importe par conséquent de dimensionner leurs organes de manière à ce qu'ils fonctionnent convenablement à grande vitesse. Leurs proportions sont alors différentes des proportions habituelles résultant uniquement de considérations de résistance. Le constructeur préoccupé par la vitesse doit acquérir un sens différent des proportions et de l'esthétique des éléments de machines.

En se basant sur les développements des chapitres précédents, on dégage les critères du dimensionnement à la vitesse :

- la résistance aux efforts d'inertie;
- la précision du mouvement;
- les vibrations;
- la vitesse critique;
- l'échauffement;
- l'usure;
- le bruit.

Ces phénomènes limitent la vitesse et la cadence de production des machines.

En dehors de toute considération de vitesse, la déformation statique des pièces joue aussi un rôle important dans leur aptitude au service. De trop fortes déformations peuvent perturber le fonctionnement d'engrenages, de mécanismes articulés ou de guidage. Dans d'autres cas, au contraire, on exige que des éléments puissent se déformer pour répartir des efforts ou pour créer une précontrainte souple. C'est pourquoi il faut aussi dimensionner certains organes sur la base de leurs déformations statiques.

Ce chapitre a pour but de montrer les principes du dimensionnement à la vitesse et à la déformation. Il est structuré comme suit :



- Section 25.2 Principe de dimensionnement à la résistance de rotors rapides.
- Section 25.3 Dimensionnement d'organes en vue de garantir la précision de mouvements, comparaison avec les calculs de résistance traditionnels et discussion des proportions géométriques.
- Section 25.4 Dimensionnement en vue de limiter l'amplitude des efforts vibratoires et d'éviter des résonances.
- Section 25.5 Dimensionnement des arbres pour situer correctement les vitesses critiques par rapport aux vitesses de service.
- Section 25.6 Dimensionnement d'organes en vue de limiter leur échauffement et leur usure.
- Section 25.7 Dimensionnement de pièces sur la base de leur déformation statique.
- Section 25.8 Dimensionnement des mécanismes à l'aide de logiciels de calcul et de simulations.
- Section 25.9 Conclusions principales.

Afin de faciliter les comparaisons, les dimensions calculées sur la base de la résistance sont affectées de l'indice  $\sigma$ ; elles reçoivent l'indice  $\Omega$  lorsqu'elles sont calculées selon un critère dynamique.

## 25.2 EFFORTS D'INERTIE

### 25.2.1 Disques

Le dimensionnement des rotors repose sur des considérations de résistance mécanique. Mais ce problème à ceci de particulier que tout ou partie de la charge imposée aux pièces provient des forces centrifuges de leur propre masse. Le calcul détaillé des contraintes sort du cadre de cet ouvrage; il est traité en détail dans une abondante littérature. Traupel [25.1] examine le problème des aubages et des rotors de turbomachines en tenant compte du fluage.

Un disque mince d'épaisseur constante tourne à la vitesse  $\omega$  (fig. 25.1a). La contrainte circonférentielle est la plus forte au bord du trou, elle vaut [25.1]:

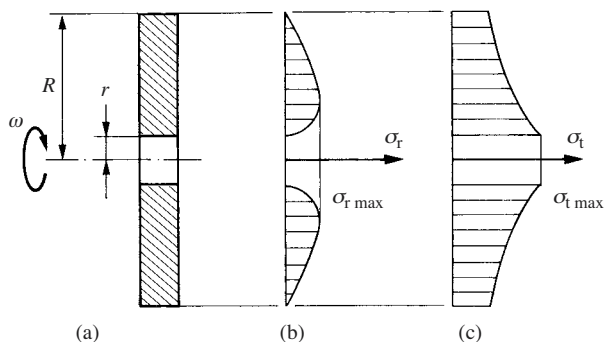


Fig. 25.1 Disque percé en rotation: (a) géométrie; (b) contrainte radiale; (c) contrainte circonférentielle.

$$\sigma_{t \max} = \frac{3 + \mu}{4} \left( 1 + \frac{1 - \mu}{3 + \mu} \frac{r^2}{R^2} \right) \rho v^2 \quad (25.1)$$

avec :

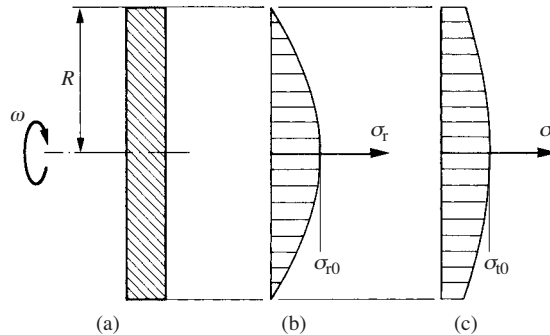
$R$  rayon extérieur du disque  
 $r$  rayon du trou  
 $v = \omega R$  vitesse périphérique du disque  
 $\rho$  masse volumique  
 $\mu$  facteur de Poisson

La contrainte radiale, maximale au rayon égal à  $\sqrt{rR}$ , est inférieure à la moitié de la contrainte circonférentielle maximale :

$$\sigma_{r \max} < \frac{1}{2} \sigma_{t \max}$$

La contrainte circonférentielle au bord d'un petit trou central s'obtient pour  $r \rightarrow 0$  :

$$\sigma_{t0} = \frac{3 + \mu}{4} \rho v^2 \quad (25.2)$$

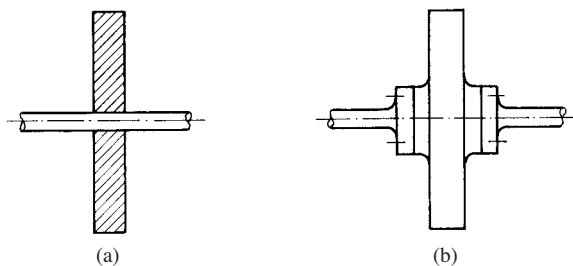


**Fig. 25.2** Disque mince plein: (a) paramètres; (b) contrainte radiale; (c) contrainte circonférentielle.

Dans le cas d'un disque plein (fig. 25.2a), le champ de contrainte radiale n'est pas interrompu par la présence d'un trou (fig. 25.2b). Les contraintes radiale et circonférentielle au centre du disque valent alors :

$$\sigma_{t0} = \sigma_{r0} = \frac{3 + \mu}{8} \rho v^2 \quad (25.3)$$

La contrainte circonférentielle maximale au centre d'un disque plein vaut la moitié de la contrainte dans un disque perforé. C'est pourquoi il est recommandé de ne pas enfiler un disque tournant à haute vitesse sur un arbre (fig. 25.3a), mais plutôt de fixer des demi-arbres de part et d'autre du disque (fig. 25.3b).



**Fig. 25.3** Montage d'un disque sur un arbre: (a) l'arbre traverse le disque, défavorable; (b) demi-arbres boulonnés sur le disque, meilleur.

Ces formules montrent que les contraintes sont indépendantes de l'épaisseur, parce que le disque est mince, mais qu'elles sont proportionnelles au carré de la vitesse périphérique. Le rayon extérieur d'un disque est généralement fixé par des considérations fonctionnelles ou constructives; dans ce cas, on ne peut donc pas parler d'un véritable dimensionnement vis-à-vis de la force d'inertie. Cependant, la contrainte de comparaison ne doit pas excéder la contrainte admissible du matériau. La théorie de Von Mises-Hencky donne, avec (24.27) et (25.3),  $\sigma_g = \sigma_{t0}$ . La relation de sécurité s'écrit alors :

$$\frac{3 + \mu}{8} \rho v^2 \leq \frac{R_{\text{lim}}}{S}$$

où  $R_{\text{lim}}$  est la résistance limite du matériau, le plus souvent la limite élastique, et  $S$  le facteur de sécurité. La vitesse périphérique doit alors satisfaire la relation

$$v = \omega R \leq \sqrt{\frac{8a}{3 + \mu} \frac{R_{\text{lim}}}{\rho S}} \quad (25.4)$$

avec :

$$\begin{array}{ll} a = 1 & \text{disque plein} \\ a = 0,5 & \text{disque perforé} \end{array}$$

La formule fournit la vitesse de rotation maximale pour un rayon donné, ou la taille limite du disque pour une vitesse donnée. Par exemple, pour un disque perforé en acier tournant à 3000 t/min, avec une contrainte admissible de 200 MPa, le diamètre limite est 1118 mm. Avec un disque plein, on trouverait 1580 mm. On peut accroître la taille du disque en utilisant un matériau offrant une résistance spécifique  $R_{\text{lim}}/\rho$  plus élevée ou en diminuant la vitesse de rotation.

### 25.2.2 Disques d'égale résistance

Les figures 25.1 et 25.2 montrent que la contrainte circonférentielle diminue de l'intérieur vers l'extérieur du disque. En rétrécissant le disque dans sa partie extérieure, on peut amener sa valeur à être égale à celle qui règne au centre. La forme exacte pour une contrainte constante (disque d'égale résistance) est donnée par la formule suivante :

$$b = b_0 e^{-\frac{\rho \omega^2}{2\sigma} r^2} \quad (25.5)$$

avec :

- $b_0$  épaisseur au centre du disque
- $\rho$  masse volumique
- $\sigma$  contrainte ( $\sigma_r = \sigma_t = \sigma$ )
- $r$  rayon (variable de la fonction)
- $\omega$  vitesse angulaire

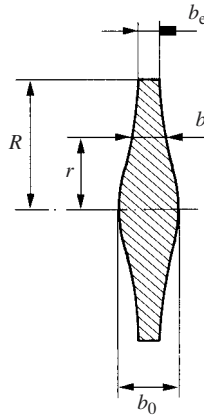


Fig. 25.4 Disque équirésistant.

La figure 25.4 montre la forme d'un disque équirésistant. L'épaisseur extérieure  $b_e$  est généralement imposée par des raisons constructives; en remarquant que le produit  $R\omega$  est la vitesse périphérique  $v$ , on trouve l'épaisseur centrale du disque:

$$b_0 = b_e e^{\frac{\rho v^2}{2\sigma}} \quad (25.6)$$

L'épaisseur croît très vite avec la vitesse périphérique. On a intérêt à utiliser un matériau léger à haute résistance. La figure 25.5 illustre l'application de disques équirésistants pour construire un rotor de turbine par assemblages soudés.

### 25.2.3 Tambours

La force centrifuge dans un tambour dont l'épaisseur n'excède pas 5% du diamètre provoque une contrainte périphérique donnée par la formule (16.20) qui doit être inférieure à la contrainte admissible; on écrit:

$$\sigma_t = \sigma_c = \rho v^2 \leq \frac{R_{\text{lim}}}{S} \quad (25.7)$$

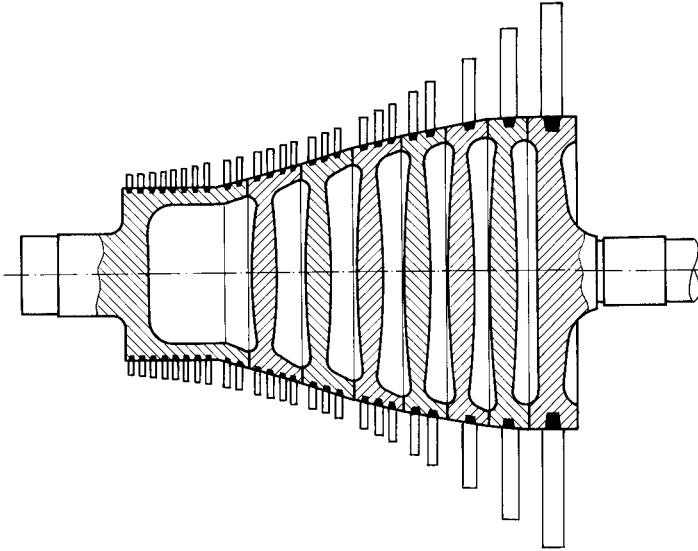


Fig. 25.5 Rotor d'une turbine à vapeur.

La contrainte est indépendante de l'épaisseur du tambour, parce que la force centrifuge est proportionnelle à l'épaisseur et que la section résistante l'est aussi. On choisit finalement librement l'épaisseur du tambour sans qu'on puisse réellement parler d'un dimensionnement. Il convient de faire un calcul exact si  $e > 0,1R$ .

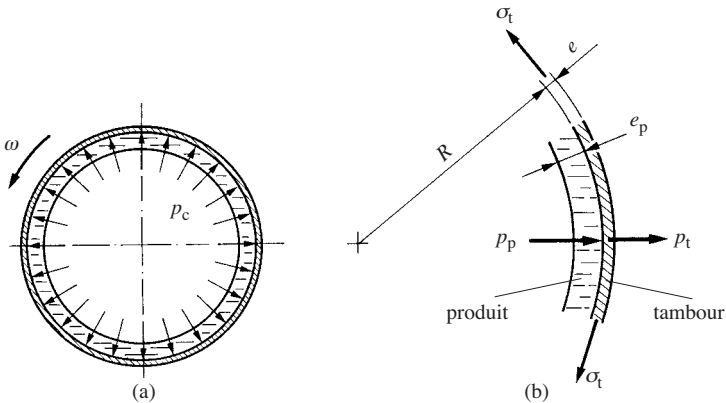


Fig. 25.6 Tambour de centrifugeuse: (a) pression centrifuge; (b) pression du tambour et pression du produit.

On rencontre des machines, par exemple des centrifugeuses, dans lesquelles se trouve une couche de matière qui exerce une pression centrifuge dans le tambour (fig. 25.6a). La charge d'inertie est la somme de la pression  $p_p$  exercée par le produit et de la charge centrifuge  $p_t$  du tambour. Pour des couches minces, on a

$$p_c \approx (\rho_p e_p + \rho e) R \omega^2 \quad (25.8)$$

avec:

$R$  rayon intérieur du tambour  
 $e_p$  épaisseur du produit  
 $e$  épaisseur du tambour  
 $\rho_p$  masse volumique du produit  
 $\rho$  masse volumique du matériau du tambour  
 $\omega$  vitesse de rotation

Cette pression provoque une contrainte circonférentielle qui doit être inférieure à la contrainte admissible,

$$\sigma_t = \frac{p_c R}{e} = \left( \rho_p \frac{e_p}{e} + \rho \right) R^2 \omega^2 \leq \frac{R_{\text{lim}}}{S}$$

Cette inéquation fournit l'épaisseur cherchée du tambour:

$$e \geq \frac{\rho_p e_p v^2}{\frac{R_{\text{lim}}}{S} - \rho v^2} \quad (25.9)$$

Elle croît très vite lorsque la vitesse périphérique augmente. Pour une épaisseur du tambour donnée, on peut aussi calculer la vitesse de service maximale admissible.

Un tambour de turbomachine portant une série d'aubes subit une contrainte accrue par la force centrifuge des aubes. Comme dans le cas de la centrifugeuse traité ci-dessus, l'épaisseur du tambour serait très forte, d'autant plus qu'il faut encore tenir compte du moment de flexion provoqué par la liaison de l'enveloppe aux disques d'extrémité. La construction représentée à la figure 25.5 est beaucoup plus favorable. Dans la partie gauche du rotor, on se contente d'un tambour cylindrique parce que la vitesse périphérique y est plus basse que dans les étages à grand diamètre.

#### 25.2.4 Cylindres longs et pleins

Un cylindre long et plein, tel un arbre, est sollicité par des contraintes radiales, circonférentielles et axiales. Elles sont toutes maximales au centre du cylindre et valent:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = \sigma_t &= \frac{3 - 2\mu}{8(1 - \mu)} \rho v^2 \\ \sigma_a &= \frac{\mu}{4(1 - \mu)} \rho v^2 \end{aligned} \right\} \quad (25.10)$$

On voit que  $\sigma_a = 0,25 \sigma_t$  pour  $\mu = 0,3$ .

Dans le cas d'un matériau ductile, la contrainte de comparaison se calcule à l'aide du critère de rupture de l'énergie de distorsion maximale. En appliquant la formule (24.26), on trouve:

$$\sigma_g = \frac{3}{4} \sigma_r = \frac{3(3 - 2\mu)}{32(1 - \mu)} \rho v^2 \quad (25.11)$$

Avec  $\mu = 0,3$ , on a  $\sigma_g = 0,321 \rho v^2$ . Dans le cas d'un disque mince plein, la formule (25.3) donne  $\sigma_g = 0,413 \rho v^2$ . On constate que le danger d'éclatement d'un disque est plus grand que celui d'un cylindre. La vitesse périphérique maximale admissible d'un arbre est 13,3% plus grande que celle d'un disque plein.

### 25.2.5 Conclusions

Cette brève étude permet de tirer les conclusions suivantes:

- Les organes tournant en marche continue sont chargés statiquement par les forces centrifuges. La théorie de la rupture basée sur l'énergie de distorsion maximale s'applique pour les matériaux ductiles.
- La contrainte croît avec le carré de la vitesse périphérique.
- La vitesse périphérique est limitée par la résistance spécifique  $R_{\text{lim}}/\rho$  du matériau et par la géométrie.
- On élève la vitesse périphérique en choisissant un matériau offrant une grande résistance spécifique et en soignant la géométrie du rotor. Il faut éviter de perfore les disques.
- On dimensionne les rotors de machines thermiques en tenant compte du fluage des matériaux.

## 25.3 PRÉCISION DE TRANSMISSION DU MOUVEMENT

### 25.3.1 Critères de dimensionnement

Le problème de la précision de transmission du mouvement ne se pose que dans les mécanismes à commande positive dont les organes doivent satisfaire les critères suivants:

- transmettre fidèlement le mouvement;
- résister aux efforts transmis.

#### Précision

Les conditions dynamiques requises pour transmettre correctement le mouvement ont été étudiées au chapitre 15. Selon le genre de mouvement, elles se formulent comme suit.

#### *Mouvement périodique*

La pulsation propre la plus basse  $\omega_1$  du mécanisme doit être sensiblement supérieure à l'harmonique de rang  $m$  de la pulsation d'excitation fondamentale  $\Omega$  qu'on veut encore transmettre fidèlement. On impose généralement une pulsation relative limite  $\beta_{\text{lim}}$  par rapport à la fondamentale ou  $\beta_{m \text{ lim}}$  par rapport à l'harmonique, alors

$$\omega_1 \geq m \frac{\Omega}{\beta_{m \text{ lim}}} = \frac{\Omega}{\beta_{\text{lim}}} \quad (25.12)$$

Cette relation constitue l'inégalité de dimensionnement à la précision de transmission de mouvements périodiques. Les pulsations relatives limites se déterminent sur la base de l'erreur de transmission admissible par les formules (15.55) ou (15.56).

### Mouvements apériodiques

L'erreur dynamique dépend du rapport de la durée  $T$  du mouvement à la période propre la plus longue  $T_1$  du mécanisme (§ 15.4.9). Elle est inférieure à une certaine erreur limite lorsque

$$\frac{T}{T_1} \geq \left( \frac{T}{T_1} \right)_{\text{lim}} \quad (25.13)$$

La valeur du rapport limite dépend de la loi du mouvement et de l'erreur admissible (voir les formules (15.99) et (15.106)). Exprimons  $T_1$  par la pulsation propre  $\omega_1$ , on obtient la condition de dimensionnement suivante:

$$\omega_1 \geq \frac{2\pi}{T} \left( \frac{T}{T_1} \right)_{\text{lim}} \quad (25.14)$$

## Résistance

Le critère de résistance conduit à un calcul traditionnel pour lequel on applique aux pièces les efforts cinéostatiques et dynamiques comme expliqué à la section 17.3.

### 25.3.2 Arbres oscillants

Un arbre (fig. 25.7) est entraîné à son extrémité A par un mouvement harmonique d'amplitude  $\hat{\varphi}$  et de pulsation  $\Omega$ . Il transmet ce mouvement à un organe (3) représenté par un volant avec le moment d'inertie  $J$ ; cet organe exige le couple d'entraînement statique  $M_e$ .

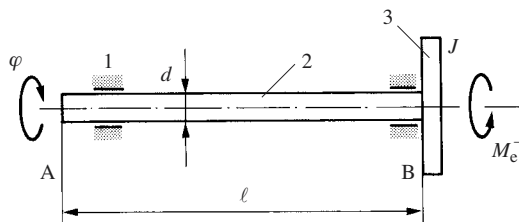


Fig. 25.7 Arbre oscillant.



**Précision**

L'arbre doit transmettre le mouvement avec une erreur maximale acceptable donnée. La pulsation propre de l'oscillateur constitué par l'arbre et le volant doit satisfaire la relation

$$\omega_0 \geq \frac{\Omega}{\beta_{\text{lim}}} \quad (25.15)$$

où la pulsation relative limite  $\beta_{\text{lim}}$  est calculée en fonction de l'erreur par la formule (15.55). Calculons la pulsation propre de l'oscillateur. La rigidité en torsion de l'arbre vaut

$$k = \frac{GI_p}{\ell}$$

avec:

$G$  module d'élasticité de cisaillement  
 $I_p$  moment quadratique polaire de l'arbre  
 $\ell$  longueur

Le moment d'inertie de l'oscillateur se compose du moment d'inertie du volant et du moment d'inertie de l'arbre réduit au volant. Si le premier prédomine largement, on a selon la figure 13.7:

$$J^* = J + \frac{1}{3} \rho I_p \ell$$

où le facteur 1/3 réduit le moment d'inertie de l'arbre pour le premier mode vibratoire. La pulsation propre vaut maintenant

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J^*}} = \sqrt{\frac{GI_p}{\ell \left( J + \frac{1}{3} \rho I_p \ell \right)}} \quad (25.16)$$

Il est intéressant de remarquer que la pulsation propre du premier mode de l'arbre, s'il ne portait pas de volant, vaudrait, selon cette formule,

$$\omega_0 = \frac{1}{\ell} \sqrt{3 \frac{G}{\rho}}$$

Par un calcul exact, avec un arbre à masse uniformément répartie, encastré à une extrémité, on trouve

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2\ell} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (25.17)$$

La valeur approchée est 10% supérieure à la valeur exacte.

*La pulsation propre en torsion d'un arbre est indépendante de son diamètre et inversement proportionnelle à sa longueur.*

Portons maintenant l'expression (25.16) dans (25.15). On obtient une inéquation qui fournit le moment quadratique polaire de l'arbre nécessaire pour transmettre fidèlement le mouvement. Pour un arbre plein, on a le diamètre :

$$d_{\Omega} \geq \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \frac{J \ell}{G - \frac{1}{3} \rho \ell^2 \left( \frac{\Omega}{\beta_{\text{lim}}} \right)^2}} \sqrt{\frac{\Omega}{\beta_{\text{lim}}}} \quad (25.18)$$

Dans le cas où le moment d'inertie  $J$  est nul ou insignifiant, le diamètre requis est aussi nul parce que la pulsation propre d'un arbre lisse est indépendante de son diamètre; en fait il peut être quelconque.

### Résistance

L'arbre est sollicité en torsion par le couple d'entraînement statique et par le couple d'inertie du volant. Le couple maximal calculé par (17.16) vaut, en négligeant l'inertie de l'arbre,

$$M_{t \text{ max}} = M_e + \mu_2 J \hat{\varphi} \Omega^2 \quad (25.19)$$

où  $\mu_2$  est le facteur d'amplification dynamique donné par la formule (15.45).

L'application de la formule (24.62) donne le diamètre de l'arbre plein nécessaire du point de vue de la résistance :

$$d_{\sigma} \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{M_e + \mu_2 J \hat{\varphi} \Omega^2}{\tau_{t \text{ pd}}}} \quad (25.20)$$

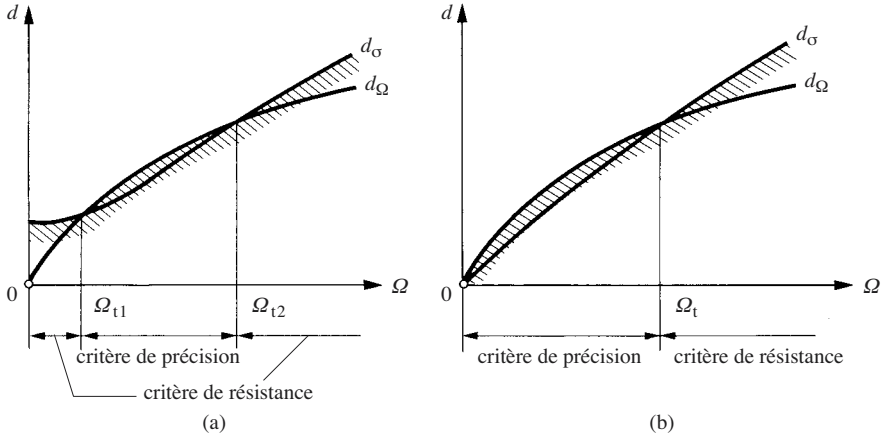
où  $\tau_{t \text{ pd}}$  est la contrainte de torsion de prédimensionnement définie par la formule (24.60).

### Diamètre de l'arbre

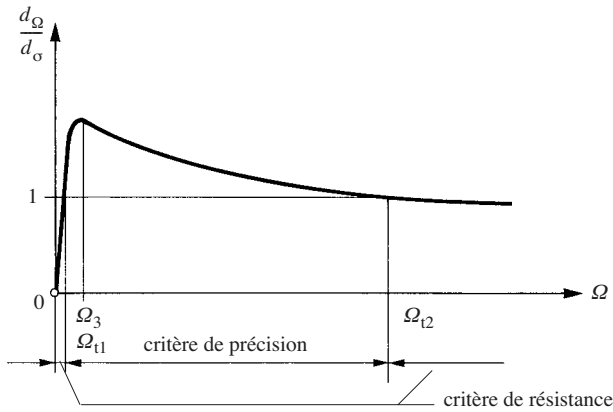
La figure 25.8 représente les diamètres en fonction de la pulsation du mouvement. Le diamètre effectif de l'arbre doit satisfaire à la fois les conditions de résistance et de précision. Il existe un domaine dans lequel l'arbre est dimensionné par le critère de précision et deux autres où il l'est par celui de résistance.

Afin de comparer la taille des arbres calculés selon l'un ou l'autre des critères de dimensionnement, calculons le rapport  $d_{\Omega}/d_{\sigma}$  avec les formules (25.18) et (25.20). On trouve

$$\frac{d_{\Omega}}{d_{\sigma}} = \sqrt[4]{2} \sqrt[12]{\frac{\pi}{16}} \sqrt[3]{\frac{\tau_{t \text{ pd}}}{M_e + \mu_2 J \hat{\varphi} \Omega^2}} \sqrt[4]{\frac{J \ell}{G - \frac{1}{3} \rho \ell^2 \left( \frac{\Omega}{\beta_{\text{lim}}} \right)^2}} \sqrt{\frac{\Omega}{\beta_{\text{lim}}}} \quad (25.21)$$



**Fig. 25.8** Diamètre d'un arbre oscillant en fonction de la pulsation du mouvement: (a) avec un couple statique; (b) couple statique nul.



**Fig. 25.9** Recherche des domaines de calcul.

Ce rapport a l'allure représentée à la figure 25.9 en fonction de la pulsation du mouvement. Il présente un maximum pour la pulsation  $\Omega_3$ .

### Domaines de dimensionnement

Selon la figure 25.8(a), le critère de dimensionnement à la précision du mouvement domine entre les pulsations de transition  $\Omega_{t1}$  et  $\Omega_{t2}$ . La transition supérieure n'existe que si le moment d'inertie de l'arbre est négligeable par rapport à celui du volant. Mais elle est généralement supérieure à la pulsation de travail rencontrée dans les mécanismes oscillants habituels. La transition inférieure est plus intéressante. On trouve en principe sa valeur en faisant  $d_\Omega = d_\sigma$  dans (25.21). Mais cette équation ne permet pas d'en tirer analytiquement la pulsation de transition  $\Omega_{t1}$ . Elle peut en revanche fournir le couple d'entraînement statique pour une valeur  $\Omega_{t1}$  donnée. On obtient

$$M_e = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2} \tau_{t\text{pd}}} \left[ \frac{J\ell}{G - \frac{1}{3} \rho \ell^2 \left( \frac{\Omega_{t1}}{\beta_{\text{lim}}} \right)^2} \right]^{3/4} \left( \frac{\Omega_{t1}}{\beta_{\text{lim}}} \right)^{3/2} - \mu_2 J \hat{\varphi} \Omega_{t1}^2 \quad (25.22)$$

On trouve le diamètre de l'arbre correspondant à la pulsation de transition en introduisant cette valeur du couple statique dans l'expression (25.20). Il vient

$$d_{\sigma t} = 2 \sqrt[4]{\frac{2}{\pi} \frac{J\ell}{G - \frac{1}{3} \rho \ell^2 \left( \frac{\Omega_{t1}}{\beta_{\text{lim}}} \right)^2}} \sqrt{\frac{\Omega_{t1}}{\beta_{\text{lim}}}} \quad (25.23)$$

Il est remarquable que ce diamètre soit indépendant de la résistance du matériau de l'arbre.

### Erreur dynamique

Les praticiens dimensionnent habituellement les arbres uniquement à la résistance. Calculons l'erreur de transmission d'un mouvement harmonique provoquée par un tel arbre. En négligeant l'inertie de l'arbre, la pulsation relative s'écrit :

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega_0} = \Omega \sqrt{\frac{J\ell}{GI_p}} \quad (25.24)$$

L'erreur relative de précision vaut, avec (15.56),

$$e \approx \beta^2 = \Omega^2 \frac{J\ell}{GI_p} \quad (25.25)$$

En introduisant maintenant le moment quadratique polaire de surface et l'expression (25.19) du diamètre de résistance, il vient :

$$e \approx 1,1624 \frac{\tau_{t\text{pd}}^{4/3}}{G} J\ell \frac{\Omega^2}{\left( M_e + \mu_2 J \hat{\varphi} \Omega^2 \right)^{4/3}} \quad (25.26)$$

L'erreur augmente avec la résistance du matériau utilisé parce que le diamètre de l'arbre diminue lorsque la résistance croît; l'arbre est alors trop souple. Lorsque le couple d'entraînement est nul, il reste

$$e \approx 1,1624 \frac{\tau_{t\text{pd}}^{4/3}}{G} \frac{\ell}{J^{1/3} (\mu_2 \hat{\varphi})^{4/3} \Omega^{2/3}} \quad (25.27)$$

### Application numérique

Un arbre plein en acier doit transmettre un mouvement harmonique, amplitude  $\hat{\varphi} = 0,5$  et pulsation  $\Omega = 30 \text{ s}^{-1}$ , avec une précision  $e = 1\%$  à une inertie  $J = 0,1 \text{ kg m}^2$ . Par (15.55),  $\beta_{\text{lim}} = 0,1$ ; par (15.45) et en négligeant l'amortissement,  $\mu_2 \approx 1$ . En outre,  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ ,  $G = 77 \text{ GPa}$ ,  $\tau_{\text{tpd}} = 50 \text{ MPa}$ .

On obtient par (25.21):

$$\frac{d_{\Omega}}{d_{\sigma}} = 1,672 \text{ pour } M_e = 0$$

$$\frac{d_{\Omega}}{d_{\sigma}} = 1,479 \text{ pour } M_e = 20 \text{ Nm}$$

Dans cet exemple, l'arbre nécessaire pour transmettre fidèlement le mouvement est sensiblement plus gros que celui qui suffit pour transmettre le couple.

La pulsation de transition peut se tirer de l'équation (25.22). Une calculatrice graphique donne  $\Omega_{t1} = 6,745 \text{ s}^{-1}$  pour le couple statique  $M_e = 20 \text{ Nm}$ . Puisque la pulsation du mouvement est plus élevée, on se trouve dans le domaine de dimensionnement à la précision (fig. 25.8a). Le diamètre de l'arbre cherché se calcule donc à l'aide de la formule (20.18):  $d_{\Omega} = 0,0278 \text{ m}$ . On choisit finalement un diamètre de 30 mm.

Le dimensionnement traditionnel de l'arbre par le critère de résistance, formule (25.20), aurait donné  $d_{\sigma} = 0,0188 \text{ m}$  et conduit sans doute à prévoir un arbre de 20 mm de diamètre seulement.

Calculons encore l'erreur de transmission de mouvement lorsque l'arbre est exécuté avec le diamètre voulu par le calcul de résistance. La formule (25.26) donne

$$e \approx 7,8\% \text{ pour } M_e = 0$$

$$e \approx 4,8\% \text{ pour } M_e = 20 \text{ Nm}$$

Ces résultats prouvent qu'il faut toujours dimensionner l'arbre à la précision dès qu'on exige que l'erreur de transmission soit petite.

### Conclusions

Le développement ci-dessus et des évaluations numériques permettent les conclusions suivantes:

- un arbre oscillant doit être dimensionné à la précision du mouvement et à la résistance;
- au-dessus d'une certaine pulsation de transition du mouvement, l'arbre est plus gros que s'il avait été dimensionné seulement à la résistance;
- le dimensionnement à la résistance prime au-dessous de cette pulsation de transition et parfois au-dessus d'une transition supérieure;
- on court le risque d'une mauvaise transmission de mouvement avec de fortes vibrations en ne dimensionnant un arbre qu'à la résistance.

### 25.3.3 Moyeux

On a montré que, selon la pulsation de l'oscillation et la précision exigée, le diamètre d'un arbre dimensionné du point de vue de la précision de transmission du mouvement est plus gros que ne l'exigerait seulement sa résistance. Examinons les répercussions sur les liaisons arbre-moyeu, en particulier pour un moyeu fretté.

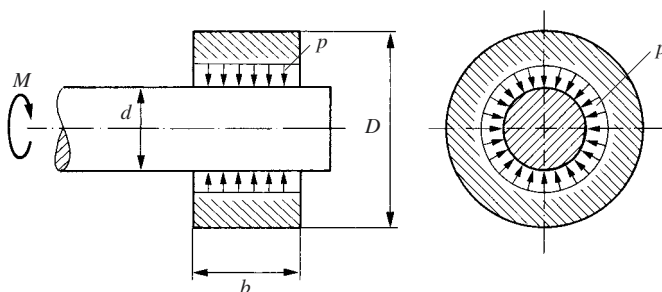


Fig. 25.10 Moyeu fretté.

En supposant une pression de contact uniforme (fig. 25.10), le couple transmissible vaut:

$$M = \frac{\pi}{2} b d^2 p \frac{\mu}{S} \quad (25.28)$$

avec:

- $b$  longueur du moyeu
- $d$  diamètre de l'arbre
- $p$  pression de serrage
- $S$  facteur de sécurité au glissement
- $\mu$  coefficient de frottement

Le couple à transmettre est habituellement connu, la pression nécessaire s'obtient en choisissant convenablement le serrage, c'est-à-dire la différence entre le diamètre de l'arbre et l'alésage du moyeu avant le montage. En supposant que le moyeu soit sollicité uniquement dans le domaine élastique, la théorie de l'énergie de distorsion maximale donne la contrainte de comparaison dans le moyeu. On trouve, par exemple dans [25.2, 25.3, 25.4], pour un arbre plein,

$$\sigma_g = \frac{\sqrt{3K^4 + 1}}{K^2 - 1} p \quad (25.29)$$

où  $K$  est le rapport du diamètre extérieur du moyeu à son alésage:

$$K = \frac{D}{d} \quad (25.30)$$

Les proportions usuelles des moyeux découlent de considérations de résistance. On admet habituellement, pour des arbres en acier et selon les genres de matériaux des moyeux:

- moyeux en acier:  $D = (1,8 \dots 2,5) d$   $b = (0,6 \dots 1) d$
- moyeux en fonte:  $D = (2,2 \dots 2,7) d$   $b = (1,2 \dots 1,5) d$

La pression de contact nécessaire pour transmettre le couple se tire de (25.28). En introduisant cette valeur dans (25.29), on trouve la contrainte de comparaison dans un moyeu adapté à un arbre dimensionné à la résistance :

$$\sigma_{g\sigma} = \frac{2}{\pi} \frac{S}{b_{\sigma} d_{\sigma}^2} \frac{\sqrt{3K_{\sigma}^4 + 1}}{K_{\sigma}^2 - 1} \frac{M}{\mu} \quad (25.31)$$

où  $K_{\sigma} = D_{\sigma}/d_{\sigma}$ .

L'arbre dont le diamètre est dimensionné selon un critère dynamique doit transmettre au moyeu le même couple que s'il était dimensionné à la résistance, mais on peut a priori donner au moyeu d'autres proportions. La contrainte de comparaison vaut, par analogie avec (25.31),

$$\sigma_{g\Omega} = \frac{2}{\pi} \frac{S}{b_{\Omega} d_{\Omega}^2} \frac{\sqrt{3K_{\Omega}^4 + 1}}{K_{\Omega}^2 - 1} \frac{M}{\mu} \quad (25.32)$$

et  $K_{\Omega} = D_{\Omega}/d_{\Omega}$ .

Pour une contrainte égale, le diamètre extérieur relatif du moyeu adapté à l'arbre calculé dynamiquement diffère de celui destiné à un arbre dimensionné à la résistance. En égalant (25.31) et (25.32) on obtient

$$\frac{\sqrt{3K_{\Omega}^4 + 1}}{K_{\Omega}^2 - 1} \frac{K_{\sigma}^2 - 1}{\sqrt{3K_{\sigma}^4 + 1}} = \frac{b_{\Omega}}{b_{\sigma}} \left( \frac{d_{\Omega}}{d_{\sigma}} \right)^2$$

Cette équation fournit

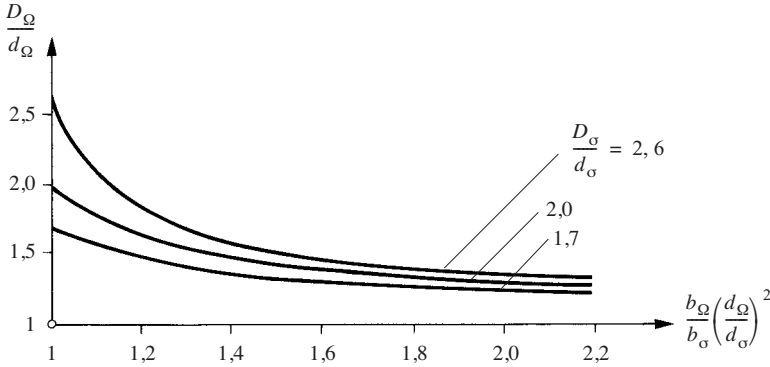
$$K_{\Omega} = \sqrt{\frac{f^2 + \sqrt{4f^2 - 3}}{f^2 - 3}} \quad (25.33)$$

avec le paramètre

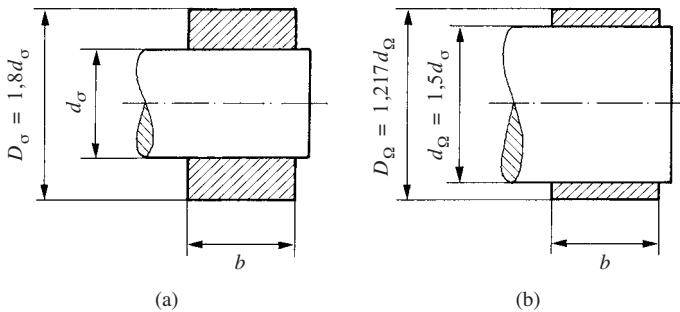
$$f = \frac{b_{\Omega}}{b_{\sigma}} \left( \frac{d_{\Omega}}{d_{\sigma}} \right)^2 \frac{\sqrt{3K_{\sigma}^4 + 1}}{K_{\sigma}^2 - 1}$$

La figure 25.11 montre qu'un moyeu monté sur un arbre dimensionné sur une base de précision de mouvement est plus mince que s'il est monté sur un arbre plus petit dimensionné à la résistance; son allure diffère nettement de la proportion habituelle (fig. 25.12). Ce résultat s'explique par le fait que la pression de serrage nécessaire pour transmettre un couple diminue lorsque le diamètre de l'arbre augmente car la force périphérique transmise est inversement proportionnelle au diamètre.

Pour les besoins de la pratique, on peut calculer un arbre à la résistance, choisir les proportions usuelles du moyeu, puis agrandir son alésage pour y passer l'arbre cal-



**Fig. 25.11** Diamètre extérieur relatif d'un moyeu pour un arbre dimensionné dynamiquement comparé aux proportions d'un moyeu monté sur un arbre dimensionné à la résistance.



**Fig. 25.12** Proportion de moyeux frettés avec la même contrainte de comparaison: (a) arbre dimensionné à la résistance; (b) arbre dimensionné à la fidélité du mouvement.

culé à la précision. On détermine ensuite le serrage pour obtenir la pression nécessaire tirée de l'équation (25.28).

Des moyeux clavetés ou à cannelures peuvent également être moins épais lorsque l'arbre est plus gros que ce que nécessite sa résistance, sous réserve que les concentrations de contrainte dans les rainures ne deviennent pas excessives.

### 25.3.4 Bras oscillants

Un bras oscille autour d'un axe (fig. 25.13). On simplifie l'écriture en admettant  $\ell \approx R$  parce qu'il est relativement long par rapport au rayon du moyeu. Avec une section uniforme  $A$  et une masse volumique  $\rho$ , sa masse vaut

$$m = \rho AR$$

Dimensionnons la section du bras du point de vue de la précision du mouvement exécuté par son extrémité et de sa résistance aux efforts d'inertie.



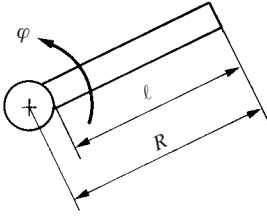


Fig. 25.13 Bras oscillant.

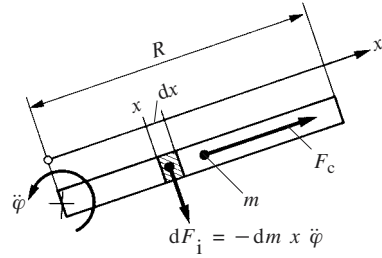


Fig. 25.14 Charges dynamiques du bras de la figure 25.13.

### Précision

Cherchons la taille de la poutre nécessaire pour obtenir une certaine précision de transmission. La pulsation propre du bras (masse continue) encastré dans l'arbre est donnée par [25.5] (voir aussi le paragraphe 13.4.1):

$$\omega_1 = \frac{1,875^2}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (25.34)$$

où  $I$  est le moment quadratique de surface valable pour la flexion.

La précision du mouvement harmonique de pulsation  $\Omega$  est acceptable si

$$\omega_1 \geq \frac{\Omega}{\beta_{\text{lim}}}$$

La pulsation relative limite  $\beta_{\text{lim}}$  dépend de la précision désirée selon la formule (15.55). La combinaison des deux dernières relations fournit

$$\frac{I}{A} \geq \frac{R^4}{12,36 \beta_{\text{lim}}^2} \frac{\rho}{E} \Omega^2 \quad (25.35)$$

### Résistance

La force centrifuge  $F_c$  (fig. 25.14) provoque la contrainte de traction au moyeu:

$$\sigma_c = \frac{1}{A} m \frac{R}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \rho R^2 \dot{\varphi}^2$$

L'accélération angulaire occasionne une charge latérale d'inertie dont le moment de flexion résultant au pied du bras vaut

$$M = - \int_0^R x \cdot \rho A dx \cdot x \ddot{\varphi} = - \rho A \frac{1}{3} R^3 \ddot{\varphi}$$

et la contrainte de flexion

$$\sigma_f = -\frac{A}{3W} \rho R^3 \ddot{\varphi}$$

où  $W$  est le moment de résistance du bras.

Cette contrainte est amplifiée par les vibrations latérales; désignons par  $\mu$  le facteur d'amplification dynamique. On a maintenant la contrainte résultante

$$\sigma = \sigma_c + \mu \sigma_f = \rho R^2 \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu \frac{A}{3W} R \ddot{\varphi} \right) \quad (25.36)$$

Admettons, par exemple, un mouvement harmonique

$$\varphi = \hat{\varphi} \cos \Omega t$$

Si la poutre vibre dans son premier mode,  $\mu = \mu_2$  donné par (15.45), on obtient:

$$\sigma = \rho R^2 \hat{\varphi} \Omega^2 \left( \frac{\hat{\varphi}}{2} \sin^2 \Omega t + \mu_2 \frac{A}{3W} R \cos \Omega t \right) \quad (25.37)$$

Compte tenu de la géométrie habituelle, une évaluation prouve que l'amplitude du second terme de la parenthèse est plus grande que celle du premier; la contrainte maximale vaut alors

$$\sigma_{\max} \approx \mu_2 \rho \frac{A}{3W} R^3 \hat{\varphi} \Omega^2 \quad (25.38)$$

La contrainte effective ne doit pas excéder la contrainte admissible par le matériau. Avec le concentrateur de contraintes à l'encastrement du bras dans le moyeu, la contrainte limite vaut

$$\sigma_1 = \frac{c \sigma_{Df}}{K_{ff} S} \quad (25.39)$$

avec:

- $\sigma_{Df}$  limite de fatigue du matériau en flexion alternée
- $c$  facteur de correction de la résistance (23.25)
- $K_{ff}$  facteur d'entaille en flexion
- $S$  facteur de sécurité

L'inégalité de sécurité  $\sigma_{\max} \leq \sigma_1$  fournit la taille de la section nécessaire, soit:

$$\frac{W}{A} \geq \mu_2 \frac{R^3}{3} \frac{\rho}{\sigma_1} \hat{\varphi} \Omega^2 \quad (25.40)$$

### Section du bras

Le profil du bras doit satisfaire la condition de résistance et celle de précision. Supposons un profil rectangulaire, largeur  $b$  et hauteur  $h$ , on a :

$$\frac{I}{A} = \frac{h^2}{12}$$

$$\frac{W}{A} = \frac{h}{6}$$

Avec ces relations, la formule (25.35) donne la hauteur  $h_\Omega$  nécessaire pour obtenir la précision du mouvement souhaitée, et (25.40) fournit la hauteur  $h_\sigma$  nécessaire du point de vue de la résistance. La figure 25.15 montre l'allure de ces dimensions en fonction de la pulsation du mouvement. En dessous d'une certaine pulsation de transition  $\Omega_t$ , la taille du bras est déterminée par l'exigence de précision du mouvement, au-dessus c'est le critère de résistance qui est déterminant. On trouve aisément que la pulsation de transition pour un bras de section rectangulaire vaut

$$\Omega_t = \frac{0,493}{\beta_{\text{lim}}} \frac{\sigma_1}{\sqrt{\rho E}} \frac{1}{\mu_2 R \hat{\varphi}} \quad (25.41)$$

La hauteur du profil est indépendante de sa largeur, mais on choisira judicieusement une largeur suffisante pour que la pulsation propre latérale soit supérieure à  $\Omega_t$ . En effet, l'expérience montre qu'il existe aussi toujours une vibration latérale excitée par le mouvement oscillant à cause des inévitables dissymétries.

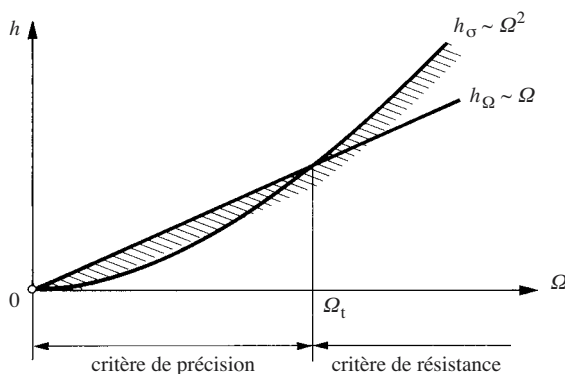


Fig. 25.15 Taille d'un bras oscillant en fonction de la pulsation d'oscillation.

Si le bras était encore sollicité par un moment de flexion constant provoqué par une charge extérieure, on aboutirait aux mêmes conclusions que dans le cas de l'arbre oscillant étudié au paragraphe 25.3.2. Il existerait aussi un domaine à basse vitesse où le dimensionnement à la résistance serait prédominant.

### Application numérique

Un bras en acier effectue un mouvement harmonique d'une amplitude  $\hat{\varphi} = 0,3$  rad. Ses caractéristiques sont:  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ;  $\sigma_1 = 100 \text{ MPa}$ ; rayon  $R = 0,3 \text{ m}$ . On veut la pulsation relative limite  $\beta_{\text{lim}} = 0,1$  pour laquelle on estime  $\mu_2 = 1,01$ .

La formule (25.41) donne la pulsation de transition  $\Omega_t = 137 \text{ s}^{-1}$  ou  $21,8 \text{ Hz}$ . Cette fréquence est supérieure à la vitesse des machines de conditionnement habituelles, leur bras doit donc être dimensionné selon le critère de précision du mouvement.

### 25.3.5 Loi du mouvement

Même s'il ne s'agit pas à proprement parler d'un problème de dimensionnement, rappelons qu'on peut accroître la vitesse d'un mécanisme en choisissant une loi du mouvement convenable. Ce problème et la détermination de la vitesse limite, pour une précision de mouvement donnée, ont été discutés dans la section 15.9.

## 25.4 VIBRATION DES MÉCANISMES

### 25.4.1 Critères de dimensionnement dynamique

Les mécanismes sont le siège de vibrations qui surchargent et fatiguent leurs pièces. Leurs pulsations propres ne doivent pas coïncider avec une pulsation excitatrice, sauf s'il s'agit de construire un résonateur (§ 18.3.3).

Les pulsations propres d'un mécanisme à *commande positive* construit pour transmettre fidèlement le mouvement sont habituellement assez élevées pour qu'il n'y ait pas à craindre de vibrations exagérées. Mais on vérifiera quand même qu'aucune vibration dangereuse ne soit excitée par une harmonique d'un mouvement périodique (§ 17.4.4).

On ne demande généralement pas aux mécanismes à *commande non positive* une rigidité particulière du point de vue de la précision de transmission du mouvement. Mais il faut néanmoins veiller à ce que des perturbations d'efforts ou de mouvement ne soient pas en résonance avec une pulsation propre du système. En ne considérant que la pulsation propre la plus basse  $\omega_1$  et une pulsation perturbatrice  $\Omega$ , on exige, selon le régime de fonctionnement voulu:

- régime sous-critique:

$$\omega_1 \geq \frac{\Omega}{\beta_1} \quad (25.42)$$

- régime surcritique:

$$\omega_1 \leq \frac{\Omega}{\beta_2} \quad (25.43)$$

avec, habituellement  $\beta_1 \approx 0,7$  et  $\beta_2 \approx 1,25$ . Ces valeurs de la pulsation relative consistent à admettre le doublement des efforts dynamiques perturbateurs par le jeu de l'oscillateur.

La perturbation est fréquemment en relation avec la vitesse  $\omega$  de l'arbre de commande principal de la machine,

$$\Omega = N \omega \quad (25.44)$$

où  $N$  est le plus souvent un nombre entier. Les conditions de dimensionnement dynamique deviennent:

- régime sous-critique:

$$\omega_1 \geq \frac{N}{\beta_1} \omega \quad (25.45)$$

- régime surcritique:

$$\omega_1 \leq \frac{N}{\beta_2} \omega \quad (25.46)$$

Il s'agit parfois d'atténuer des chocs. Dans ce cas, il faut que la période propre de l'oscillateur soit supérieure au double de la durée  $T$  du choc (§ 17.4.7). La condition de dimensionnement s'exprime alors par

$$\omega_1 \leq \frac{\pi}{T} \quad (25.47)$$

#### 25.4.2 Arbres tournants

Les arbres doivent satisfaire quatre conditions:

- transmettre le mouvement sans déformation de torsion dynamique exagérée;
- résister aux efforts de torsion et de flexion;
- fonctionner en dehors des régimes critiques de flexion;
- ne pas fléchir exagérément du fait des charges appliquées.

Parfois on exige encore que le couple transmis n'inverse pas son sens sous l'effet des vibrations, afin que les pièces ne battent pas dans les jeux avec des chocs dangereux, notamment pour les engrenages et les liaisons arbres-moyeux.

Le problème de la vitesse critique de flexion sera traité à la section 25.5, celui de la flexion statique à la section 25.7.

Examinons le dimensionnement d'un arbre à la résistance en tenant compte d'une perturbation harmonique du couple d'entraînement.

#### Pulsation propre en torsion

Un arbre relie deux masses tournantes (fig. 25.16). Sa déformation permet des vibrations de torsion dont la pulsation propre en régime libre non amorti est donnée par la formule (17.23). Après introduction de l'expression de la rigidité de l'arbre, on a

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi}{32} \frac{G d^4}{\ell} \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} \quad (25.48)$$

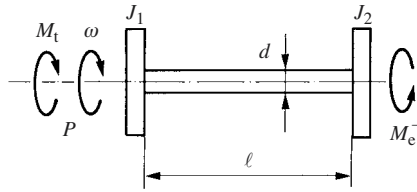
Posons, pour simplifier l'écriture,

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{32} \frac{G}{\ell} \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} \quad (25.49)$$

alors

$$\omega_1 = a d^2 \quad (25.50)$$

*La pulsation propre de l'oscillateur de torsion est proportionnelle au carré du diamètre de l'arbre.*



**Fig. 25.16** Schéma d'un arbre de transmission.

On sait que le comportement dynamique du mécanisme dépend considérablement de la pulsation propre en torsion du système; par exemple la précision d'un usinage ou celle du positionnement d'un robot. Un groupe est fréquemment excité par une perturbation dont la pulsation fondamentale est proportionnelle à la vitesse de rotation,  $\Omega = N\omega$ . L'aptitude au fonctionnement exige de ne pas dépasser une certaine limite de la pulsation relative par rapport à l'harmonique  $m$  d'une excitation périodique, soit:

$$\beta_m = m \frac{\Omega}{\omega_1} = m \frac{N\omega}{a d_\Omega^2} \leq \beta_{m \text{ lim}}$$

Cette relation fournit le diamètre de l'arbre nécessaire:

$$d_\Omega \geq \sqrt{m \frac{N\omega}{a \beta_{m \text{ lim}}}} \quad (25.51)$$

Il croît avec la racine carrée de la vitesse.

Il existe un diamètre critique  $d_c$  pour lequel la pulsation propre est égale à l'harmonique de la pulsation perturbatrice (résonance). Avec (25.50) on a

$$m \Omega = a d_c^2 \quad (25.52)$$

Mais, avec le diamètre  $d$  la pulsation propre effective vaut

$$\omega_1 = a d^2$$

et la pulsation relative vaut

$$\beta_m = m \beta = m \frac{\Omega}{\omega_1} = \left( \frac{d_c}{d} \right)^2 \quad (25.53)$$

Cette expression est représentée à la figure 25.17. Le régime est sous-critique lorsque le diamètre de l'arbre est supérieur au diamètre critique de résonance parce que la pulsation propre est alors supérieure à la pulsation de l'harmonique perturbatrice.

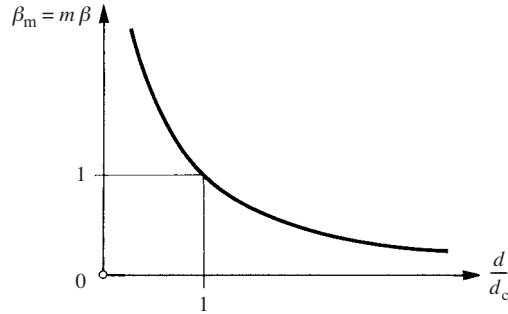


Fig. 25.17 Pulsation relative en fonction du diamètre relatif.

### Résistance

Supposons que l'arbre représenté à la figure 25.16 entraîne un mécanisme présentant un couple perturbateur harmonique tel que

$$M_e = \bar{M}_e + \hat{M}_p \cos \Omega t$$

Le couple maximal transmis par l'arbre vaut, avec (17.43)

$$M_{\max} = \bar{M}_e + \mu_2 \chi_2 \hat{M}_p \quad (25.54)$$

où  $\mu_2$  est le facteur d'amplification dynamique (15.45) et, selon (17.26), le facteur d'inertie est

$$\chi_2 = \frac{J_1}{J_1 + J_2}$$

La pulsation propre du système, et donc le diamètre de l'arbre, intervient dans la valeur du facteur d'amplification dynamique. On cherche comment évolue la contrainte de torsion avec le diamètre en vue d'effectuer un dimensionnement direct.

En négligeant l'amortissement, le couple maximal transmis par l'arbre vaut

$$M_{\max} = \bar{M}_e + \frac{1}{|1 - \beta^2|} \chi_2 \hat{M}_p \quad (25.55)$$

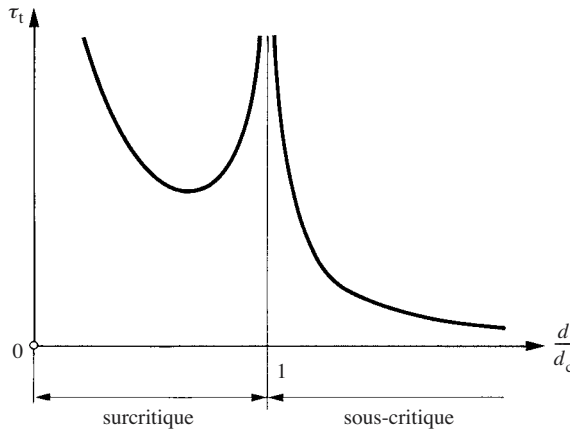
Calculons maintenant la contrainte de torsion pour un arbre plein :

$$\tau_t = \frac{M_{\max}}{W_p} = \frac{16}{\pi d^3} M_{\max}$$

Après introduction de la pulsation relative (25.53) avec  $m = 1$ , du couple (25.55) et des changements d'écriture, on trouve :

$$\tau_t = \left( 1 + \frac{\chi_2}{\left| 1 - \left( \frac{d_c}{d} \right)^4 \right|} \frac{\hat{M}_p}{\bar{M}_e} \right) \frac{16 \bar{M}_e}{\pi d_c^3} \left( \frac{d_c}{d} \right)^3 \quad (25.56)$$

La figure 25.18 représente cette fonction du diamètre. La contrainte tend vers l'infini pour le diamètre critique qui met le système en résonance. Lorsque l'arbre est plus fin, la fréquence propre diminue et l'oscillateur fonctionne en régime surcritique. Il est au contraire en régime sous-critique si le diamètre est plus gros que le diamètre critique.



**Fig. 25.18** Contrainte de torsion dans un arbre soumis à une perturbation harmonique en fonction de son diamètre relatif.

### Inversion du couple

L'inversion périodique de l'effort transmis par un élément de mécanisme est indésirable parce que les liaisons battent dans leur jeu en matant les surfaces fonctionnelles et en générant du bruit. Ce phénomène dangereux peut provoquer la rupture de dents d'engrenages.



Le couple minimal transmis par un arbre avec une perturbation harmonique vaut

$$M_{\min} = \bar{M}_e - \frac{1}{|1 - \beta^2|} \chi_2 \hat{M}_p \quad (25.57)$$

Le couple ne s'inverse pas si  $M_{\min} > 0$ . En introduisant la valeur de la pulsation relative, on obtient une inéquation qui fournit le diamètre de l'arbre dans le domaine sous-critique. Il vient:

$$d > d_M = \sqrt{\frac{\Omega}{a}} \frac{1}{\sqrt[4]{1 - \chi_2 \frac{\hat{M}_p}{\bar{M}_e}}} \quad (25.58)$$

avec:

- $a$  coefficient de pulsation propre (25.49)
- $\bar{M}_e$  couple moyen d'entraînement
- $\hat{M}_p$  amplitude du couple perturbateur du récepteur
- $\Omega$  pulsation de la perturbation

Si l'arbre était plus petit que  $d_M$ , la pulsation propre serait trop basse, la perturbation serait trop amplifiée et le couple s'inverserait.

Le couple s'inverse toujours si

$$\chi_2 \hat{M}_p > \bar{M}_e \quad (25.59)$$

### Diamètre de l'arbre

La contrainte de torsion ne doit pas dépasser la contrainte de prédimensionnement  $\tau_{t \text{ pd}}$  qui tient compte par anticipation de la charge en flexion, des concentrations de contraintes et du matériau (§ 24.5.1), alors

$$\tau_t \leq \tau_{t \text{ pd}} \quad (25.60)$$

En introduisant (25.56), on obtient une inéquation qui fournit le diamètre de l'arbre satisfaisant la condition de résistance:

$$d \geq d_\sigma \quad (25.61)$$

Ce calcul est valable tant que la parenthèse de la formule (25.56) représentant le facteur d'application est inférieure à 2 (§ 24.6.3).

Il faut encore respecter la relation (25.58) si le couple transmis par l'arbre ne doit pas s'inverser. En outre, on doit éventuellement aussi tenir compte du diamètre calculé par (25.51) du point de vue du comportement dynamique.

Les diamètres limites sont représentés dans la figure 25.19. L'arbre s'exécute finalement avec un diamètre supérieur ou égal au plus grand des trois.

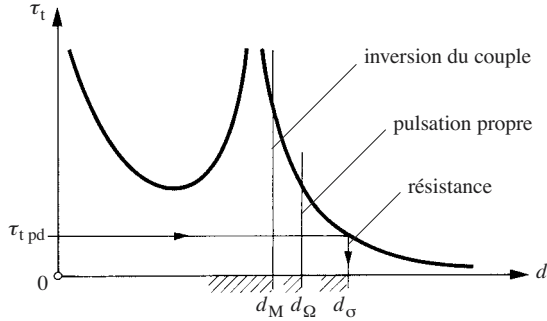


Fig. 25.19 Diamètres limites de résistance et d'inversion du couple.

### Application numérique

Un arbre relie deux volants d'inertie. Il transmet un couple moyen de 100 Nm, la machine entraînée provoque un couple perturbateur de crête de 40 Nm.

$$\begin{aligned} J_1 &= J_2 = 0,1 \text{ kg m}^2 & \Omega &= 60 \text{ s}^{-1} \\ G &= 77 \text{ GPa} & \chi_2 &= 0,5 \\ \tau_{t \text{ pd}} &= 30 \text{ MPa} & \ell &= 0,92 \text{ m} \end{aligned}$$

Le coefficient de pulsation propre (25.49) vaut  $a = 405\,500 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

Le calcul donne :

- le diamètre satisfaisant la condition de résistance (25.56) :  $d \geq 27,4 \text{ mm}$
- le diamètre évitant l'inversion du couple (25.58) :  $d \geq 12,9 \text{ mm}$

On choisit  $d = 28 \text{ mm}$ .

La pulsation propre par (25.50) vaut :  $\omega_1 = 405\,500 \times 0,028^2 = 318 \text{ s}^{-1}$ , et  $\beta = 60/318 = 0,1887$ . Par (25.55), on a

$$M_{\max} = 100 + \frac{1}{1 - 0,1887^2} 0,5 \times 40 = 120,7 \text{ Nm}$$

### 25.4.3 Bielles

Les forces d'inertie d'une bielle en mouvement rapide excitent des vibrations dans le plan du mouvement en provoquant des contraintes de flexion qui se superposent aux contraintes provoquées par l'effort transmis. Les critères de dimensionnement d'une bielle sont :

- la résistance mécanique;
- la pulsation propre de vibration de flexion;
- le flambage.

#### Résistance

Une bielle en rotation est sollicitée en flexion par les composantes transversales des forces d'inertie (fig. 25.20). La manivelle de rayon  $R$  tournant à la vitesse  $\Omega$  provoque l'accélération maximale  $R\Omega^2$  à la tête de bielle. Supposons que la bielle ait une

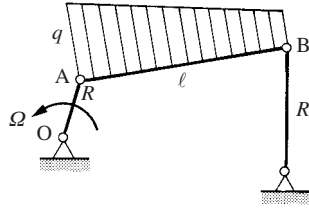
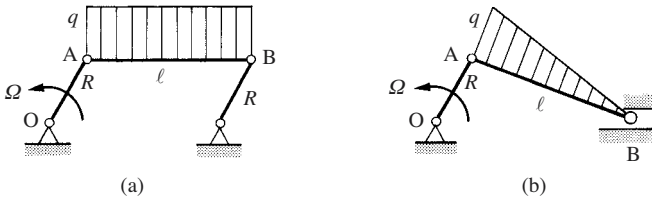


Fig. 25.20 Charge latérale d'une bielle.

Fig. 25.21 Facteur de flexion d'une bielle: (a) bielle en translation,  $\psi = 0,125$ ; (b) pied de bielle coulissant,  $\psi = 0,0642$ .

section uniforme, on trouve que son moment de flexion maximal vaut, compte tenu d'une surcharge vibratoire,

$$M = \mu_2 \psi \rho A \ell^2 R \Omega^2 \quad (25.62)$$

avec:

- $\mu_2$  facteur d'amplification dynamique (15.45)
- $\psi$  facteur de flexion
- $\rho$  masse volumique du matériau
- $\ell$  longueur cinématique de la bielle
- $A$  section de la bielle
- $R$  rayon de la manivelle
- $\Omega$  vitesse de rotation de la manivelle

Le facteur de flexion tient compte de la distribution de l'accélération transversale le long de la bielle. Sa valeur maximale est comprise entre les limites indiquées à la figure 25.21 lorsque l'angle OAB est droit.

La contrainte de flexion vaut

$$\sigma_f = \frac{M}{I_x} e = \mu_2 \psi \rho \frac{A e}{I_x} \ell^2 R \Omega^2 \quad (25.63)$$

où  $I_x$  est le moment quadratique de la surface de la section de la bielle autour de l'axe neutre transversal  $x$ - $x$  et  $e$  la plus grande distance du bord extérieur à la fibre neutre (fig. 25.22). L'axe  $y$ - $y$  se trouve dans le plan du mouvement.

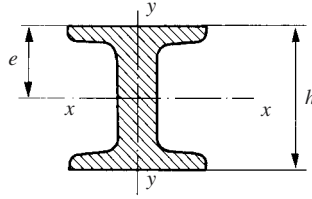


Fig. 25.22 Section d'une bielle.

La bielle est encore soumise à une force de traction  $F$ . La contrainte totale doit être inférieure à la contrainte admissible, par conséquent :

$$\frac{F}{A} + \mu_2 \psi \rho \frac{Ae}{I_x} \ell^2 R \Omega^2 \leq \sigma_{\text{adm}} \quad (25.64)$$

Toutes les grandeurs géométriques de la section peuvent s'exprimer en fonction d'une de ses dimensions, par exemple la hauteur  $h$ . Pour une forme donnée, le premier terme varie comme  $h^{-2}$  et le second comme  $h^{-1}$ . La solution de cette équation du second degré fournit la taille  $h_\sigma$  nécessaire pour la résistance de la bielle.

Dans le cas particulier où la contrainte de traction est négligeable vis-à-vis de la contrainte de flexion, on obtient

$$\frac{I_x}{Ae} \geq \mu_2 \psi \ell^2 R \frac{\rho}{\sigma_{\text{adm}}} \Omega^2 \quad (25.65)$$

### Pulsation propre

La bielle doit fonctionner en régime de flexion sous-critique, c'est-à-dire que sa pulsation propre au premier mode dans le plan du mouvement doit être supérieure à la pulsation excitatrice. Pour une poutre de section constante, avec l'expression (13.7), on a la relation :

$$\omega_{1y} = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{I_x}{A}} \geq \frac{\Omega}{\beta} \quad (25.66)$$

avec :

- $\rho$  masse volumique du matériau
- $E$  module d'élasticité du matériau
- $A$  aire de la section
- $I_x$  moment quadratique de surface par rapport à l'axe  $x-x$
- $\ell$  longueur cinématique de la bielle
- $\beta$  pulsation relative
- $\Omega$  pulsation excitatrice, vitesse de la manivelle

On voit que la dimension de référence de la section, ou le rayon de giration, est proportionnelle à la vitesse de la manivelle.

### Section de la bielle

Sans rien perdre de la généralité des conclusions, considérons le cas particulier d'une section rectangulaire  $b \times h$ . Il vient

$$\frac{I_x}{Ae} = \frac{h}{6}$$

et

$$\sqrt{\frac{I_x}{A}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

Avec ces valeurs, on trouve les solutions suivantes :

- pour le dimensionnement à la résistance (contrainte de flexion prédominante), l'inéquation (25.65) fournit

$$h_{\sigma} \geq 6 \mu_2 \psi \ell^2 R \frac{\rho}{\sigma_1} \Omega^2 \quad (25.67)$$

- pour le dimensionnement à la pulsation propre, (25.66) donne

$$h_{\Omega} \geq \sqrt{12} \frac{\ell^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{\Omega}{\beta} \quad (25.68)$$

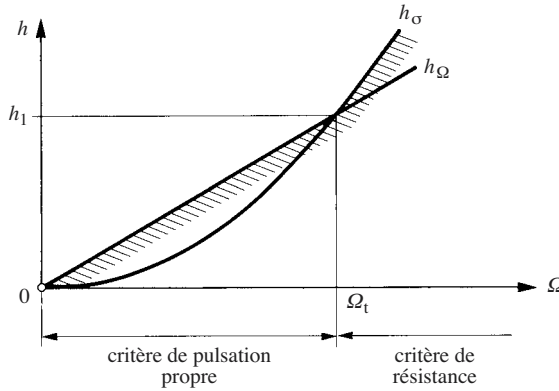


Fig. 25.23 Dimension transversale d'une bielle en fonction de la vitesse de la manivelle.

La figure 25.23 représente ces solutions en fonction de la vitesse. La taille est déterminée par la pulsation propre en dessous de la vitesse de transition  $\Omega_t$ , ou par la résistance au-dessus.

On trouve la valeur de la vitesse de transition en égalant les expressions (25.67) et (25.68). En approchant  $\mu_2$  par  $1/(1 - \beta^2)$ , on obtient

$$\Omega_t = \frac{\sqrt{12}}{6\pi^2} \frac{1}{\psi R} \frac{\sigma_1}{\sqrt{\rho E}} \frac{1 - \beta^2}{\beta} \quad (25.69)$$

Il est remarquable que cette vitesse de transition soit indépendante de la longueur de la bielle.

Faisons une évaluation numérique pour de l'acier:  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ ;  $\sigma_1 = 50 \text{ MPa}$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ;  $\beta = 0,2$ ;  $\psi = 0,0642$ ;  $R = 0,1 \text{ m}$ . On trouve  $\Omega_t = 55,2 \text{ s}^{-1}$  ou  $527 \text{ t/min}$ .

Cette limite est relativement basse, par conséquent, *la plupart du temps il suffit de dimensionner les bielles à la résistance vis-à-vis des efforts cinétostatiques seulement.*

### Flambage

On sait (§ 21.3.5) qu'une bielle comprimée par une charge axiale pulsante est susceptible de flamber pour une charge critique inférieure à la charge critique statique du fait d'une instabilité paramétrique transversale. En supposant  $I_y < I_x$ , la pulsation propre en flexion dans le plan transversal  $x-x$  de la section (fig. 25.22) vaut, selon (13.7),

$$\omega_{1x} = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{E I_y}{\rho A}} \quad (25.70)$$

Dans le cas d'une section rectangulaire de largeur  $b$ , on trouve

$$\omega_{1x} = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{E}{12 \rho}} b \quad (25.71)$$

La bielle est comprimée par une force qui présente une composante alternative:

$$F = F_m + \hat{F}_a \cos \Omega t$$

Ecrivons le rapport de la force moyenne à la charge critique de flambage tirée de l'inéquation (21.21). Il vient:

$$\frac{F_m}{F_c} < \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \right] \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\hat{F}_a}{F_m}} \quad (25.72)$$

avec:

- $F_m$  force de compression moyenne
- $\hat{F}_a$  amplitude de la charge alternée
- $F_c$  force critique de flambage
- $\Omega$  pulsation de la composante alternée de la charge
- $\omega_1$  plus petite des pulsations propres de flexion de la bielle

Une vibration paramétrique puis le flambage dynamique surviennent lorsque cette inégalité n'est pas satisfaite. La force moyenne de flambage est toujours inférieure à la charge critique.

Calculons encore le rapport de la force de compression maximale

$$F_{\max} = F_m + \hat{F}_a$$

à la charge critique. On trouve la condition d'aptitude au service :

$$\frac{F_{\max}}{F_c} < \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \right] \frac{1 + \frac{\hat{F}_a}{F_m}}{1 + \frac{1}{2} \frac{\hat{F}_a}{F_m}} \quad (25.73)$$

La force maximale théorique est supérieure à la charge critique lorsque  $\Omega \ll \omega_1$ . Mais, compte tenu du caractère dangereux du flambage et de l'effet négatif de petites flexions initiales (§ 21.3.4), on respectera finalement la condition suivante :

$$F_{\max} < \frac{F_c}{S} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \right] \quad (25.74)$$

La valeur du facteur de sécurité  $S$  est celle communément admise pour le flambage : 3 à 5.

#### *Application numérique*

Une bielle en acier possède une section rectangulaire avec  $b = 0,035$  m et  $\ell = 0,9$  m. La formule (25.71) donne  $\omega_{1x} = 621 \text{ s}^{-1}$ . Le crochet de l'expression (25.74) prend une valeur significative, par exemple inférieure à 0,9, lorsque  $\Omega < 393 \text{ s}^{-1}$ .

On constate que le flambage dynamique par vibration paramétrique des bielles n'est à craindre que pour des bielles très élancées et rapides.

### **25.4.4 Fréquences propres de pièces**

Les calculs des fréquences ou pulsations propres des divers modes de pièces quelconques s'effectuent à l'aide de logiciels d'éléments finis; ils se vérifient expérimentalement par l'analyse modale. On peut évaluer la pulsation propre des premiers modes de modèles simples par les formules et méthodes habituelles, mais l'effet des liaisons est souvent difficile à apprécier. L'étude des poutres continues, pour lesquelles existent des solutions analytiques, permet d'avoir une idée de l'influence des liaisons.

Les pulsations propres de flexion d'une poutre sont données par [25.6, 25.7, 25.8]:

$$\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (25.75)$$

avec :

- $E$  module d'élasticité
- $\rho$  masse volumique
- $I$  moment quadratique de surface pour la flexion
- $A$  aire de la section

$\ell$  longueur de la poutre  
 $\lambda_k$  facteur d'onde

L'indice  $k$  indique l'ordre du mode. La valeur numérique du facteur d'onde dépend des conditions aux limites. Le tableau 25.24 donne des valeurs pour les deux premiers modes. Comparons les pulsations propres  $\omega_k$  d'une poutre encastree, ou avec des appuis, aux pulsations propres  $\omega_{\ell k}$  d'une poutre libre-libre en calculant le rapport

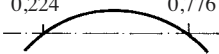
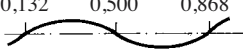
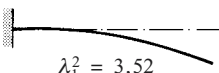
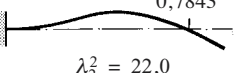
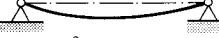


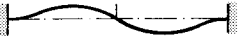
$$\psi_k = \frac{\omega_k}{\omega_{\ell k}}$$

(25.76)

La valeur de ce rapport figure aussi dans le tableau. On constate que :

- les pulsations propres d'une poutre encastree à ses deux extremités sont égales à celles d'une poutre libre-libre;
- les pulsations propres avec d'autres liaisons sont inférieures à celles d'une poutre libre-libre; cet effet est particulièrement important avec une poutre encastree-libre.

Tableau 25.24 Pulsations propres de poutres continues.

Liaisons	Mode 1	Mode 2
libre-libre	<div>0,224 0,776</div>  <div><math>\lambda_1^2 = 22,4</math> <math>\psi_1 = 1</math></div>	<div>0,132 0,500 0,868</div>  <div><math>\lambda_2^2 = 61,7</math> <math>\psi_2 = 1</math></div>
encastree-libre	 <div><math>\lambda_1^2 = 3,52</math> <math>\psi_1 = 0,157</math></div>	<div>0,7843</div>  <div><math>\lambda_2^2 = 22,0</math> <math>\psi_2 = 0,357</math></div>
articulee-articulee	 <div><math>\lambda_1^2 = 9,87</math> <math>\psi_1 = 0,441</math></div>	<div>0,500</div>  <div><math>\lambda_2^2 = 39,5</math> <math>\psi_2 = 0,640</math></div>
encastree-encastree	 <div><math>\lambda_1^2 = 22,4</math> <math>\psi_1 = 1</math></div>	<div>0,500</div>  <div><math>\lambda_2^2 = 61,7</math> <math>\psi_2 = 1</math></div>

On a toujours intérêt à dimensionner les pièces de manière à ce que la pulsation propre en mode libre-libre soit la plus haute possible. On maximise la pulsation propre en maximisant la rigidité, tout en minimisant la masse. Il n'existe pas de profil longitudinal optimal des poutres.

On élève la pulsation propre la plus basse d'une longue pièce en prévoyant des liaisons supplémentaires. Par exemple, une poutre est articulée à ses extrémités; selon le tableau 25.24, sa première pulsation propre est proportionnelle à  $\lambda_1^2 = 9,87$ . Avec



une nouvelle articulation disposée au milieu de la poutre, son premier mode vibratoire sera identique au second mode de la poutre avec deux articulations; sa pulsation propre la plus basse sera  $39,5/9,87 = 4$  fois plus élevée. Avec 4 articulations elle serait 9 fois plus haute. C'est pourquoi on saisit de longues pièces en plusieurs points, on nervure des tôles et des voiles de bâtis.

## 25.5 VITESSE CRITIQUE

### 25.5.1 Critères de dimensionnement

Un arbre ou un rotor ne doit jamais fonctionner longtemps au voisinage de sa vitesse critique. Pour la vitesse de service  $\omega$ , la vitesse critique doit satisfaire les relations suivantes:

- régime sous-critique:

$$\omega_c \geq \frac{\omega}{\beta_1} \quad (25.77)$$

- régime surcritique:

$$\omega_c \leq \frac{\omega}{\beta_2} \quad (25.78)$$

On admet généralement  $\beta_1 = 0,7$  et  $\beta_2 = 1,25$ . Ces relations permettent de dimensionner le diamètre de l'arbre nécessaire du point de vue de la vitesse critique. Mais l'arbre doit aussi résister aux charges qu'il supporte.

Examinons le dimensionnement d'un arbre lisse et celui d'un arbre de rotor.

### 25.5.2 Arbres lisses

#### Résistance

Un arbre creux transmet un couple de torsion constant (fig. 25.25). La formule (24.62) étendue à un arbre creux donne le diamètre extérieur de l'arbre cherché:

$$D_\sigma \geq \frac{1}{\psi_1} \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{M_t}{\tau_{t \text{ pd}}}} \quad (25.79)$$

avec:

$M_t$  couple à transmettre

$\tau_{t \text{ pd}}$  contrainte de torsion de prédimensionnement (§ 24.5.1)

Le facteur de forme vaut

$$\psi_1 = \sqrt[3]{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4} \quad (25.80)$$

avec :

$D$  diamètre extérieur  
 $d$  diamètre intérieur

En pratique, on se donne la valeur du rapport des diamètres selon les semi-fabriqués; il en découle celle du facteur de forme.

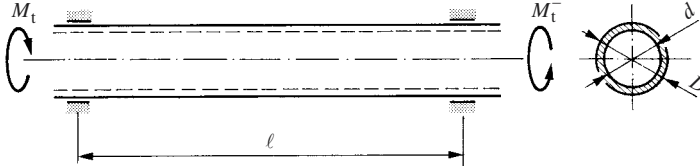


Fig. 25.25 Arbre lisse creux sur deux paliers.

Lorsque l'arbre transmet la puissance  $P$ , on a

$$D_{\sigma} \geq \frac{1}{\psi_1} \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{P}{\tau_{t \text{ pd}} \omega}} \quad (25.81)$$

A puissance constante, le diamètre décroît lorsque la vitesse augmente.

### Vitesse critique

La formule (18.40) permet de dimensionner l'arbre du point de vue de la vitesse critique lorsqu'il est guidé par deux paliers. En faisant  $k = 1$  pour la première vitesse critique, et avec la relation (25.77), en régime sous-critique, on trouve

$$D_{\Omega} \geq \frac{4}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{E} \frac{\ell^2}{\psi_2} \frac{\omega}{\beta_1}} \quad (25.82)$$

avec :

$E$  module d'élasticité  
 $\ell$  distance entre les paliers  
 $\rho$  masse volumique  
 $\omega$  vitesse de l'arbre  
 $\beta_1$  rapport de pulsation limite inférieur

et le facteur de forme

$$\psi_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2} \quad (25.83)$$

Le diamètre de l'arbre est proportionnel à sa vitesse.

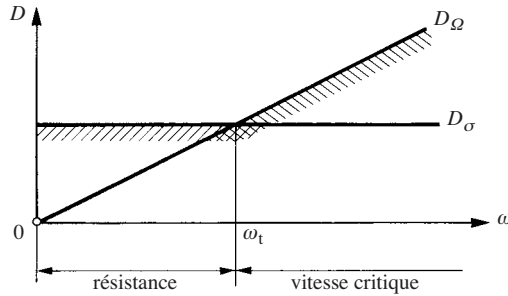
### Diamètre de l'arbre, domaines de dimensionnement

Le diamètre nécessaire pour résister à un couple constant et celui calculé selon le critère de la vitesse critique sont représentés dans la figure 25.26 en fonction de la vitesse de rotation. Le critère de résistance détermine le diamètre de l'arbre en dessous de la vitesse de transition  $\omega_t$ , celui de vitesse critique prédomine au-dessus.

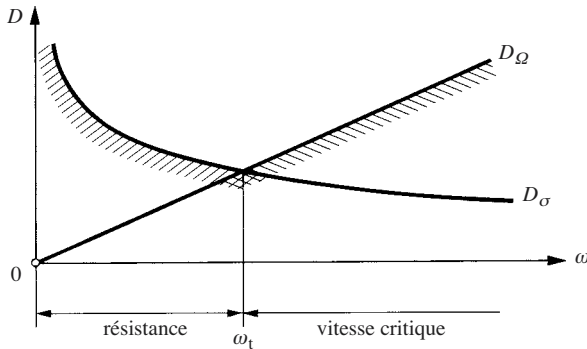
Pour un diamètre d'arbre donné, la vitesse de transition se tire de (25.82). On trouve

$$\omega_t = \psi_2 \frac{\pi^2}{4} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{D_\sigma}{\ell^2} \beta_1 \quad (25.84)$$

La vitesse de transition est inversement proportionnelle au carré de la distance entre paliers, elle augmente lorsque l'épaisseur de l'arbre diminue, car  $\psi_2$  varie entre 1 pour un arbre plein et 2 pour un tube infiniment mince. Rappelons que la minceur d'un tube est limitée par le phénomène de voilement (§ 21.3.6).



**Fig. 25.26** Diamètre d'un arbre calculé pour un couple constant et selon la vitesse critique en fonction de la vitesse de l'arbre.



**Fig. 25.27** Diamètre d'un arbre calculé pour une puissance constante et selon la vitesse critique en fonction de la vitesse de l'arbre.

Dans le cas d'un arbre transmettant une puissance constante, son diamètre résistant (25.81) est représenté dans la figure 25.27 en fonction de la vitesse. La vitesse de transition se trouve en égalant (25.81) et (25.82). On obtient

$$\omega_t = 2,957 \left( \frac{\psi_2}{\psi_1} \beta_1 \right)^{0,75} \left[ \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1,5} \frac{1}{\tau_{t \text{ pd}}} \right]^{0,25} \frac{P^{0,25}}{\ell^{1,5}} \quad (25.85)$$

Le diamètre d'un arbre qui tourne plus lentement que cette valeur est déterminé par sa résistance au couple à transmettre. A plus grande vitesse, c'est au contraire la vitesse critique qui fixe le diamètre.

### Application numérique

Un arbre plein en acier tourne à 3000 t/min et transmet 300 kW. Les paliers sont distants de 2 m.

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^2$$

$$\tau_{t \text{ pd}} = 40 \text{ MPa}$$

$$\beta_1 = 0,7$$

Le diamètre nécessaire pour transmettre le couple vaut, selon (25.81),

$$D_\sigma \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{300 \times 10^3}{40 \times 10^6 \times 314}} = 0,0495 \text{ m}$$

Le diamètre satisfaisant le critère de vitesse critique se calcule par (25.82):

$$D_\Omega \geq \frac{4}{\pi^2} \sqrt{\frac{7850}{200 \times 10^9}} 2^2 \frac{314}{0,7} = 0,144 \text{ m}$$

L'arbre doit être trois fois plus gros que le diamètre voulu par la résistance à cause de la haute vitesse. Avec  $D_\sigma = 50 \text{ mm}$ , la vitesse de transition n'est que 109 rad/s ou 1040 t/min. Cet exemple prouve qu'il faut étudier les arbres de transmission très attentivement.

### 25.5.3 Rotors

La vitesse critique d'une masse tournante située entre deux paliers, au milieu de la portée (fig. 25.28a), est donnée par la formule (18.12). En introduisant l'expression de la rigidité de flexion de l'arbre en fonction du diamètre et en négligeant l'amortissement, on obtient sa vitesse critique:

$$\omega_c = d^2 \sqrt{\frac{3\pi}{4} \frac{E}{m \ell^3}} \quad (25.86)$$

avec:

$E$  module d'élasticité de l'acier de l'arbre

$\ell$  distance entre les paliers

$m$  masse du disque  
 $d$  diamètre de l'arbre

En comparant cette formule à (25.48), on constate que la vitesse critique et la pulsation propre en torsion sont proportionnelles au carré du diamètre de l'arbre. On aboutit aux mêmes conclusions que lors de l'étude de l'arbre en vibration de torsion (§ 25.4.2), il n'y a pas lieu d'y revenir. La figure 25.19 est aussi valable.

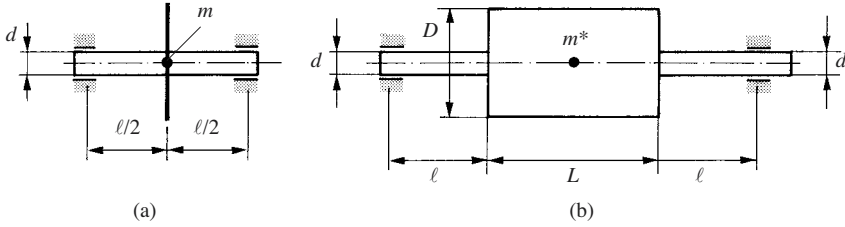


Fig. 25.28 Rotors: (a) disque plat au milieu de la portée; (b) rotor réel symétrique.

Dans le cas des rotors réels, la rigidité en flexion est déterminée principalement par celle des demi-arbres. La masse du rotor est habituellement donnée par sa construction, on ne peut pratiquement agir que sur le diamètre des arbres et sur la portée pour influencer la vitesse critique. Ces rotors sont le siège de phénomènes compliqués qui ont été abordés à la section 18.2; les turbomachines, comme les turbines à gaz ou à vapeur, exigent des calculs étendus.

Considérons le rotor symétrique représenté à la figure 25.28(b). Du point de vue des vibrations latérales, sa masse est égale à la somme de la masse du tambour et de la masse réduite des demi-arbres:

$$m = \alpha \frac{\pi}{4} D^2 L \rho + 2 \times 0,243 \frac{\pi}{4} d^2 \ell \rho$$

où  $\alpha$  est le facteur de remplissage de volume exprimant le fait que le rotor contient des cavités; le facteur 0,243 réduit la masse des demi-arbres au milieu de la portée selon la formule (13.8).

Les arbres sont encastres dans le rotor, par conséquent la rigidité en flexion vaut

$$k = 2 \frac{3EI}{\ell^3} = 3 \frac{\pi}{32} \frac{Ed^4}{\ell^3}$$

Après un changement d'écriture, on obtient la vitesse critique sous la forme suivante:

$$\omega_c = \frac{d}{\ell^2} \sqrt{\frac{3}{8} \frac{E}{\rho} \frac{1}{0,486 + \alpha \frac{L}{\ell} \left(\frac{D}{d}\right)^2}} \quad (25.87)$$

Lorsque  $D \gg d$ , la vitesse critique augmente approximativement avec le carré du diamètre de l'arbre.

La vitesse critique doit satisfaire l'une ou l'autre des relations (25.77) et (25.78). On obtient une inéquation qui permet de calculer le diamètre de l'arbre.

Il convient de tenir compte de l'effet gyroscopique lorsque le rotor n'est pas situé au milieu de la portée des paliers (§ 18.2.6).

L'arbre doit naturellement aussi transmettre le couple de la machine. Comme pour l'arbre lisse, il existe un domaine de vitesse élevée où la vitesse critique détermine le diamètre de l'arbre du rotor.

## 25.6 ÉCHAUFFEMENT ET USURE

### 25.6.1 Généralités

La taille d'un palier résulte immédiatement du diamètre de l'arbre qu'il porte, mais le choix du type de palier dépend notamment de sa capacité de charge. Cette dernière est limitée par :

- l'échauffement et l'usure des paliers lisses à frottement sec ou mixte;
- l'échauffement et l'épaisseur du film lubrifiant des paliers lisses hydrodynamiques ou hydrostatiques;
- l'échauffement et la fatigue des roulements.

On a montré dans les sections précédentes que, dans certains domaines de vitesse, le diamètre des arbres dimensionnés sur la base de critères dynamiques est supérieur à celui calculé selon le critère de résistance. On se propose d'étudier l'influence de l'accroissement du diamètre et de la vitesse sur l'échauffement et la longévité des paliers.

On verra aussi comment l'échauffement des embrayages et des freins limite la vitesse des machines dans lesquelles ces organes sont actionnés cycliquement.

### 25.6.2 Paliers lisses en régime de frottement sec ou mixte

#### Grandeurs caractéristiques

Les paramètres géométriques d'un palier lisse sont :

- $d$  diamètre de l'arbre,
- $B$  longueur du coussinet,
- $j$  jeu diamétral,

et les paramètres fonctionnels sont :

- $F$  charge radiale,
- $\omega$  vitesse.

Le fonctionnement d'un palier lisse dépend des grandeurs suivantes :

- la pression moyenne de référence (§ 8.7.4) :

$$\bar{p} = \frac{F}{Bd}$$

- la vitesse périphérique de l'arbre :

$$v = \frac{d}{2} \omega$$

- le produit caractéristique :

$$\bar{p} v$$

### Limites de fonctionnement

La performance d'un palier lisse à frottement mixte est limitée par quatre phénomènes dont les relations de sécurité fonctionnelles s'expriment comme suit :

- l'usure doit rester dans une limite acceptable (§ 3.6.1) :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{p} v \leq (\bar{p} v)_{\text{adm U}} \\ v \leq v_{\text{adm U}} \end{array} \right\} \quad (25.88)$$

- le palier ne doit pas chauffer exagérément (19.89) :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{p} v \leq (\bar{p} v)_{\text{adm T}} \\ v \leq v_{\text{adm T}} \end{array} \right\} \quad (25.89)$$

- le coussinet ne doit pas subir de déformation plastique :

$$\bar{p} \leq \bar{p}_{\text{adm}} \quad (25.90)$$

- le palier ne doit pas gripper :

$$v \leq v_{\text{adm}} \quad (25.91)$$

Les diverses valeurs admissibles sont connues empiriquement.

Il faut maintenant traduire ces limites physiques en limites fonctionnelles explicites. Pour cela, calculons le produit caractéristique :

$$\bar{p} v = \frac{F}{Bd} \frac{d}{2} \omega = \frac{F}{2B} \omega$$

ou, la relation entre les paramètres fonctionnels,

$$F \omega = 2 B \bar{p} v \quad (25.92)$$

*Pour une longueur de coussinet constante, le produit caractéristique  $\bar{p} v$  est indépendant du diamètre de l'arbre ; le produit  $F \omega$  l'est aussi.*

On a l'habitude de donner aux coussinets une longueur proportionnelle au diamètre de l'arbre en fixant la *longueur relative*

$$\beta = \frac{B}{d} \quad (25.93)$$

Il vient alors

$$F\omega = 2\beta d \bar{p}v \quad (25.94)$$

*Pour une longueur relative constante, le produit caractéristique  $\bar{p}v$  est inversement proportionnel au diamètre de l'arbre. Le produit  $F\omega$  est proportionnel au diamètre.*

On a vu dans les sections précédentes que le diamètre d'un arbre calculé selon un critère dynamique augmente avec sa vitesse. Ecrivons, d'une manière générale,

$$d = a_1 \omega^m$$

où  $a_1$  est un coefficient qui dépend du critère de dimensionnement, puis introduisons dans (25.94), il vient

$$F\omega^n = 2\beta a_1 \bar{p}v \quad (25.95)$$

L'exposant  $n = 1 - m$  est toujours positif; il est nul si l'arbre est dimensionné à la vitesse critique parce que dans ce cas  $d \sim \omega$  (25.82). Pour un arbre calculé par la formule (25.51), on a  $n = 0,5$ .

La charge radiale admissible est proportionnelle à la pression moyenne admissible. Alors:

$$F_{\text{adm}} = Bd \bar{p}_{\text{adm}} \quad (25.96)$$

ou

$$F_{\text{adm}} = \beta d^2 \bar{p}_{\text{adm}} \quad (25.97)$$

Enfin, la vitesse admissible de l'arbre en fonction de la vitesse périphérique vaut

$$\omega_{\text{adm}} = \frac{2}{d} v_{\text{adm}} \quad (25.98)$$

La figure 25.29 représente ces limites de fonctionnement. On y trouve:

- l'hyperbole limite de la vitesse d'usure (1);
- l'hyperbole limite d'échauffement (2);
- la droite limite de charge pour la déformation (3);
- la droite limite de vitesse pour l'usure ou le grippage (4).

## Conclusions

Cette étude permet d'énoncer les relations suivantes entre les grandeurs fonctionnelles d'un palier lisse, charge radiale  $F$  et vitesse de l'arbre  $\omega$ , en régime de frottement sec ou mixte, et le diamètre de l'arbre:

- La vitesse maximale admissible est inversement proportionnelle au diamètre.



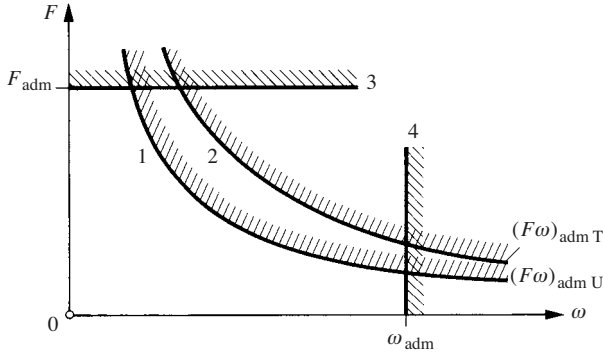


Fig. 25.29 Limites de fonctionnement d'un palier lisse en frottement sec ou mixte.

- La charge maximale admissible est proportionnelle au diamètre si la longueur du coussinet est constante; elle est proportionnelle au carré du diamètre si la longueur relative est constante.
- Le produit caractéristique  $F\omega$  est indépendant du diamètre si la longueur du coussinet est constante; il est proportionnel au diamètre si la longueur relative du coussinet est constante.
- Dans le cas d'un arbre dimensionné sur la base d'un critère dynamique, c'est-à-dire si le diamètre ne dépend pas de la charge radiale, on peut utiliser des coussinets de même longueur que ceux qu'il faudrait pour porter l'arbre dimensionné uniquement à la résistance. Leur longueur relative diminue lorsque le diamètre augmente.
- Pour un diamètre d'arbre donné, la vitesse de l'arbre et la charge radiale sont limitées par les qualités tribologiques du coussinet (§ 2.4.8).
- A grande vitesse, on est conduit à devoir remplacer les paliers lisses à frottement mixte par des roulements ou par des paliers à frottement fluide.

### 25.6.3 Paliers lisses hydrodynamiques

Le comportement des paliers lisses hydrodynamiques est régi par le nombre de Sommerfeld :

$$So = \frac{F\psi^2}{BD\eta\omega} = \frac{F\psi^2}{\beta D^2\eta\omega} \quad (25.99)$$

avec :

$B$	longueur du coussinet
$F$	charge radiale
$D$	alésage du coussinet
$\beta = B/D$	longueur relative du coussinet
$\eta$	viscosité dynamique du lubrifiant
$\omega$	vitesse de l'arbre
$\psi = j/D$	jeu relatif
$j$	jeu diamétral de l'arbre dans le coussinet

## Usure

Les paliers lisses hydrodynamiques ne s'usent que pendant les périodes de démarrage et de ralentissement lorsque l'épaisseur du film lubrifiant est insuffisante pour séparer complètement les surfaces (§ 2.4.2). Pendant le régime normal, l'arbre ne touche pas le coussinet, par conséquent l'usure est nulle.

L'épaisseur minimale du film lubrifiant augmente lorsque le nombre de Sommerfeld diminue. Par conséquent, on lit dans la formule (25.99) que l'accroissement du diamètre ou de la vitesse d'un arbre ne pose pas de problème du point de vue du régime de lubrification.

## Echauffement

La température d'un palier ne doit pas être trop élevée; en outre, l'huile ne doit pas s'échauffer exagérément en le traversant.

La puissance dissipée est donnée par l'expression :

$$P_p = \mu F \frac{d}{2} \omega \quad (25.100)$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement apparent.

Sans entrer dans les détails, exposés par exemple par Lang [25.9], on peut classer les paliers hydrodynamiques en deux catégories selon que le nombre de Sommerfeld est inférieur ou supérieur à l'unité.

### *Paliers rapides ou peu chargés, $So < 1$*

Le coefficient de frottement s'exprime par l'expression approchée :

$$\mu \approx \frac{3\psi}{So} \quad (25.101)$$

Avec cette valeur et (25.99), la puissance dissipée devient

$$P_p = \frac{3}{2} \frac{\eta}{\psi} \beta d^3 \omega^2 \quad (25.102)$$

Dans ce domaine, la perte est indépendante de la charge. Les arbres dimensionnés selon un critère de vitesse critique ou de fréquence propre sont plus gros que ceux dimensionnés seulement à la résistance. Pour un rotor dont l'arbre est dimensionné à la vitesse critique,  $d_\Omega \sim \omega^{1/2}$  et  $P_p \sim \omega^{3.5}$ . En cas de dimensionnement à la résistance, à puissance constante,  $d_\Omega \sim \omega^{-1/3}$  et  $P_p \sim \omega$ .

Dans ce domaine, l'échauffement de l'huile traversant le palier est pratiquement indépendant du diamètre de l'arbre, mais inversement proportionnel au jeu relatif.

Malgré les apparences, les paliers de turbomachines fonctionnent habituellement dans ce domaine du nombre de Sommerfeld parce que ces machines tournent vite et que leurs arbres sont gros.

### *Paliers fortement chargés, $So > 1$*

Dans ce domaine, le coefficient de frottement peut s'estimer par

$$\mu \approx \frac{3\psi}{\sqrt{So}} \quad (25.103)$$

En portant cette expression dans (25.100) et avec (25.99), on obtient la puissance dissipée

$$P_p = \frac{3}{2} \sqrt{\eta \beta F} d^2 \omega^{3/2} \quad (25.104)$$

La perte est indépendante du jeu relatif. Là encore, on voit qu'elle est plus forte avec des arbres calculés selon un critère de vitesse.

L'échauffement de l'huile est pratiquement inversement proportionnel au diamètre et au jeu relatif.

### Conclusions

- La perte ou puissance-chaleur d'un palier hydrodynamique fortement chargé ( $So > 1$ ) croît comme le carré du diamètre de l'arbre et jusqu'au cube de ce diamètre s'il est peu chargé ( $So < 1$ ).
- La surface de refroidissement à l'air des paliers étant grossièrement proportionnelle au carré des dimensions, les paliers peu chargés peuvent poser un problème de refroidissement si l'arbre est gros.
- Le refroidissement naturel n'est praticable que pour les paliers portant de petits arbres lents. Les gros paliers ou les arbres rapides exigent un graissage forcé avec refroidissement auxiliaire.

## 25.6.4 Roulements

### Dimensionnement

La taille d'un roulement doit satisfaire deux critères de dimensionnement :

- la longévité doit être suffisamment élevée pour permettre une exploitation rationnelle;
- la vitesse ne doit pas dépasser une certaine limite.

La longévité des roulements est limitée par des phénomènes de fatigue. Elle diminue lorsque la vitesse et la charge augmentent ou lorsqu'ils sont exposés à une température supérieure à  $150^\circ\text{C}$ . Enfin, leur longévité dépend de la viscosité de l'huile et se raccourcit fortement lorsqu'ils fonctionnent dans un milieu pollué. Il est important de mettre les roulements à l'abri des impuretés par des étanchéités efficaces.

La longévité de base d'un roulement exprimée en heures de fonctionnement avec un taux de défaillance de 10% se calcule par la formule bien connue :

$$L_h = \frac{10^6}{60 n} \left( \frac{C}{F_e} \right)^p = \frac{1745}{\omega} \left( \frac{C}{F_e} \right)^p \quad (25.105)$$

avec :

- $n$  vitesse [t/min]
- $\omega$  vitesse angulaire [rad/s]

- $C$  capacité de charge dynamique de base du roulement [N]  
 $F_e$  charge équivalente [N]  
 $p$  exposant de fatigue

L'influence du graissage et de la propreté s'exprime par des facteurs qui viennent corriger la longévité donnée par la formule ci-dessus (voir la formule (24.114) et les catalogues des fabricants).

Le dimensionnement d'un roulement consiste habituellement à choisir sa taille dans un catalogue de manière à ce qu'il offre la longévité attendue. Mais il est intéressant d'évaluer comment la longévité dépend de l'alésage du roulement.

La charge équivalente résulte de la combinaison des charges radiales et axiales. Son calcul dépend du type de roulement, les formules figurent dans les catalogues. La capacité de charge dynamique de base augmente avec la taille des roulements, elle est plus grande pour les roulements à galets que pour les roulements à billes ayant le même alésage. On estime l'influence de la taille par la formule

$$C = c d^m \quad (25.106)$$

avec :

- $c$  coefficient dépendant du type de roulement et de la série de grandeur  
 $d$  alésage  
 $m$  exposant d'alésage

Le tableau 25.30 donne la valeur des exposants de longévité, d'alésage et de leur produit.

Introduisons l'expression (25.106) de la capacité de charge dynamique dans (25.105). Il vient

$$L_h = \frac{1745}{\omega} \left( \frac{c}{F_e} \right)^p d^{mp} \quad (25.107)$$

**Tableau 25.30** Exposants caractéristiques des roulements.

Type de roulement	$p$	$m$	$mp$
roulements à billes à gorges profondes	3	1,5	4,5
roulements à galets cylindriques	10/3	1,5	5
roulements à rouleaux coniques	10/3	1,3	4,33
roulements à rotule	10/3	1,3	4,33
butées à billes	3	1,1	3,3

## Longévité selon le critère de dimensionnement de l'arbre

### Critère de résistance

Étudions l'influence de la vitesse d'un arbre transmettant une puissance  $P$  sur la longévité de ses roulements. En introduisant l'expression (25.81) du diamètre de l'arbre dans (25.107), on trouve :

$$L_{h\sigma} = \frac{1745}{\omega} \left( \frac{c}{F_c} \right)^p \left( \frac{16}{\pi} \frac{P}{\tau_{t\text{pd}} \omega} \right)^{\text{mp}/3} \frac{1}{\psi_1^{\text{mp}}} \quad (25.108)$$

Pour des roulements à galets cylindriques, on a, par exemple, avec la valeur des exposants du tableau 25.30 :

$$L_{h\sigma} \sim \frac{P^{5/3}}{\omega^{8/3}} \quad (25.109)$$

La longévité croît avec la puissance transmise parce que l'arbre est plus gros, mais diminue très vite lorsque la vitesse augmente. Cette conclusion n'est valable que tant que la charge équivalente est indépendante de la puissance; par exemple pour un arbre de transmission. Le cas des roulements portant des engrenages a été examiné au paragraphe 24.7.3.

#### *Critère de pulsation propre à la torsion*

Selon la formule (25.51), le respect d'une pulsation relative donnée impose  $d \sim \omega^{1/2}$ . Par conséquent, avec (25.107),

$$L_{h\Omega} \sim \omega^{\frac{\text{mp}}{2} - 1} \quad (25.110)$$

Par exemple, pour un roulement à billes à gorges profondes, on a :

$$L_{h\Omega} \sim \omega^{1,25} \quad (25.111)$$

et pour un roulement à galets cylindriques :

$$L_{h\Omega} \sim \omega^{1,5} \quad (25.112)$$

La longévité de roulements d'arbres calculés sur la base d'une pulsation relative constante en torsion augmente avec la vitesse de l'arbre. La figure 25.31 représente l'allure de la longévité de roulements en fonction de la vitesse et selon le critère de dimensionnement. La longévité est la plus courte à la vitesse de transition  $\omega_t$  pour laquelle le diamètre de l'arbre est le plus petit. Ce diamètre minimal est aussi visible dans la figure 25.27.

#### *Critère de vitesse critique*

L'accroissement de longévité avec la vitesse est encore plus rapide en cas de dimensionnement à la vitesse critique de l'arbre d'un rotor long (fig. 25.28b) car alors  $d \sim \omega$ .

#### **Vitesse limite**

Les forces d'inertie des corps roulants, force centrifuge et couple gyroscopique, limitent la vitesse des roulements (§ 16.3.2). L'échauffement joue aussi un rôle

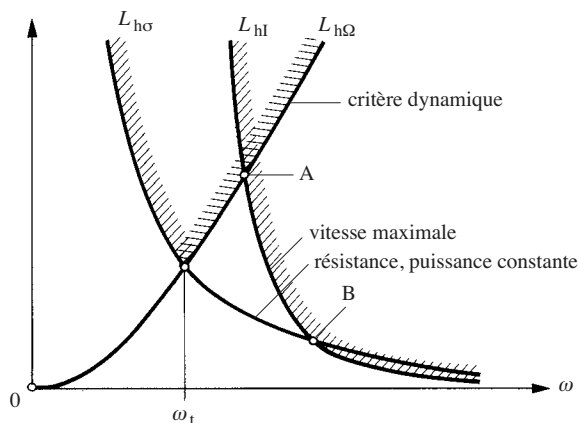


Fig. 25.31 Longévité de roulements selon le critère de dimensionnement.

déterminant. On exprime habituellement l'aptitude au service du point de vue de ces phénomènes par la valeur maximale limite de l'*indice de vitesse*

$$I_{n \text{ lim}} = (nd)_{\text{lim}} \quad [\text{mm/min}] \quad (25.113)$$

qui est le produit de la vitesse [t/min] par l'alésage [mm].

L'alésage maximal d'un roulement limité par l'indice de vitesse, exprimé en mètre, vaut

$$d_{\text{max}} = \frac{I_{n \text{ lim}}}{n} 10^{-3} \approx \frac{I_{n \text{ lim}}}{\omega} 10^{-4} \quad (25.114)$$

La vitesse périphérique maximale de l'arbre se calcule par

$$v_{\text{max}} \approx 52 \times 10^{-6} I_{n \text{ lim}} \quad (25.115)$$

Cette limite est relativement basse; elle vaut, par exemple, 26 m/s pour  $I_{n \text{ lim}} = 500\,000$  mm/min. En introduisant l'expression (25.114) dans (25.107), on obtient la longévité maximale en fonction de la vitesse

$$L_{\text{hl}} = 1745 \left( I_{n \text{ lim}} 10^{-4} \right)^{\text{mp}} \left( \frac{c}{F_e} \right)^p \frac{1}{\omega^{1 + \text{mp}}} \quad (25.116)$$

Cette fonction est représentée dans la figure 25.31. L'intersection A donne la longévité et la vitesse les plus grandes en cas de dimensionnement selon un critère dynamique, tandis que le point B donne la vitesse la plus haute acceptable en cas de dimensionnement à la résistance pour une puissance constante.

## Conclusions

La longévité des roulements est plus grande si le diamètre des arbres est déterminé par des critères dynamiques parce qu'ils sont plus gros que si le critère de résistance prévaut. La valeur de l'indice de vitesse limite le diamètre ou la vitesse de l'arbre. En cas de nécessité, il faut recourir à d'autres types de paliers.

### 25.6.5 Embrayages, freins

On rencontre des machines (fig. 25.32) dans lesquelles un embrayage commande un récepteur (2) chaque fois que l'arbre primaire (1) a effectué un certain nombre de tours. En accroissant la vitesse, l'énergie dissipée dans l'embrayage croît très vite (§ 15.5.4) et le temps disponible pour refroidir l'embrayage au cours d'un cycle est toujours plus bref. Ces phénomènes conduisent à une limitation thermique de la vitesse de l'arbre primaire ou de la fréquence des cycles.

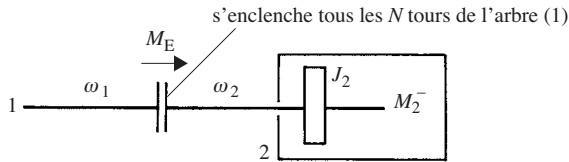


Fig. 25.32 Embrayage périodique d'un groupe.

La durée du processus d'embrayage est généralement brève par rapport à la constante de temps thermique de l'embrayage. On a démontré (§ 19.6.8) que, dans ce cas, la fréquence maximale de processus successifs réguliers est donnée par la formule

$$f_{lim} = \frac{h A (T_{adm} - T_a)}{W_p} \quad (19.95)$$

avec :

- $A$  aire de refroidissement de l'embrayage
- $h$  coefficient de transmission de chaleur
- $T_{adm}$  température admissible du corps de l'embrayage
- $T_a$  température ambiante
- $W_p$  énergie mécanique dissipée en chaleur lors d'un processus d'embrayage

L'énergie dissipée dans l'embrayage à chaque processus, lorsque l'arbre secondaire est initialement arrêté, vaut

$$W_p = \frac{M_E}{M_E - M_2} \frac{1}{2} J_2 \omega_1^2 \quad (14.108)$$

avec :

- $M_E$  couple de glissement de l'embrayage
- $M_2$  couple d'entraînement statique de l'arbre secondaire
- $J_2$  moment d'inertie sur l'arbre secondaire
- $\omega_1$  vitesse de l'arbre primaire

Substituons cette valeur dans l'expression de la fréquence limite, il vient :

$$f_{\text{lim}} = 2(T_{\text{adm}} - T_a) \frac{h A}{J_2} \frac{M_E - M_2}{M_E} \frac{1}{\omega_1^2} \quad (25.117)$$

La fréquence limite est inversement proportionnelle au carré de la vitesse de l'arbre primaire. Cette équation peut servir à calculer la vitesse maximale de l'arbre si la fréquence des processus d'embrayage est imposée.

L'embrayage est souvent actionné cycliquement, chaque fois que l'arbre primaire a effectué  $N$  tours, avec la fréquence

$$f = \frac{\omega_1}{2\pi N} \quad (25.118)$$

En égalant cette expression avec (21.117), on obtient une équation qui fournit la vitesse maximale de l'arbre

$$\omega_{1 \text{ max}} = \sqrt[3]{4\pi(T_{\text{adm}} - T_a) \frac{h A}{J_2} \frac{M_E - M_2}{M_E} N} \quad (25.119)$$

La vitesse admissible de l'arbre primaire d'un embrayage augmente avec la racine cubique du nombre de tours effectués par l'arbre entre deux processus d'embrayages successifs.

On trouve la fréquence maximale en introduisant la vitesse dans (25.118), soit :

$$f_{\text{max}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi^2}(T_{\text{adm}} - T_a) \frac{h A}{J_2} \frac{M_E - M_2}{M_E} \frac{1}{N^2}} \quad (25.120)$$

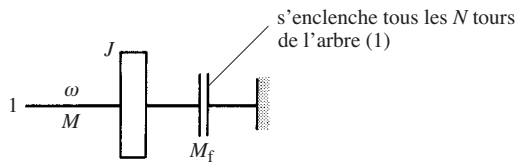


Fig. 25.33 Schéma d'un arbre avec frein.

Certaines machines sont freinées périodiquement, par exemple les presses à excentrique exploitées au coup par coup. L'énergie cinétique dissipée dans chaque processus chauffe le frein. En raisonnant comme pour l'embrayage et en s'appuyant sur le schéma de la figure 25.33, la vitesse maximale de l'arbre portant le frein vaut

$$\omega_{\text{max}} = \sqrt[3]{4\pi(T_{\text{adm}} - T_a) \frac{h A}{J} \frac{M_f - M}{M_f} N} \quad (25.121)$$



avec :

$A$	aire de refroidissement du frein
$M$	couple moteur appliqué à l'arbre
$M_f$	couple de freinage
$J$	moment d'inertie du mécanisme réduit au frein
$N$	nombre de tours de l'arbre entre chaque freinage
$T_a$	température ambiante
$T_{adm}$	température admissible du corps du frein
$h$	coefficient de transmission de chaleur

Ce calcul est valable pour un frein à friction dont la période d'un cycle est plus courte que 10% de sa constante de temps thermique.

Pour accroître la vitesse des mécanismes, il faut :

- réduire l'inertie du mécanisme entraîné par un embrayage ou l'inertie de tout le groupe freiné;
- activer le refroidissement;
- accroître la surface de refroidissement;
- accroître le couple de patinage de l'embrayage ou du frein.

Sous réserve de ne pas trop augmenter l'inertie totale (§ 14.7.4), il est avantageux d'utiliser un embrayage ou un frein plus grand que celui qui est strictement nécessaire du point de vue de la durée de synchronisation ou de freinage afin d'augmenter la surface de refroidissement. Il convient alors de diminuer éventuellement la force de serrage des garnitures pour que la commande du mouvement ne soit pas trop brutale.

## 25.7 DÉFORMATIONS STATIQUES

Les déformations statiques sont susceptibles de perturber le fonctionnement des engrenages, des courroies plates, des mécanismes articulés et des guidages. Le souci de limiter les déformations conduit à dimensionner les pièces en conséquence.

A titre d'exemple, considérons l'arbre qui porte une vis sans fin (fig. 25.34). Il est fléchi par la force radiale appliquée à la vis. On limite la flèche pour ne pas trop perturber l'engrènement de la vis avec la roue, soit

$$f = \frac{F \ell^3}{48 EI} \leq f_{lim} \quad (25.122)$$

avec :

$F$	force latérale
$E$	module d'élasticité du matériau de l'arbre
$I = \frac{\pi}{64} d^4$	moment quadratique de surface de l'arbre
$d$	diamètre de l'arbre
$\ell$	portée

La flèche limite est en relation avec la portée ou avec le module  $m$  de la vis; on admet qu'elle vaut  $0,004 m$  pour une vis en acier trempé et  $0,01 m$  pour une vis en acier amélioré.

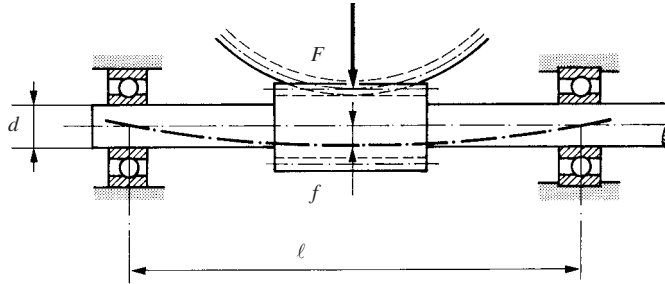


Fig. 25.34 Arbre de la vis d'un réducteur à vis sans fin.

La force latérale est proportionnelle au couple  $M_1$  appliqué à la vis, soit

$$F = \chi \frac{2 M_1}{d_1} \quad (25.123)$$

où  $d_1$  est le diamètre primitif de la vis et  $\chi$  un facteur qui dépend de l'angle de montée de la vis, de l'angle de pression et de l'angle de frottement entre la vis et la roue: voir, par exemple, [25.3, 25.10, 25.11].  $\chi$  vaut 1,3 à 2. On tire le diamètre de l'arbre nécessaire pour que la flèche de l'arbre reste dans la limite acceptable de l'inéquation (25.122) après y avoir porté l'expression de la force. On obtient:

$$d_f \geq \sqrt[4]{\frac{8}{3\pi} \chi \frac{\ell^3}{E d_1 f_{\text{lim}}} M_1} \quad (25.124)$$

Le diamètre de l'arbre doit aussi satisfaire la condition de résistance. Par (24.62), on a

$$d_\sigma = \sqrt[3]{\frac{16 M_1}{\pi \tau_{t \text{ pd}}}} \quad (25.125)$$

où  $\tau_{t \text{ pd}}$  est la contrainte de torsion de prédimensionnement.

La figure 25.35 représente ces deux fonctions, qui se coupent au couple de transition

$$M_{1t} = 0,91 \times 10^{-3} \left( \chi \frac{\ell^3}{E d_1 f_{\text{lim}}} \right)^3 \tau_{t \text{ pd}}^4 \quad (25.126)$$

En dessous de cette valeur, le diamètre de l'arbre est déterminé par la flèche limite; en dessus par la résistance. Des évaluations numériques révèlent que le dia-

mètre de l'arbre d'une vis sans fin est habituellement déterminé par la déformation et non par la résistance.

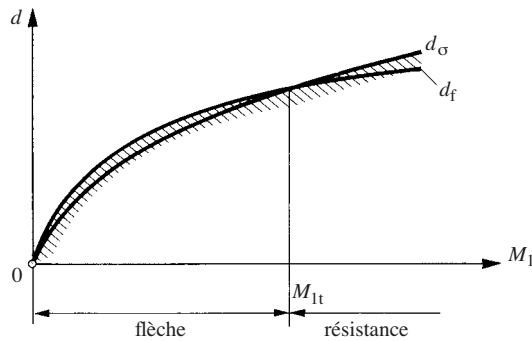


Fig. 25.35 Diamètre de l'arbre d'une vis sans fin en fonction du couple qu'il transmet.

## 25.8 MODÉLISATION DYNAMIQUE

### 25.8.1 Méthodologie

#### Déroulement d'une étude

L'étude des mécanismes et des structures d'une machine se déroule généralement selon la démarche suivante :

- Conception de principe.
- Etude cinématique selon l'une ou l'autre approche suivante :
  - synthèse des dimensions cinématiques pour respecter une ou plusieurs exigences cinématiques, le plus souvent une trajectoire ou une loi d'espace;
  - analyse du mécanisme pour déterminer ses caractéristiques cinématiques : loi d'espace, loi de mouvement, vitesse, accélération et jerk.
- Dessin d'avant-projet.
- Calcul des efforts cinétostatiques.
- Analyse des erreurs statiques et études des tolérances de fabrication.
- Calcul des amplitudes et phases des mouvements vibratoires; détermination de l'erreur dynamique.
- Correction de la construction pour en améliorer le comportement.
- Choix des matériaux.
- Calcul des efforts dynamiques dans les liaisons et dans les structures.
- Dimensionnement selon des critères :
  - de résistance;
  - de vitesse;
  - de déformation;
  - d'échauffement;
  - de performances acoustiques.

La nature du critère déterminant dépend du cahier des charges et de la construction.

- Etude et dimensionnement thermique des organes concernés.
- Etude de l'entraînement.

- Optimisation et choix de la taille des éléments selon des critères non seulement techniques, mais aussi économiques et industriels.
- Etude détaillée en vue de la fabrication.
- Calculs de vérification.

Toute étude complète est un processus complexe qui comporte de nombreuses itérations et les étapes indiquées ci-dessus sont en fait souvent imbriquées. Elle requiert l'intervention de nombreux spécialistes dont l'efficacité est encore fortement accrue par l'application des méthodes de l'ingénierie simultanée.

On se limite ci-après à examiner les grandes lignes des méthodes de calcul en usage pour la conception cinématique et dynamique.

### Méthodes classiques

Les études cinématiques et les calculs statiques faisaient traditionnellement largement appel à des méthodes graphiques. L'analyse s'est progressivement substituée à ces méthodes à cause de sa précision supérieure et du développement du calcul numérique. Mais l'utilisateur aurait avantage à connaître encore les méthodes graphiques, car elles sont souvent plus rapides et donnent une idée du résultat assez précise pour découvrir d'éventuelles erreurs de calcul et pour prendre certaines décisions sans perte de temps.

Tout calcul exige préalablement le développement d'un modèle physico-mathématique. Nous avons abordé dans cet ouvrage les aspects dynamiques avec des modèles élémentaires, mais néanmoins suffisants, pour exposer les phénomènes essentiels rencontrés et pour dégager des règles de conception. L'étude de structures complexes exige un appareil mathématique beaucoup plus lourd : l'analyse modale pour les systèmes multi-corps ; le calcul numérique pour les systèmes non linéaires ; la méthode par éléments finis pour l'analyse des déformations et des contraintes ou pour des études thermomécaniques. Des logiciels de calcul appropriés facilitent certes le travail, mais leur mise en œuvre exige beaucoup de temps. Ils n'évitent pas de devoir construire un modèle dans le sens décrit au chapitre 13 puis d'écrire toutes les équations différentielles. Le calcul exige préalablement encore la détermination des inerties, des rigidités et des amortissements de tous les éléments.

La précision d'un calcul par éléments finis est grossièrement inversement proportionnelle au temps de travail consacré. Par comparaison avec des résultats de laboratoire, nous avons constaté qu'il fallait 10 jours pour obtenir une concordance à 1% des résultats, mais que deux jours suffisaient pour obtenir une précision de 5% et une journée pour une précision de 10 à 15%. La précision coûte cher, c'est pourquoi il convient de réserver les calculs par éléments finis aux pièces vraiment critiques. En outre, il faut fixer d'emblée la précision de calcul requise ; par exemple, la détermination d'une fréquence propre à  $\pm 10\%$  est largement suffisante lorsqu'on sait que la précision d'un mouvement exige de toute manière que la fréquence d'utilisation n'excède pas environ le vingtième de la fréquence propre la plus basse du système. En revanche, s'il est prévu qu'un rotor tourne à 80% de la vitesse critique, il importe de calculer cette dernière beaucoup plus sérieusement.

Confrontés aux exigences industrielles, de rentabilité et de délais, et ne bénéficiant en outre pas toujours d'une formation suffisante, les praticiens étaient rebutés par ces méthodes qu'ils jugeaient vite «trop théoriques». Ils se contentaient le plus souvent de calculs grossiers et ne faisaient même aucune étude dynamique. Cette attitude

n'est aujourd'hui plus de mise à cause de la pression de la concurrence et de l'accroissement continu recherché des performances des machines.

### Simulations à l'écran

L'avènement de logiciels très conviviaux est un progrès immense car l'utilisateur n'a plus besoin de concevoir tout le modèle ni d'écrire et résoudre les équations différentielles. Ils permettent des analyses détaillées, précises et rapides. On distingue les logiciels pour la conception cinéostatique et les logiciels pour l'analyse vibratoire.

#### *Conception cinéostatique*

Les logiciels de conception cinéostatique reposent sur des modèles qui ne tiennent pas compte des déformations des pièces (§ 13.6.1). Selon leur degré de complexité, il existe plusieurs types de logiciels :

- **Logiciels d'analyse cinématique.** L'utilisateur dessine le mécanisme à l'écran avec seulement ses dimensions cinématiques. Le mécanisme s'anime lorsqu'une certaine loi de mouvement d'entraînement est imposée à l'élément menant ; le logiciel calcule les caractéristiques cinématiques en n'importe quel point : mouvement, vitesse, accélération et parfois jerk. Ces grandeurs sortent numériquement ou graphiquement en fonction de la position de l'élément menant ou du temps.
- **Logiciels d'analyse cinéostatique.** La simulation part du dessin du mécanisme qu'il faut dessiner à l'écran ou que le logiciel peut reprendre directement d'un modelleur 3D de CAO auquel il est couplé. L'utilisateur peut introduire des efforts extérieurs et parfois du frottement dans les organes de liaison et de guidage. Le logiciel calcule automatiquement la masse, la position du barycentre et les moments d'inertie des pièces. Puis il donne les efforts cinéostatiques aux endroits désirables sous forme numérique ou graphiquement en fonction du temps ou de la position du mécanisme. L'animation est précieuse pour déceler les interférences.

Ces logiciels conviennent parfaitement aux bureaux d'étude. Ils sont d'un emploi facile, ne nécessitent pas une longue formation et permettent de gagner beaucoup de temps.

#### *Conception dynamique*

La conception dynamique exige des logiciels capables d'analyser des systèmes déformables. On distingue principalement deux sortes de logiciels :

- **Logiciels pour modèles équivalents.** L'utilisateur développe le modèle équivalent (sect. 15.5) et le dessine à l'écran. Il calcule et réduit tous les éléments à l'élément de réduction choisi, dans certains cas on peut faire varier ces grandeurs en fonction de la position du mécanisme. Le logiciel écrit implicitement les équations différentielles, calcule les fréquences propres et donne, sous forme graphique ou numérique, le mouvement vibratoire et les efforts en tout point et pour tout type d'excitation. Certains logiciels font encore une analyse de Fourier des réponses.
- **Logiciels d'analyse dynamique de systèmes.** Ces logiciels partent du dessin des pièces à l'écran en reprenant éventuellement le dessin CAO 3D d'un modelleur solide couplé. L'utilisateur introduit les élasticités, les actions statiques et les

efforts perturbateurs. L'analyse numérique tient compte des caractéristiques cinématiques du mécanisme en respectant les effets non linéaires qui affectent en permanence les fréquences propres. Les effets de cumul sont pris en compte en laissant tourner le modèle pendant plusieurs cycles. Les sorties sont graphiques. Des modules complémentaires permettent d'introduire des jeux et des butées, mais le temps de calcul est alors beaucoup plus long.

La simulation dynamique est séduisante; mais sa mise en œuvre exige les connaissances d'un spécialiste, non seulement pour l'utilisation du logiciel mais aussi pour en tirer tout le profit. En effet, la simulation ne montre pas sur quels éléments il faut agir pour améliorer le comportement d'un système. L'utilisateur doit impérativement:

- saisir l'influence de tous les paramètres de la construction pour pouvoir agir efficacement et correctement;
- connaître la structure du logiciel pour apprécier correctement ses possibilités et ses limites;
- estimer par les voies «manuelles» traditionnelles, même avec un modèle simplifié, la fréquence propre inférieure (§ 13.6.5) et les réponses attendues;
- être conscient que le résultat d'une simulation dépend des hypothèses de travail et ne peut pas être plus précis que ne le sont les données;
- tenir compte de nombreux phénomènes qui ne sont généralement pas pris en compte dans les logiciels de simulation; par exemple, les phénomènes d'arc-boutement, les irréversibilités, la lubrification et l'influence des états de surface, l'échauffement.

Les méthodes analytiques et les simulations ne s'excluent pas mais se complètent. Un concepteur doit maîtriser tous ces outils, posséder une solide expérience pour tenir encore compte des réalités industrielles: normalisation, impératifs de fabrication, coûts, qualité.

La simulation permet un gain de temps considérable et dispense parfois de réaliser un prototype. Mais il ne faut jamais perdre de vue que *même la meilleure simulation n'est qu'une mécanique virtuelle*. Les qualités et les défauts d'une machine ne se révèlent vraiment qu'à sa mise en service et au cours de son exploitation.

## 25.8.2 Exemples

### Transporteur

Ce mécanisme appartient à une machine à emballer. Quelques-uns de ses aspects ont été abordés ailleurs:

- la modélisation (sect. 13.8);
- le calcul des fréquences propres et modes vibratoires (§ 15.9.4).

Le mécanisme avait été étudié à la planche à dessin. Par conséquent, les masses, moments d'inertie et rigidités de ses pièces ont été calculés de manière traditionnelle. On a développé son modèle équivalent selon la méthode exposée au chapitre 13.

Un logiciel a fourni immédiatement les fréquences propres et les modes propres représentés à la figure 15.77. La fréquence propre la plus basse est 170 Hz; il est intéressant de la comparer aux estimations fournies par la formule (13.65):

- méthode de Dunkerly: 159,1 Hz
- méthode de Neuber: 162,8 Hz

Comme prévu, les valeurs estimées sont légèrement inférieures à la valeur exacte calculée par le logiciel. L'examen des masses et des rigidités du modèle équivalent (fig. 13.57) et l'appréciation de l'importance relative de chacun des termes figurant au dénominateur de l'évaluation par la formule (13.65) montrent clairement que les moyens efficaces pour élever la fréquence propre consistent à (fig. 13.55):

- alléger les pièces (8) et (9);
- accroître la rigidité de l'arbre (6).

Partant du modèle, on calculerait sa réponse forcée par les méthodes de l'analyse modale.

Si le mécanisme avait été dessiné à l'ordinateur en 3D avec un modeleur solide, on aurait pu calculer directement la réponse du plateau au mouvement imprimé par la came sans développer le modèle équivalent. Mais on n'aurait pas vu immédiatement sur quoi agir pour améliorer le mécanisme, sinon par tâtonnement.

### Transmission de bruit

Cet exemple est tiré d'une thèse de Chritin [25.12].

Le bruit d'un véhicule de chemin de fer automoteur prend principalement naissance au contact des roues avec le rail et dans les organes moteurs: engrenages et roulements. Il est transmis par voie aérienne et par voie solidienne à la caisse du véhicule. On s'oppose à la propagation du bruit par la structure grâce à une conception antivibratoire convenable.

Un essieu moteur d'une rame de métro léger est lié de chaque côté à une béquille de la caisse par deux bielles (fig. 25.36) qui transmettent les efforts moteurs et de freinage. La jambe-pont du bogie pivote sous la caisse et peut s'incliner. Le cheminement du bruit par la voie solidienne est indiqué par des flèches.

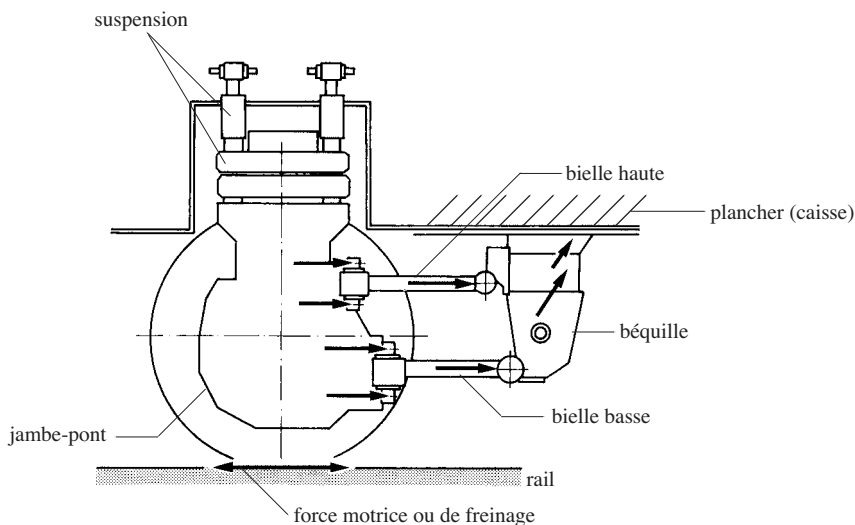


Fig. 25.36 Propagation solidienne du bruit d'un bogie de métro.

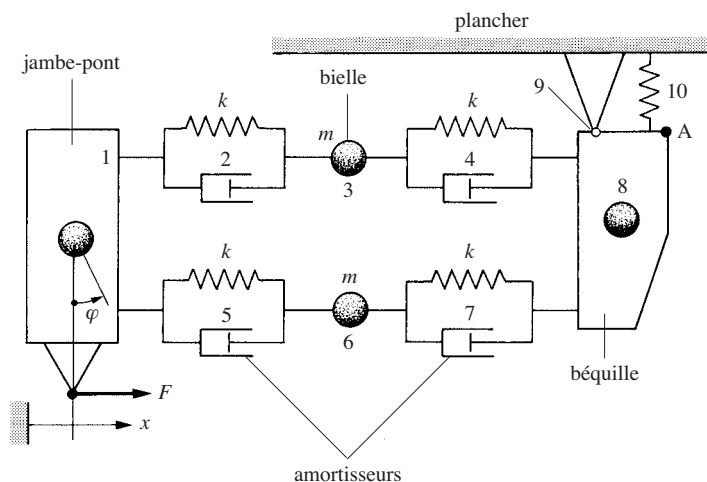


Fig. 25.37 Modèle dynamique du bogie représenté à la figure 25.36.

La figure 25.37 représente le modèle pour l'analyse de la propagation du bruit. Du fait que les articulations des bielles contiennent des éléments souples amortisseurs (Silentbloc), on a admis que le corps des bielles est comparativement indéformable. La jambe-pont peut se déplacer librement selon  $x$  et tourner de l'angle  $\varphi$ ; ces deux mouvements sont couplés. L'articulation (9) et le ressort (10) représentent la déformabilité élastique de la béquille et du plancher. Le modèle possède cinq degrés de liberté, il est excité par la force  $F$  transmise par le rail.

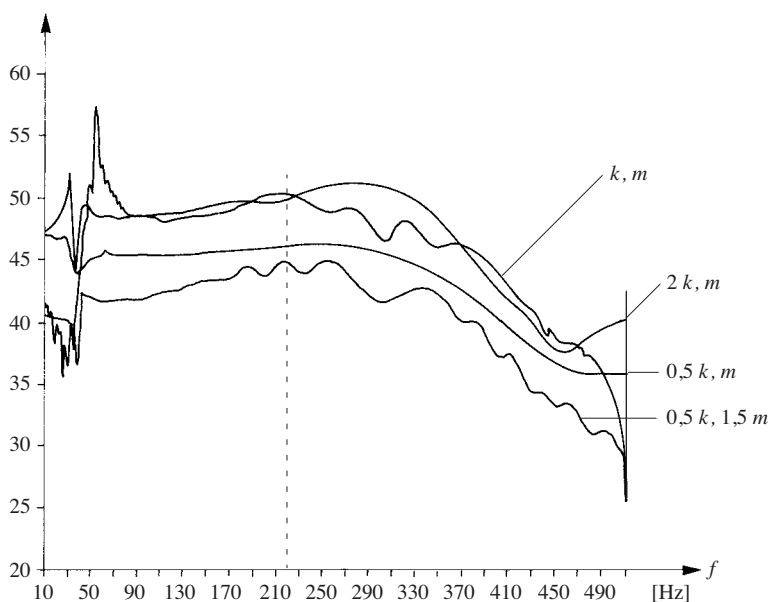


Fig. 25.38 Niveau de vitesse de la béquille de la figure 25.36.



Un logiciel de simulation a fourni le niveau d'amplitude de la vitesse vibratoire de la béquille au point A pour une excitation harmonique par la force  $F$  (fig. 25.38). On a étudié l'influence des paramètres en jouant sur la masse des bielles et la rigidité des amortisseurs. On observe dans tous les cas une première résonance comprise entre 35 et 65 Hz, fréquence hors de la gamme significative du point de vue du bruit dans le véhicule. Dans la gamme intéressante, entre 200 et 500 Hz, trois résonances existent qui coïncident avec celles qui ont été révélées par des mesures.

La discussion des conclusions et leurs conséquences constructives sort du cadre de cet ouvrage, elles figurent dans [25.12].

### Simulateur de freinage de chute

Une capsule spatiale est récupérée sur terre suspendue à un parachute. Elle est freinée à proximité immédiate du sol par des rétrofusées. La capsule heurte brutalement le sol en cas de non-fonctionnement des fusées.

Le dispositif représenté à la figure 25.39(a) est destiné à tester la résistance du matériel embarqué lors de la décélération sans endommager la capsule. La capsule (1) est suspendue à la charpente (5) par un dispositif qui n'est pas représenté. Pour l'essai, on largue la capsule qui tombe et prend de la vitesse. Lorsqu'il est tendu, le câble de suspension (2) tire sur la tige du piston (3) d'un amortisseur hydraulique (4) qui fonctionne en principe comme celui qui est représenté à la figure 4.26.

Le schéma dynamique de la figure 25.39(b) a été représenté à l'écran. Le système est excité par un choc de vitesse  $v_0$  à l'instant où la corde est tendue. On introduit

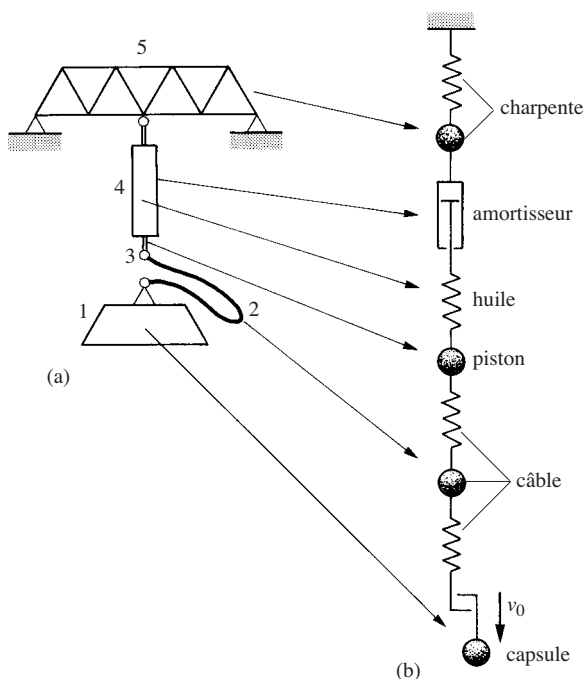


Fig. 25.39 Dispositif d'essai du freinage d'une capsule spatiale: (a) schéma; (b) modèle dynamique.

aussi dans le logiciel la relation non linéaire entre la force au piston de l'amortisseur en fonction de la course et de la vitesse du piston. Le logiciel donne l'accélération et le mouvement de chaque masse ainsi que la force transmise par chaque élément.

La figure 25.40 montre que la corde est tendue par une force qui atteint au maximum 280 kN. Jusqu'à 0,15 seconde, la vibration de la capsule résulte essentiellement de l'élasticité de la corde, elle s'amortit rapidement par l'amortisseur. Puis on observe la vibration à basse fréquence de la charpente porteuse, la traction dans la corde diminue progressivement avec le ralentissement de la capsule et tend asymptotiquement vers le poids de la capsule.

Les simulations ont permis de dimensionner la corde, l'amortisseur et la charpente, de manière à ce que la décélération n'excède pas une certaine valeur imposée par le cahier des charges.

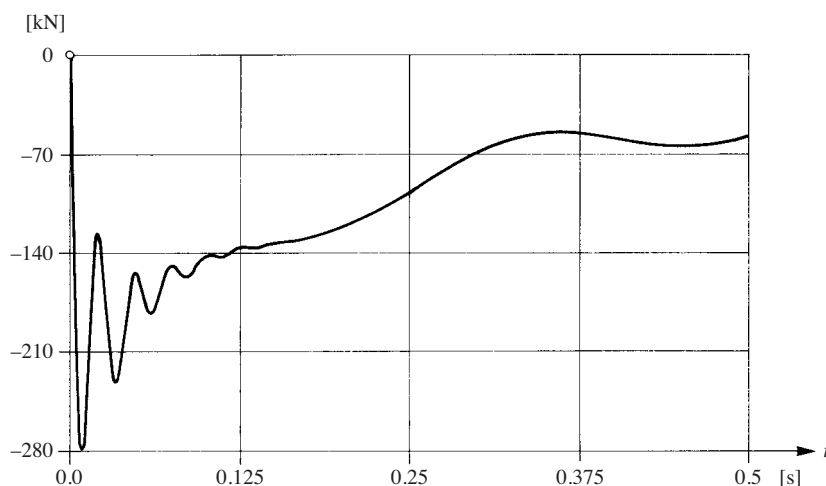


Fig. 25.40 Traction dans la corde en fonction du temps.

## 25.9 CONCLUSIONS PRINCIPALES

Le dimensionnement à la vitesse vise à donner aux pièces la taille nécessaire pour assurer leur aptitude dynamique au service.

Les efforts centrifuges naissant dans les rotors, disques ou tambours, sont limités par la résistance des matériaux. Les contraintes maximales dépendent de la géométrie des pièces et surtout de leur vitesse périphérique. La taille d'un rotor est limitée par sa vitesse angulaire ou, inversement, sa vitesse angulaire est limitée par la taille. On utilise avantageusement des matériaux dont la résistance massique est élevée.

La résistance mécanique et le comportement dynamique sont deux critères qui déterminent la taille des organes de machines. Il existe un domaine de vitesse où la taille d'une pièce ne dépend que de la résistance, un autre où elle est déterminée uniquement par des considérations dynamiques. Le dimensionnement à la résistance seulement conduit très souvent à des constructions dont le comportement dynamique laisse à désirer. Il convient d'examiner soigneusement chaque cas.

Les proportions géométriques usuelles des organes résultent habituellement du dimensionnement à la résistance; elles sont souvent différentes si le dimensionnement est basé sur des critères dynamiques. Dans ce cas, le concepteur doit acquérir un autre sens des proportions harmonieuses. Par exemple, si un arbre est plus gros que ce qui est nécessaire pour transmettre un couple, on peut agrandir l'alésage d'un moyeu qu'il porte tout en laissant son diamètre extérieur inchangé.

Les longues bielles comprimées à marche rapide sont susceptibles de flamber pour une charge inférieure à la charge critique statique, à cause de vibrations paramétriques excitées par des variations périodiques de charge.

L'échauffement et l'usure limitent la vitesse des paliers lisses. En régime de frottement mixte, on choisit la longueur du coussinet sur la base du diamètre qu'aurait l'arbre dimensionné uniquement à la résistance. Cette longueur suffit pour l'arbre de plus gros diamètre nécessaire pour satisfaire un critère dynamique.

La perte ou puissance-chaleur d'un palier hydrodynamique croît très vite avec le diamètre de l'arbre. C'est pourquoi les paliers d'arbres dimensionnés selon un critère dynamique peuvent poser des problèmes de refroidissement et nécessiter une réfrigération auxiliaire.

La longévité des roulements portant des arbres dimensionnés par la prédominance d'un critère dynamique est plus grande que celle de roulements d'arbres plus petits juste suffisants du point de vue de la résistance.

L'échauffement des embrayages et des freins engagés périodiquement limite leur fréquence d'utilisation. On accroît la cadence en améliorant le refroidissement et en diminuant l'inertie des mécanismes commandés.

Les déformations statiques sont souvent limitées par certaines exigences fonctionnelles. Ce critère sert parfois à dimensionner certains éléments de machines.

## CHAPITRE 26

# ARCHITECTURE

### 26.1 INTRODUCTION

La conception d'une machine découle de son cahier des charges. Elle consiste à choisir ses principes de fonctionnement et à esquisser son architecture générale. Le concepteur fait une démarche inventive qui fait largement appel à ses connaissances et à son expérience. Il s'inspire le plus souvent de solutions déjà connues, mais sa capacité d'associer des idées et son imagination lui feront découvrir des solutions nouvelles. Il doit connaître et appliquer les principes généraux de fonctionnement des machines qui ont été décrits dans les chapitres précédents; il doit entrevoir les solutions de détail, mais ne pas s'y attarder dans un premier temps. Plusieurs auteurs ont étudié la démarche de la conception et proposé des méthodologies pour en faire une véritable science [26.1, 26.2, 26.3, 26.4]. D'autres veulent s'inspirer de la nature pour trouver des solutions [26.5] ou vont puiser leur inspiration dans l'histoire des techniques.

On peut se demander s'il ne serait pas possible de confier l'invention et la conception à un ordinateur. Il semble en effet que le processus d'analyse d'une solution technique soit réversible; si tel est le cas, on pourrait en principe partir du cahier des charges et trouver automatiquement les solutions les meilleures. Ce serait l'aube de l'invention par ordinateur.

Ce chapitre donne quelques directives générales et aborde des aspects qui ne s'intégraient pas dans l'étude phénoménologique des machines. Il est structuré comme suit:

- Section 26.2 Principes généraux.
- Section 26.3 Principes de distribution des fonctions entre des organes, comparaison des solutions.
- Section 26.4 Choix des organes.
- Section 26.5 Architecture générale, disposition des organes, conception modulaire, esthétique.
- Section 26.6 Etude des similitudes mécaniques, applications au choix des solutions.
- Section 26.7 Principes généraux de sécurité.
- Section 26.8 Aspects économiques.
- Section 26.9 Conclusions principales.

### 26.2 PRINCIPES GÉNÉRAUX

D'une manière très générale, toute réalisation:

- doit remplir les fonctions techniques exigées avec les performances voulues;

- doit être économique à l'investissement et à l'exploitation;
- doit satisfaire toutes les exigences de sécurité pour l'homme et l'environnement.

De très nombreux auteurs ont cherché comment satisfaire simultanément ces trois exigences absolument prioritaires, par exemple [26.1, 26.2, 26.6]; l'excellent ouvrage de Pahl et Beitz [26.7] fait une synthèse très claire. On s'aperçoit qu'une bonne conception doit en principe être *univoque, simple, sûre*. Suh [26.3] énonce deux axiomes à observer:

- **Axiome de l'indépendance**

Premier énoncé: une construction optimale sauvegarde toujours l'indépendance des exigences fonctionnelles.

Second énoncé: une construction est optimale lorsque les relations entre les exigences fonctionnelles et les moyens matériels sont telles qu'on peut toujours agir sur un paramètre de construction pour satisfaire une exigence fonctionnelle, sans perturber les autres exigences.

- **Axiome de l'information**

Premier énoncé: une construction optimale contient le moins d'information possible.

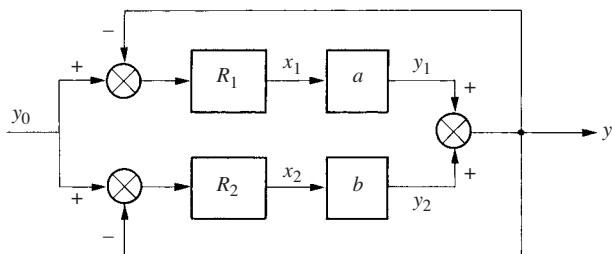
Second énoncé: la construction la meilleure découple les exigences fonctionnelles et contient le moins d'information possible.

Attardons-nous seulement au premier axiome et résumons le second, plus difficile à saisir, en disant simplement qu'une construction est meilleure, à qualités et performances égales, si elle est plus simple et plus facile à fabriquer.

Le premier axiome est déjà connu par la théorie et la pratique du réglage. Par exemple, une grandeur  $y$  résulte de la combinaison linéaire de deux variables:

$$y = ax_1 + bx_2 = y_1 + y_2$$

La figure 26.1 montre un schéma de structure visant à régler  $y$  par une consigne  $y_0$  des deux variables. Le réglage est impossible parce que les grandeurs  $y_1 = ax_1$  et  $y_2 = bx_2$  sont couplées; une variation de  $x_1$  peut se corriger par  $x_2$  et réciproquement. Il faut découpler les grandeurs en réglant chacune séparément (fig. 26.2).



**Fig. 26.1** Réglages couplés.

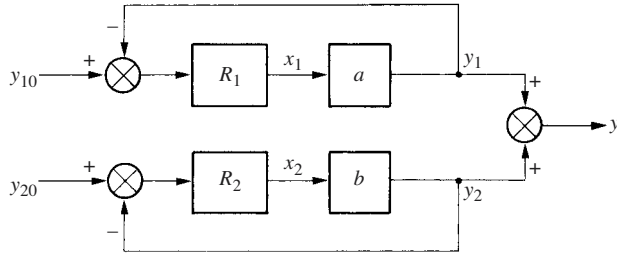


Fig. 26.2 Réglages découplés.

Une fois le principe de fonctionnement d'un système arrêté, il existe une multitude de solutions de détail pour sa réalisation. En plus des fonctions principales, il faut encore respecter une série de contraintes supplémentaires telles que :

- masse et encombrement minimaux ;
- facilité de montage et d'entretien ;
- utilisation d'éléments normalisés ;
- utilisation optimale des matériaux ;
- matériaux recyclables ;
- sécurité ;
- conception ergonomique ;
- respect de l'environnement, bruit et pollution ;
- coût minimal.

Il est impossible de formuler des règles générales de conception, car le nombre de paramètres est énorme et ils sont souvent liés par des interdépendances complexes.

Que ce soit dans l'étude générale d'un projet ou dans celle d'un détail, on classe avantageusement les exigences du cahier des charges en trois catégories :

- *exigences impératives* qui doivent être satisfaites à tout prix, elles s'expriment généralement par une valeur numérique affectée de tolérances ;
- *exigences visées* vers lesquelles on tend au mieux, parfois par un compromis ;
- *exigences souhaitées* qu'on doit satisfaire si possible.

Cette liste d'exigences est à la base du choix de la solution la meilleure parmi plusieurs variantes. Ce choix raisonné s'opère par les méthodes d'analyse de la valeur.

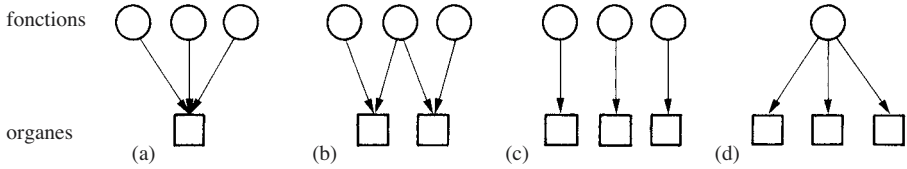
## 26.3 DISTRIBUTION DES FONCTIONS

### 26.3.1 Généralités

Les fonctions étant identifiées, on les réalise au moyen d'éléments de machines appropriés. Selon la figure 26.3, on distingue quatre principes de distribution des fonctions entre les organes et éléments de machines. Mais immédiatement se posent les questions suivantes :

- quelles fonctions peuvent-elles être remplies par un seul organe ?
- quelles fonctions doivent-elles être remplies par des organes indépendants ?

Il n'y a pas de réponse universelle, on se limite à quelques considérations générales.

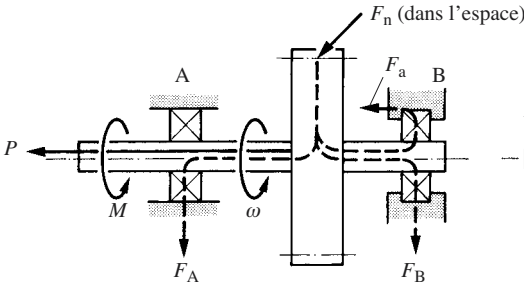


**Fig. 26.3** Distribution des fonctions : (a) un organe remplit toutes les fonctions; (b) les fonctions sont réparties sur plusieurs organes; (c) une fonction par organe; (d) une fonction remplie par plusieurs organes.

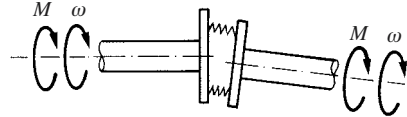
### 26.3.2 Toutes les fonctions remplies par un seul organe

Il est naturellement plus simple, meilleur marché et moins encombrant de confier toutes les fonctions requises à un seul organe. Voici quelques exemples de pièces et d'organes capables d'assurer simultanément plusieurs fonctions.

Un arbre portant une roue dentée (fig. 26.4) transmet le couple et la rotation à un autre organe de transmission; il transmet aussi la force d'engrènement aux paliers. En outre, l'arbre centre la roue et la maintient en prise avec son pignon. Il peut encore assurer simultanément ces fonctions pour d'autres éléments montés sur lui.



**Fig. 26.4** Transmission du mouvement et des efforts par un arbre.



**Fig. 26.5** Fonctions d'un accouplement flexible.

Un accouplement flexible (fig. 26.5) transmet la rotation et le couple d'une ligne d'arbre tout en permettant un certain désalignement et désaxage des arbres. Il amortit aussi les à-coups de couple et les vibrations de torsion.

Une bride de tuyauterie transmet d'un tube à l'autre la poussée de pression du fluide et les efforts résultant de précontraintes de montage ou de dilatations thermiques; elle permet de démonter les tuyaux; elle porte et serre le joint qui assure l'étanchéité.

Le stator d'une turbine à gaz ou à vapeur contient le fluide et résiste à sa pression; il supporte les aubes directrices et transmet le couple de réaction aux fondations de la machine.

Un roulement à billes à gorges profondes guide un arbre en rotation, transmet une charge radiale et, dans une moindre mesure, aussi une force axiale.

Une liaison arbre-moyeu par emmanchement conique garantit un bon centrage du moyeu et permet de transmettre des couples très importants (fig. 5.34b). On rencontre

souvent des constructions qui prévoient encore une clavette (fig. 5.34a). Cette redondance est inutile, car le frottement suffit pour transmettre le couple. Dans l'esprit du constructeur, il s'agit souvent d'une «sécurité», mais elle est plutôt nuisible, car la rainure de clavette affaiblit l'arbre. La clavette ne peut se justifier que pour une raison de positionnement angulaire. Rappelons qu'il convient toujours d'éviter la surabondance de liaisons rigides (§ 9.3.4).

### 26.3.3 Distribution des fonctions à plusieurs organes

Un organe qui remplit plusieurs fonctions est avantageux, mais on rencontre des difficultés lorsque :

- la capacité de l'organe doit être développée à l'extrême pour une ou plusieurs fonctions ;
- deux fonctions sont contradictoires ou se perturbent mutuellement.

On sort de cette impasse en distribuant les fonctions sur plusieurs organes, en attribuant même, le cas échéant, plusieurs organes à une même fonction. Une répartition des tâches facilite souvent le calcul par une modélisation claire et univoque.

#### Exigences extrêmes

Par exemple, un palier doit transmettre une forte charge radiale, une force axiale et offrir une grande longévité. On peut a priori choisir un roulement radial, mais la charge axiale raccourcit sa longévité. De même, la force radiale diminuerait beaucoup celle d'une butée. La figure 26.6 montre une solution à ce problème : un roulement à galets cylindriques transmet uniquement la charge radiale et un roulement à billes rigide transmet la force axiale. On veille à une rigoureuse séparation des fonctions en choisissant un roulement à galets sans épaulement sur la bague intérieure et en ménageant du jeu radial à la bague extérieure du roulement à billes pour éviter tout hyperrigisme avec le roulement à galets.

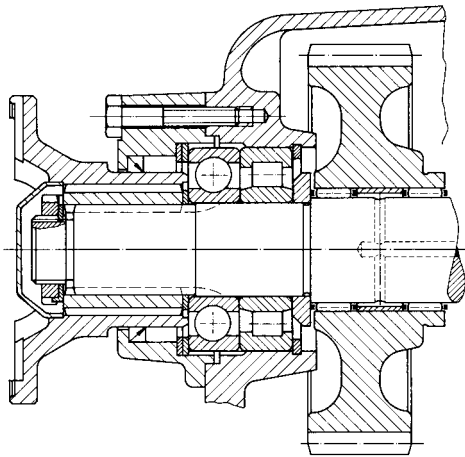


Fig. 26.6 Palier avec transmission séparée des forces radiales et axiales.



### Fonctions contradictoires

A titre d'exemple, pour un gros réducteur entraîné par une turbine à vapeur, on exige ce qui suit :

- l'arbre de sortie doit être souple pour permettre le déplacement radial provoqué par les dilatations thermiques des bâtis ;
- l'arbre de sortie doit aussi être souple en torsion pour abaisser la fréquence propre du système ;
- la roue dentée, très chargée, doit être montée rigidement afin que les déformations ne perturbent pas trop l'engrènement ;
- l'encombrement doit être petit.

Les exigences qu'un arbre soit tout à la fois souple et rigide sont contradictoires. L'application du principe de séparation des fonctions conduit à monter la roue sur un arbre creux rigide avec des paliers rapprochés et à transmettre le couple par un arbre long et souple introduit dans le premier pour gagner de la place (fig. 26.7).

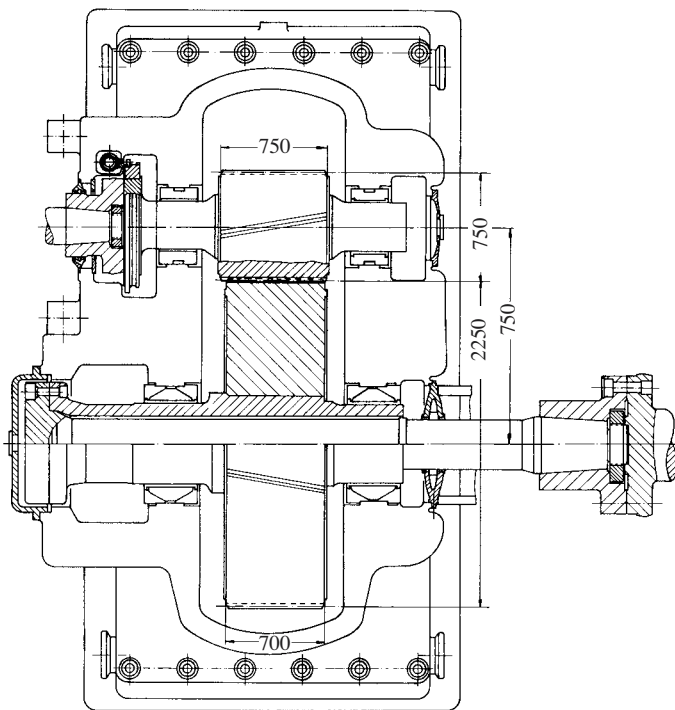
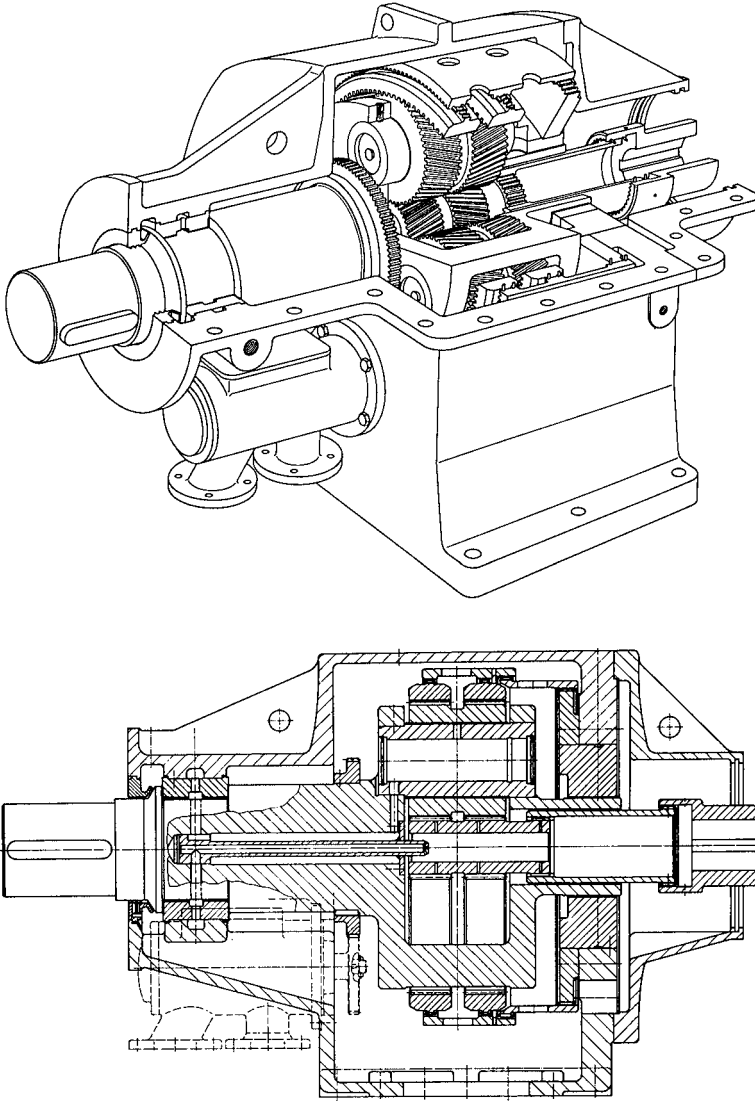


Fig. 26.7 Réducteur avec arbre de sortie souple.

Dans le même ordre d'idées, l'arbre portant le planétaire central d'un train épicycloïdal centre le pignon et transmet le couple tournant. Le pignon est en prise hyperstatique avec les satellites (§ 8.3.4) ; de ce fait, le centrage du pignon par l'arbre surcharge les dentures. On a vu qu'il est judicieux de réaliser l'isostatisme en laissant flotter le pignon qui se centre automatiquement entre les satellites (fig. 8.13a). La fonction de centrage est alors dévolue aux satellites et l'arbre n'assure plus que la



**Fig. 26.8** Transmission à train épicycloïdal pour turbomachines (système Stoeckicht).

transmission du couple. La figure 26.8 montre une solution valable pour un train épicycloïdal à dentures hélicoïdales opposées. Le pignon central est flottant, il est positionné axialement par les dentures hélicoïdales et relié à la machine par un court arbre creux articulé dans des accouplements dentés. Pour les mêmes raisons, les couronnes extérieures sont flottantes, elles sont reliées au bâti par des anneaux souples articulés.

Une poulie est montée sur un arbre par des anneaux coniques extensibles pour transmettre le couple (fig. 26.9) mais qui n'offrent pas un centrage très précis. C'est pourquoi le moyeu est pourvu d'une portée de centrage particulière.

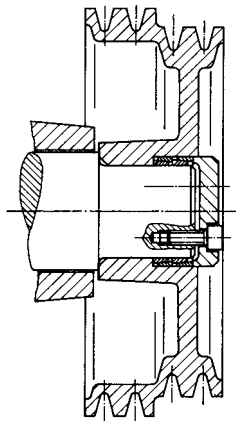


Fig. 26.9 Poulie avec anneaux élastiques et portée de centrage.

Un carter doit remplir des fonctions statiques et doit aussi transmettre à l'air la chaleur des pertes. On exige souvent qu'un réducteur soit le plus compact possible; mais s'il est trop petit, le carter n'a pas assez de surface d'échange de chaleur et on est obligé de prévoir un refroidissement forcé par circulation d'huile à travers un échangeur de chaleur (§ 19.3.3).

#### 26.3.4 Une fonction par organe

Il faudrait en principe toujours attribuer à chaque pièce une seule fonction pour améliorer la fiabilité et la sûreté (§ 26.7.2). Cela simplifie aussi les calculs de dimensionnement.

C'est dans cette perspective qu'il faut voir la recommandation pressante de prévoir des constructions isostatiques comme on l'a montré au paragraphe 5.10.1 et à la section 8.2. Il ne faudrait, par exemple, pas guider un arbre par plus de deux paliers radiaux puisqu'ils suffisent à eux seuls pour définir complètement la position dans l'espace de l'axe de rotation. La poussée axiale ne devrait être transmise au bâti que par un seul palier. C'est pourquoi on prévoit habituellement toujours un palier fixe et un palier libre (fig. 5.81). Les figures 5.84, 5.86 et 26.6 montrent d'autres exemples d'attribution univoque des fonctions; dans les deux premiers cas, la très forte poussée axiale est transmise par une butée indépendante du roulement radial. Les butées présentent du jeu radial afin d'être libérées de toute charge radiale.

Le principe de distribution des fonctions s'applique aussi aux paliers lisses. La figure 26.10 illustre la conception d'un palier radial combiné avec une butée à double effet.

Dans les courroies dentées, l'effort est transmis positivement aux poulies par des dents en néoprène ou en polyuréthane (fig. 26.11). Mais ces substances sont incapables de transmettre tout l'effort en traction, cette fonction est assurée par une nappe de câbles en fibre de verre ou en acier incorporée au corps de la courroie.

La caisse d'une locomotive repose souvent sur un bogie par une butée (3) combinée avec un palier (4) qui transmet l'effort de traction (fig. 26.12a). La somme des forces d'adhérence,  $F_1 + F_2$ , et la réaction de traction  $T^-$  constituent un couple avec

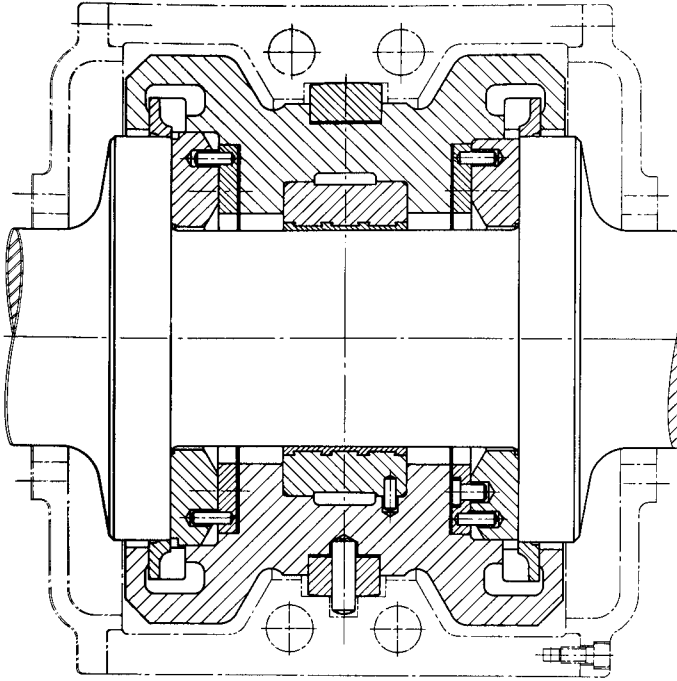


Fig. 26.10 Palier combiné pour turbomachine.

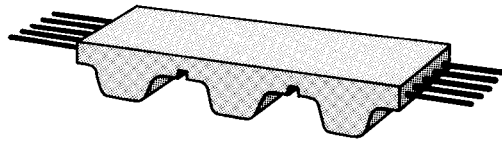
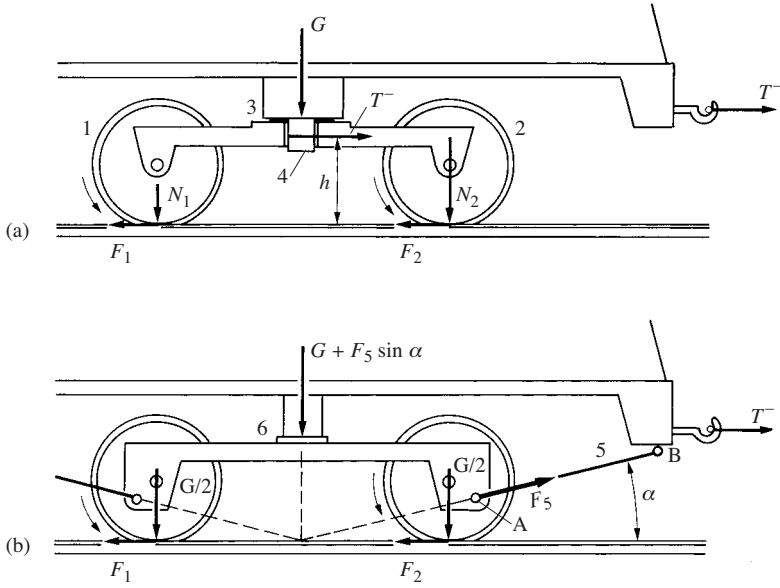


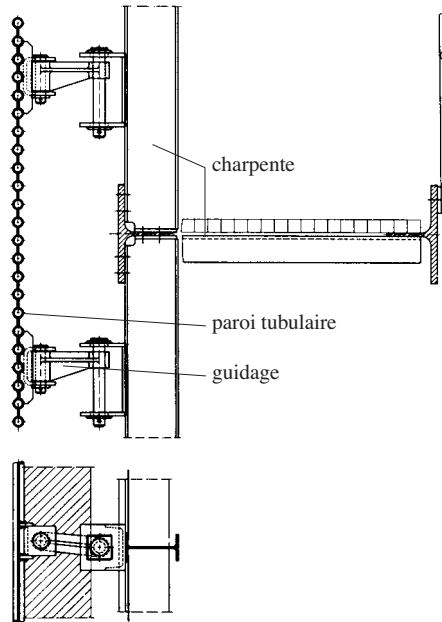
Fig. 26.11 Courroie dentée.

la distance  $h$ . Ce couple déséquilibre la charge des essieux de sorte que  $N_1 < G/2$  ; par conséquent, la charge statique au repos ne peut pas être exploitée pleinement pour la traction. Le système de la figure 26.12(b) sépare les fonctions : la traction est transmise par une barre oblique (5) articulée en A au bogie et en B à la caisse ; le poids de la locomotive repose sur un appui (6) qui peut d'ailleurs prendre la forme de biellettes. La barre de traction (5) est inclinée de manière à ce que la force  $F_5$  qu'elle transmet passe par la trace de la charge  $G$  sur le rail. Chaque essieu est ainsi chargé par  $G/2$  et la traction à la limite du patinage des roues est plus élevée que dans le premier cas.

Dans le domaine des chaudières à vapeur, un foyer en surpression est enfermé dans une enceinte étanche et la chaleur doit être transmise à l'eau par des parois minces pour diminuer les contraintes thermiques ; par ailleurs, les parois sont très lourdes et leur dilatation est importante. La fonction étanchéité aux gaz est assurée par les parois intérieures pourvues des tubes d'eau (fig. 26.13) ; en revanche, une charpente extérieure froide est chargée de porter les panneaux suspendus de la chambre de combustion. Les liaisons articulées permettent les dilatations.



**Fig. 16.12** Transmission au crochet de la traction d'un bogie de locomotive: (a) par le pivot; (b) par une barre oblique.

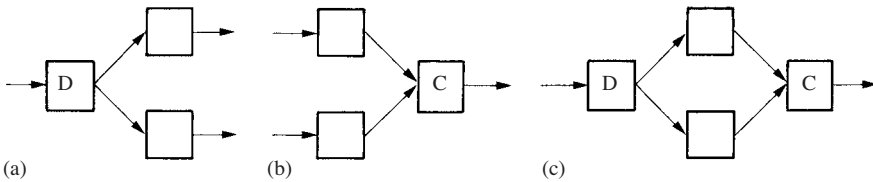


**Fig. 26.13** Charpente porteuse et paroi de la chambre de combustion d'une chaudière à vapeur (Babcock).

### 26.3.5 Une fonction remplie par plusieurs organes

En devant augmenter la puissance ou la taille d'un quelconque organe, on atteint souvent une limite qui empêche d'aller plus loin. Il est alors nécessaire de prévoir plusieurs organes qui remplissent la fonction souhaitée en *parallèle* selon l'un ou l'autre des schémas suivants, par exemple pour la transmission de puissance :

- la puissance d'un moteur est répartie par un organe de distribution D à deux ou plusieurs organes récepteurs (fig. 26.14a);
- la puissance de deux ou plusieurs moteurs est réunie par un organe collecteur C (fig. 26.14b);
- la puissance est répartie entre deux ou plusieurs voies de transmission parallèles (combinaison des schémas ci-dessus), puis elle est de nouveau réunie en une voie unique (fig. 26.14c); cette disposition présente un hyperstatisme et donne lieu à des circulations de puissance (sect. 12.6).

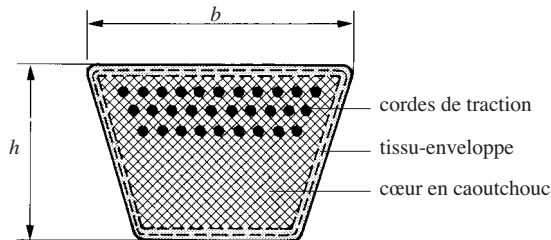


**Fig. 26.14** Distribution de puissance: (a) répartition sur deux récepteurs; (b) réunion; (c) distribution sur deux voies de transmission parallèles.

Passons en revue les avantages les plus connus des montages parallèles en donnant des exemples.

#### Augmentation de la puissance

On ne peut pas accroître indéfiniment la section d'une courroie trapézoïdale (fig. 26.15) car, à diamètre de poulie égal, l'augmentation de l'épaisseur  $h$  de la courroie accroît la contrainte de flexion et l'énergie dissipée par frottement interne. Le périmètre de refroidissement augmente moins vite que la production de chaleur, ce qui provoque un échauffement inacceptable et abrège la longévité. En outre, la largeur  $b$  de la courroie doit rester dans une certaine proportion avec la hauteur  $h$ , car une trop grande largeur augmenterait tellement la souplesse transversale que la courroie ne pourrait plus résister aux forces appliquées sur ses flancs. On augmente la puissance d'une transmission en installant plusieurs courroies en parallèle, mais il faut tenir compte de l'hyperstatisme dans le dimensionnement (§ 8.4.6).



**Fig. 26.15** Coupe d'une courroie trapézoïdale.

La puissance d'un cylindre de moteur à piston croît comme le cube de son alésage tandis que la surface de refroidissement n'augmente qu'avec le carré de l'alésage. La puissance étant limitée par la température des pièces, il faut répartir la puissance totale de gros moteurs sur un grand nombre de cylindres.

La puissance propulsive nécessaire d'un engin de transport est fournie au besoin par plusieurs moteurs : avions multimoteurs, locomotives, navires.

On installe deux, trois ou quatre corps basse pression sur une ligne d'arbre de turbine à vapeur pour augmenter la section de sortie de la vapeur et accroître la puissance de la machine.

### Amélioration du rendement

Le rendement d'une machine transformatrice d'énergie est très souvent plus faible en charge fractionnaire qu'en pleine charge (§ 10.5.3). Le fractionnement de la puissance totale en plusieurs unités permet, lorsque la charge varie beaucoup, d'exploiter l'installation avec un meilleur rendement (§ 20.4.4). C'est souvent pour cette raison qu'on installe plusieurs groupes dans une centrale hydroélectrique ou plusieurs chaudières pour le chauffage d'un grand bâtiment.

### Diminution de la taille

La distribution d'un effort sur plusieurs éléments permet de diminuer leur taille par rapport à un organe unique. Voici quelques exemples :

- A couple transmis égal, le diamètre d'un embrayage multidisque est plus petit que celui d'un embrayage monodisque parce que le frottement est réparti sur plusieurs surfaces de contact.
- Une transmission à engrenage est plus petite et plus légère si la puissance est transmise par plusieurs voies parallèles, comme par exemple dans les mécanismes épicycloïdaux.
- Pour une charge et une rigidité données, deux ressorts hélicoïdaux concentriques sont moins lourds et moins encombrants qu'un ressort unique.
- La place disponible dans le bogie d'une locomotive permet d'obtenir une plus grande puissance avec deux moteurs côte à côte qu'avec un seul moteur.
- Une toiture ou une dalle à grande portée est très épaisse. On peut construire plus léger et plus mince en prévoyant des piliers intermédiaires (fig. 26.16).

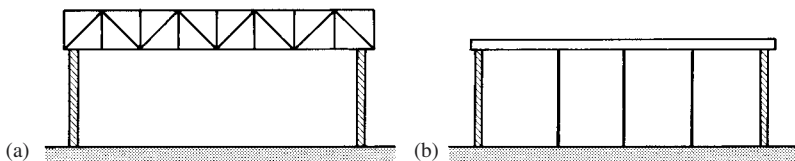


Fig. 26.16 Toiture : (a) grande portée; (b) avec des piliers intermédiaires.

### Accroissement des efforts

Pour une taille et une capacité de charge d'un élément donnée, la multiplication du nombre d'éléments permet de transmettre une plus grosse charge. Par exemple :

- La charge transmissible par un pneu est limitée. On accroît la capacité de transport d'un camion en prévoyant des roues jumelles à l'arrière, puis en augmentant le nombre d'essieux.

- A taille égale, un roulement à galets présente une capacité de charge supérieure à celle d'un roulement à billes. On peut considérer qu'une ligne de contact est une mise en parallèle d'une infinité de points de contact.
- Un arbre cannelé transmet un plus grand couple à un moyeu qu'un arbre de même taille avec une seule clavette.
- La capacité de levage d'un palan augmente avec le nombre de brins de câble.

### Diminution de la pression de contact

On diminue la pression exercée par un véhicule sur le sol en multipliant le nombre de roues, en élargissant les pneus et en augmentant leur diamètre. On remplace aussi les roues par des chenilles (§ 8.7.8).

### Augmentation de la rigidité

La répartition d'un effort entre plusieurs éléments fonctionnant en parallèle augmente aussi la rigidité de l'ensemble (§ 6.3.1), par exemple :

- le montage de plusieurs ressorts en parallèle ;
- le guidage d'un arbre par plusieurs paliers plutôt que par seulement deux paliers éloignés.

### Augmentation de la souplesse

Il est souvent facile d'assouplir un élément en le fractionnant. Par exemple, la rigidité d'une poutre massive, d'une hauteur  $h$  posée sur deux appuis (fig. 26.17), est proportionnelle à son moment quadratique de surface :

$$I_1 = \frac{1}{12} b h^3$$

Fractionnons la poutre en  $n$  lames d'égale épaisseur (fig. 26.18). Le moment quadratique résultant

$$I_n = n \frac{1}{12} b \left( \frac{h}{n} \right)^3 = \frac{1}{n^2} I_1 \quad (26.1)$$

montre que la rigidité d'une poutre lamellée est inversement proportionnelle à  $n^2$ , sa compliance augmente avec le carré du nombre de lames. Cette propriété est souvent mise à profit, par exemple dans les cas suivants :

- ressorts à lames (fig. 26.19) ;
- fractionnement d'une tige cylindrique en un grand nombre de fils fins, câbles ;
- installation en parallèle de plusieurs petites courroies trapézoïdales en lieu et place d'une grosse courroie qui exigerait des poulies de grand diamètre.

### Amélioration de la stabilité

La multiplication des points d'appui permet d'agrandir le polygone de sustentation d'un objet. Par exemple :

- une table à quatre pieds au lieu de trois ;
- un véhicule à quatre roues au lieu de deux ou trois.



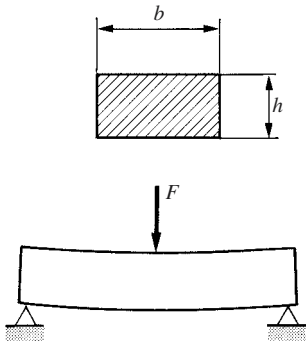


Fig. 26.17 Poutre massive.

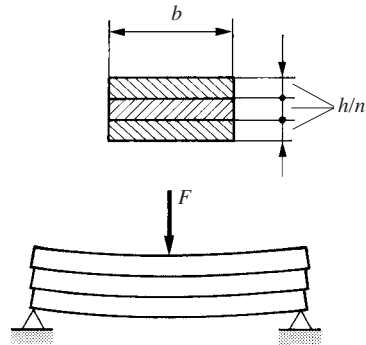


Fig. 26.18 Poutre lamellée.

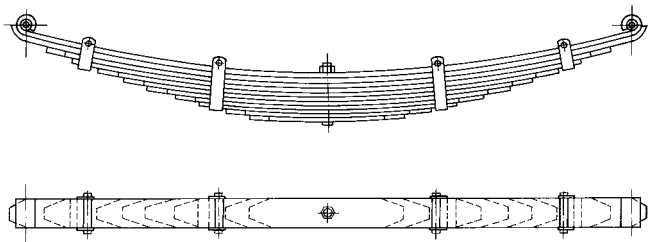


Fig. 26.19 Ressort à lames pour suspension de véhicules.

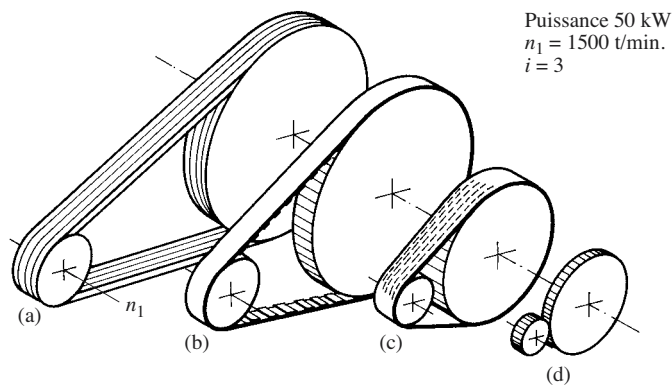
### Amélioration de la sûreté

Plusieurs organes travaillant en parallèle permettent souvent d'assurer encore la fonction, même à performance réduite, en cas de défaillance d'un des organes. Par exemple, un avion multimoteur vole encore à plus basse altitude avec un moteur en panne. Cependant, si la multiplication des organes augmente la sûreté, elle diminue toujours la fiabilité, car la probabilité de panne s'accroît avec leur nombre. A cet égard, il est quand même préférable de construire le plus simple possible pour améliorer la disponibilité des machines.

## 26.4 CHOIX DES ORGANES

On choisit les organes de machines d'abord selon les fonctions qu'ils doivent remplir: un engrenage pour réduire la vitesse, un palier pour guider un arbre. Une étude plus approfondie permet ensuite de déterminer le type exact d'organe, par exemple, un engrenage à denture droite ou hélicoïdale, un roulement à billes ou à galets coniques.

Il existe cependant des critères généraux utiles à la conception des machines. Ce sont, notamment, la puissance par unité de volume occupé et la puissance massique. Dans certains cas, on considérera aussi le couple transmis par unité de volume ou de masse. La figure 26.20 montre que, pour une puissance et des vitesses données, les transmissions à engrenages sont nettement moins encombrantes que les transmissions à liens souples, particulièrement celles à courroies.



	Type de transmission	Diamètre des roues	Entraxe	Largeur
(a)	courroies trapézoïdales	190 x 570	810	101
(b)	courroie dentée	198 x 594	588	63
(c)	chaîne (Westinghouse)	138 x 412	297	76
(d)	engrenage	90 x 270	180	26

Fig. 26.20 Comparaison de l'encombrement de transmissions.

Parmi les engrenages, les réducteurs à train épicycloïdal sont moins encombrants et plus légers que les engrenages à arbres parallèles ordinaires (fig. 26.21). En outre, ils sont souvent très intéressants à cause de leur disposition coaxiale, notamment en marine (fig. 26.22) et en aviation.

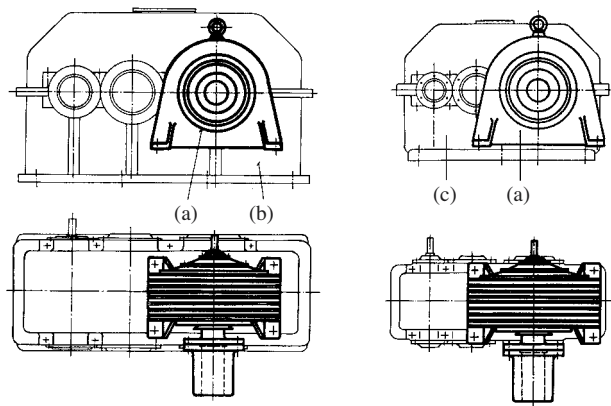
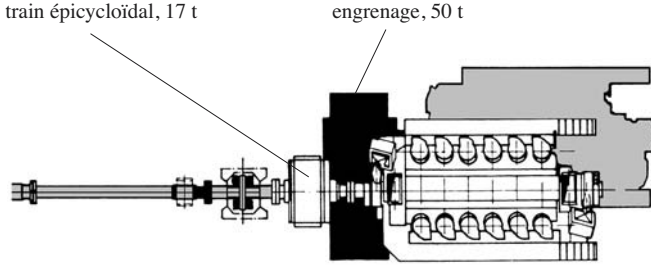


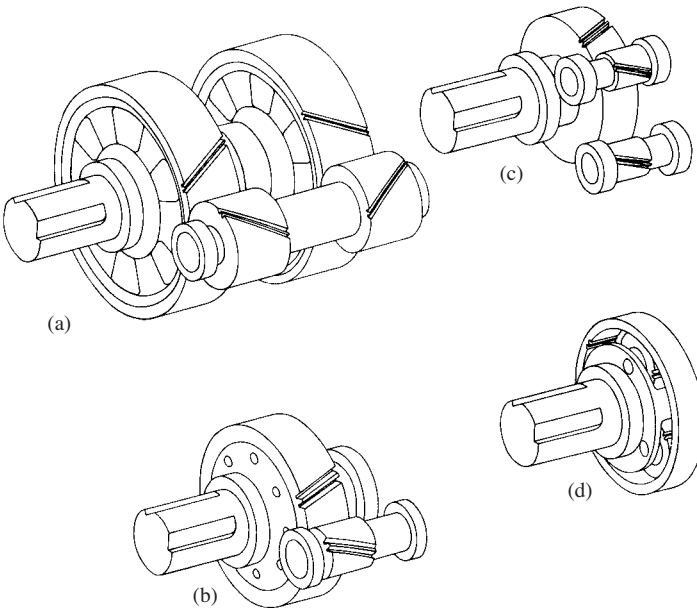
Fig. 26.21 Comparaison de réducteurs de même rapport de transmission et de même couple : (a) épicycloïdal; (b) deux étages, acier amélioré; (c) deux étages, dentures trempées et rectifiées.



**Fig. 26.22** Groupe moteur marin avec réducteurs à arbres parallèles ou train épicycloïdal.

Bagh et Briehl [26.8] ont comparé diverses structures d'engrenages (fig. 26.23) et l'influence des matériaux qui constituent l'étage de sortie d'un réducteur ayant les caractéristiques suivantes :

- puissance transmise 1240 kW
- vitesse d'entrée 1500 t/min
- vitesse de sortie ( $i = 80$ ) 18,75 t/min
- couple de sortie 630 000 Nm



**Fig. 26.23** Structure de réducteurs: (a) aciers non-traités; (b) dents cémentées et trempées; (c) idem, deux voies parallèles; (d) train épicycloïdal, dents traitées (voir tableau 26.25).

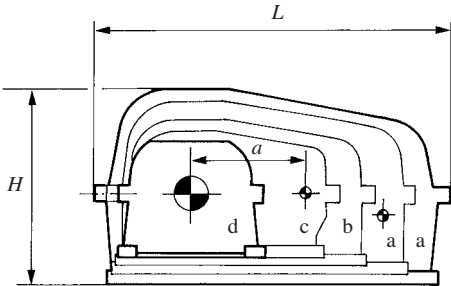


Fig. 26.24 Taille de réducteurs.

Tableau 26.25 Comparaison de masse et d'encombrement des réducteurs des figures 26.23 et 26.24.

Structure et matériaux	<i>a</i> [mm]	<i>H</i> [mm]	<i>L</i> [mm]	Masse [kg]	Vol. [m <sup>3</sup> ]
(a) roue 280 HB pignon 300 HB, amélioré	2650	2200	4300	33 500	18,5
(a) roue 280 HB pignon durci, 650 HB	2360	1970	3850	26 500	13,4
(b) dentures cémentées 62 HRc	1760	1870	3040	13 000	7,3
(c) dentures cémentées 62 HRc	1270	1500	2315	8 600	3,6
(d) satellites et planétaires cémentés, couronne améliorée	coaxial	1430	1650	6 600	3,3

La figure 26.23 compare l'encombrement des engrenages et la figure 26.24 celui du réducteur complet, le tableau 26.25 donne les valeurs chiffrées. L'engrenage à arbres parallèles est beaucoup plus petit et plus simple avec une denture cémentée et traitée (variante b) que si elle ne l'est pas (variante a) ; dans ce dernier cas, on a même installé deux engrenages côte à côte au prix d'un encombrement axial plus grand. Sa masse vaut à peu près un tiers de celle du réducteur à engrenage non traité. La distribution de la puissance sur plusieurs voies parallèles réduit encore la masse et l'encombrement. Le réducteur à train épicycloïdal offre la solution la plus compacte, sa masse est à peine supérieure au sixième de celle du réducteur le moins élaboré.

La comparaison des coûts est moins spectaculaire, le réducteur planétaire coûte 45% du prix du réducteur le plus grand. Le prix spécifique (fr/kg) est d'autant plus élevé que le réducteur est plus compact, car les alliages spéciaux et leurs traitements sont chers ; en outre, le volume de matière à enlever par usinage est relativement plus grand.

Le tableau 26.26, emprunté partiellement à Faisandier [26.9], montre clairement la grande puissance massique des moteurs hydrauliques et leur supériorité sur les moteurs électriques. C'est une des raisons qui explique le succès généralisé des transmissions et commandes hydrauliques dans les engins de travaux publics. La masse de moteurs asynchrones, pour une vitesse donnée, augmente avec leur puissance selon  $P^{0,5}$  jusqu'à 10 kW, selon  $P^{0,72 \dots 0,8}$  au-delà.

**Tableau 26.26** Comparaison des puissances massiques de moteurs.

Système	Composant		Pression [bar]	Vitesse max [t/min]	Débit [l/min]	Puissance [kW]	Masse [kg]	Puissance massique [kW/kg]
hydraulique	pompes et moteurs	aéronau- tique industrie	280 400	4 500 2 100	120 175	56 100	6 50	9 2
			vérin	300	$V_{\max}$ [m/s]			
	0,2	80 000						
électrique	dynamo alternateur moteur électrique moteur asynchrone		Voltage	Vitesse max t/min				
			29 V	9000				
			200 V	8000				
			24 V	5000				
			380 V	1 500				
		14	30	0,45				
		15	15	1				
		14	30	0,45				
		15	127	0,12				

Ces quelques exemples prouvent seulement qu’il convient d’étudier attentivement diverses solutions avant de faire un choix définitif. L’analyse de la valeur technico-économique s’opère en attribuant à chaque critère d’appréciation un poids et des points de valeur. Le détail de la méthode est décrit dans [26.7]. L’étude plus approfondie de ce sujet sort du cadre de cet ouvrage, les avantages et inconvénients respectifs des divers éléments de machines sont décrits dans la littérature spécialisée.

26.5 CONCEPTION ET SITUATION DES ORGANES

26.5.1 Genre de mouvement

Les organes animés de mouvements oscillants donnent lieu à des efforts d’inertie qui surchargent les pièces et provoquent des vibrations. Il est donc avantageux de remplacer, chaque fois que c’est possible, un mouvement alternatif par un mouvement rotatif continu. Le passage des pompes à piston aux pompes centrifuges, des machines à vapeur aux turbines ou des scies alternatives aux scies circulaires ou à ruban a été un progrès décisif vers l’accroissement des puissances. Seul le moteur à piston s’est maintenu jusqu’ici et atteint actuellement la vitesse de 16 000 t/min.

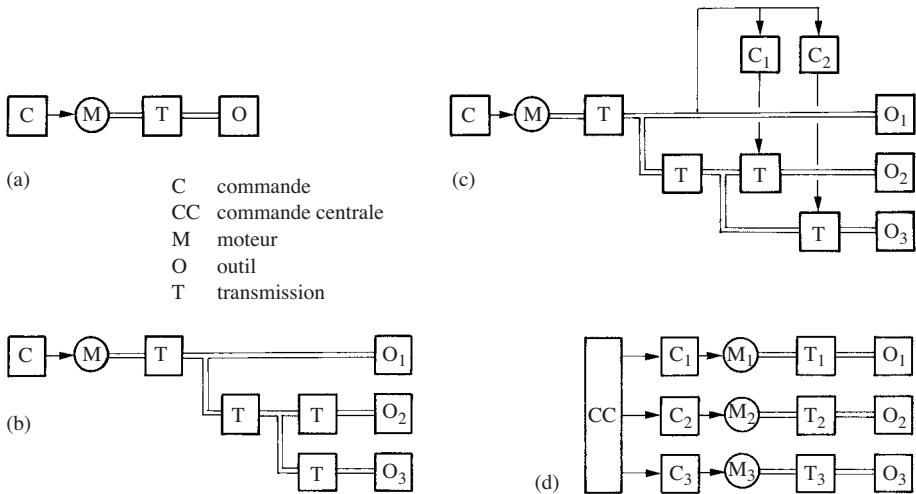
26.5.2 Entraînement

Les techniques d’entraînement ont pour but d’apporter et de doser l’énergie nécessaire au mouvement des machines. Mais la notion d’entraînement recouvre aussi la commande des moteurs et le réglage de leur vitesse. La grande souplesse d’application des moteurs électriques, la mise au point de transmissions hydrostatiques très performantes, la généralisation des commandes hydrauliques et pneumatiques, le développement fulgurant de l’électronique de commande et de l’informatique ont complètement changé la physionomie et la structure des machines. Ces développements vont encore en s’accroissant sans que l’on voie où ils s’arrêteront.

### Commande des mouvements

La disposition générale des entraînements est extrêmement variée, mais on distingue plusieurs dispositions de base :

- Chaîne cinématique droite (fig. 26.27a). Un moteur M entraîne un outil O (au sens général du terme, sect. 1.5) par l'intermédiaire d'une transmission T, le moteur est piloté par une commande C. C'est le schéma des groupes simples tels que ventilateurs, broyeurs, perceuses portatives.
- Chaîne cinématique ramifiée (fig. 26.27b). Un moteur entraîne plusieurs outils qui sont toujours en mouvement.
- Chaîne cinématique ramifiée commandée par le mouvement principal (fig. 26.27c). Un moteur entraîne plusieurs outils en mouvements séquentiels dont les commandes sont mécaniques, souvent par un arbre à came ; dans certains cas, elles sont électriques ou mixtes.
- Machines multigroupes (fig. 26.27d). Chaque outil est entraîné par son propre moteur, les commandes individuelles sont pilotées par une commande centrale, le plus souvent informatisée, éventuellement avec des séquences hiérarchisées.
- Structure mixte combinant les systèmes de base.



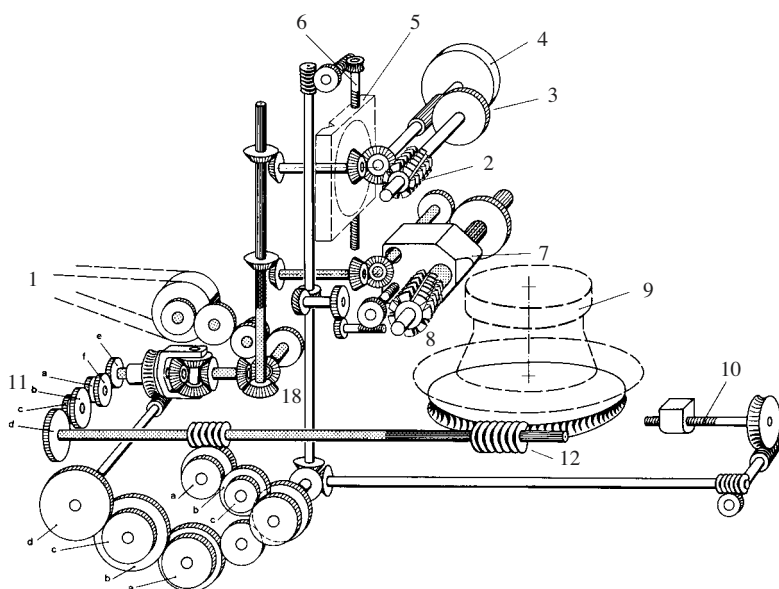
**Fig. 26.27** Structures de base d'entraînements: (a) chaîne cinématique droite; (b) chaîne ramifiée; (c) chaîne ramifiée commandée par le mouvement principal; (d) entraînements individuels avec commande centralisée.

La structure multigroupe à commande centralisée offre de nombreux avantages :

- optimisation de chaque groupe ;
- grande souplesse d'utilisation avec adaptation facile et rapide aux conditions d'exploitation ;
- facilité de pilotage par un seul homme ou par un microprocesseur ;
- simplification mécanique ;
- entretien réduit ;
- diminution du bruit.

Globalement, les machines sont aujourd'hui nettement plus performantes et relativement moins coûteuses. Cette évolution a complètement changé leur aspect en

les «démécanisant» comme le montre de manière frappante la comparaison d'une machine à tailler les engrenages de conception ancienne (fig. 26.28) avec une machine de nouvelle génération (fig. 26.29).



- |                             |  |
|-----------------------------|--|
| 1 entraînement principal    | 7 tête de fraiseage pour roue tangentielle |
| 2 fraise pour développante  | 8 fraise tangente                          |
| 3 tête de fraiseage normale | 9 ébauche                                  |
| 4 volant                    | 10 vis de positionnement radial            |
| 5 chariot porte-fraise      | 11 train du pas                            |
| 6 vis d'avance axiale       | 12 rotation de l'ébauche                   |

Fig. 26.28 Chaîne cinématique d'une machine à tailler les engrenages avec un unique moteur.

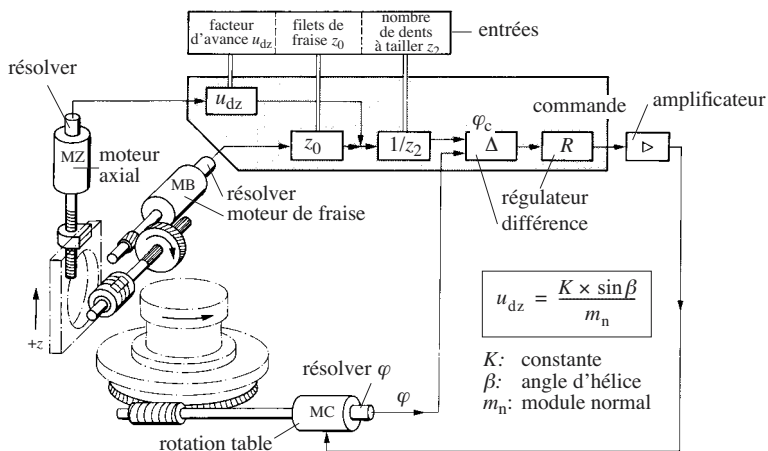


Fig. 26.29 Schéma d'une machine à tailler les engrenages à commande électronique (H. Pfauter, Ludwigshafen).

### Transmission de mouvements

Certaines machines de production (cartonnage, conditionnement, imprimerie) sont très longues et exigent la transmission de mouvements à grande distance. Il faut généralement que la transmission soit très précise pour assurer la synchronisation de divers mouvements et pour garantir la qualité du travail. Du point de vue architectural, il faut distinguer entre la transmission d'un mouvement continu et celle de mouvements variés ou cycliques.

#### *Rotation continue*

Les organes en rotation continue, à vitesse constante, ne provoquent pas de couple d'inertie cinétostatique venant charger la transmission. On utilise habituellement les organes de transmission mécaniques suivants :

- des arbres qui courent le long de la machine et qui entraînent des arbres secondaires transversaux ou verticaux par l'intermédiaire d'engrenages coniques, hélicoïdaux gauches ou vis sans fin ;
- des courroies dentées passant sur les pignons de tous les arbres transversaux ;
- des chaînes lorsque les vitesses sont relativement basses.

Les arbres sont les éléments les plus précis, insensibles à l'usure. On observe que les chaînes s'allongent progressivement avec l'usure en modifiant la phase entre les divers arbres secondaires, c'est pourquoi il est judicieux de les roder préalablement sur des appareils spéciaux. En outre, les courroies et les chaînes vibrent transversalement et impriment aux arbres secondaires des oscillations perturbatrices ; il faut toujours prévoir des dispositifs tendeurs adéquats.

Des moyens électriques permettent aussi d'entraîner plusieurs récepteurs en parfait synchronisme ou avec des rapports de vitesses constants :

- un organe central commande tous les moteurs ;
- un premier arbre sert de référence et commande les autres moteurs qui lui sont asservis.

Ces dispositifs offrent l'avantage de pouvoir varier facilement le rapport de vitesses entre les moteurs et de décaler aisément les arbres les uns par rapport aux autres (*timing*).

#### *Mouvements variés*

Les mouvements variés, le plus souvent oscillants ou cycliques, donnent lieu à des efforts d'inertie qui chargent les mécanismes et provoquent des vibrations ou affolent les suiveurs de cames. Ces mouvements sont transmis à distance par des arbres oscillants, des tringleries et des leviers. On sait que les mouvements à commande positive ne sont précis que dans la mesure où la première pulsation propre du mécanisme est 15 à 20 fois plus élevée que la pulsation fondamentale du mouvement (§ 15.4.5 et 15.4.6). Ce résultat n'est obtenu qu'avec des éléments de machines légers très rigides ; par conséquent, il faut que les organes de transmission soient courts. En outre, la multiplication des liaisons risque d'augmenter les jeux et de péjorer encore la précision. En conclusion, il faut, dans les machines rapides :

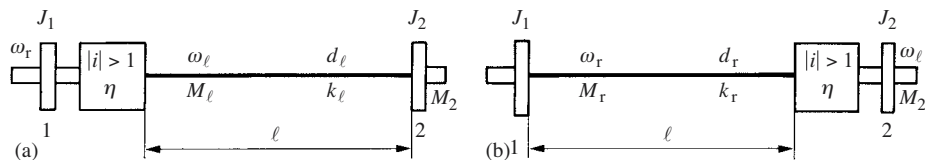
- transmettre à grande distance seulement les mouvements rotatifs continus ;
- transformer le mouvement rotatif en un mouvement varié à proximité immédiate de l'organe à commander ;
- transmettre le mouvement varié par le chemin le plus court.



### 26.5.3 Arbres de transmission

Un arbre de transmission long relie un organe (1) à un organe (2) par l'intermédiaire d'un réducteur. Selon sa position par rapport au réducteur, on envisage deux cas :

- l'arbre de transmission est lent (fig. 26.30a); ou
- l'arbre de transmission est rapide (fig. 26.30b).



**Fig. 26.30** Localisation d'un arbre de transmission : (a) arbre lent; (b) arbre rapide.

Le diamètre de l'arbre se calcule habituellement sur la base de sa résistance au couple de torsion

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{M_t}{\tau_{t\text{pd}}}} \quad (24.62)$$

Comparons les deux dispositions de différents points de vue en supposant que le matériau et la contrainte de torsion sont les mêmes dans les deux cas, l'indice  $r$  se réfère à l'arbre rapide et l'indice  $\ell$  à l'arbre lent :

- vitesse :  $\omega_r = i \omega_\ell$
- couple :  $M_r = (\eta i)^{-1} M_\ell$
- diamètre :  $d_r = |\eta i|^{-1/3} d_\ell$
- masse,  $\sim d^2$  :  $m_r = |\eta i|^{-2/3} m_\ell$
- rigidité en torsion,  $\sim d^4$  :  $k_r = |\eta i|^{-4/3} k_\ell$

On a la pulsation propre en torsion du système dans la variante (a), avec l'inertie réduite  $J_1$  à l'arbre (2),  $J_1^* = i^2 J_1$ ,

$$\omega_{1\ell} = \sqrt{k_\ell \left( \frac{1}{i^2 J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} \quad (26.2)$$

La pulsation propre de la variante (b) vaut, avec l'inertie réduite  $J_2^* = i^{-2} J_2$ ,

$$\omega_{1r} = \sqrt{k_r \left( \frac{1}{J_1} + i^2 \frac{1}{J_2} \right)}$$

Compte tenu de la relation entre les rigidités, on trouve finalement

$$\omega_{1r} = \eta^{-2/3} |i|^{1/3} \omega_{1\ell} \quad (26.3)$$

Selon la formule (18.39), la vitesse critique d'un arbre lisse étant proportionnelle à son diamètre, on peut écrire :

$$\omega_{cr} = |\eta i|^{-1/3} \omega_{c\ell} \quad (26.4)$$

Calculons encore les rapports de la vitesse de rotation à la vitesse critique dans chaque cas :

$$\beta_r = \frac{\omega_r}{\omega_{cr}} = \frac{|i| \omega_\ell}{\omega_{cr}} \quad \beta_\ell = \frac{\omega_\ell}{\omega_{c\ell}}$$

Par conséquent :

$$\beta_r = \eta^{1/3} i^{4/3} \beta_\ell \quad (26.5)$$

Ces comparaisons permettent de tirer les conclusions suivantes, valables pour des arbres exécutés dans le même matériau et sollicités avec la même contrainte de torsion :

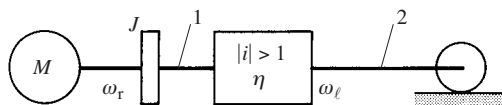
- l'arbre rapide est plus mince et plus léger ;
- la pulsation propre en torsion du système est plus grande si l'arbre long est rapide ;
- la vitesse critique en flexion de l'arbre rapide est plus basse ;
- en régime sous-critique des deux arbres, la vitesse critique de l'arbre rapide est relativement plus proche de sa vitesse de rotation que dans le cas de l'arbre lent.

On sait que la précision des mouvements d'un mécanisme est meilleure et la sollicitation dynamique des pièces par les efforts vibratoires plus petite, si la fréquence propre est élevée. Par conséquent, *il est avantageux que l'arbre de transmission long soit rapide ; il animera chaque récepteur par un réducteur particulier.*

### 26.5.4 Freins

Un pont roulant ou un chariot circulant sur un plan horizontal peut se schématiser selon la figure 26.31.  $J$  désigne le moment d'inertie réduit sur l'arbre du moteur de toutes les masses, y compris celles du pont et de la charge.

On se pose la question de savoir s'il faut installer le frein sur l'arbre rapide (1) ou sur l'arbre lent (2). Ce problème a trois aspects : taille du frein, échauffement, sûreté.



**Fig. 26.31** Schéma d'un mécanisme de translation.

### Taille du frein

Supposons tout d'abord que le frein soit monté sur l'arbre rapide, il offre le couple de freinage  $M_r$  et son moment d'inertie est  $J_r$ . Le temps d'arrêt vaut, selon (14.144),

$$t_{ar} = \frac{J + J_r}{M_r} \omega_r$$

Plaçons maintenant le frein sur l'arbre lent. Le rapport de similitude géométrique des freins étant le rapport de leur diamètre

$$\lambda = \frac{d_\ell}{d_r} \quad (26.6)$$

l'application des lois de similitude (14.153) et (14.154) donne le moment d'inertie de ce frein  $J_\ell = J_r \lambda^5$  et son couple de freinage  $M_\ell = M_r \lambda^3$ . Le moment d'inertie du groupe et du frein réduit à l'arbre (1), avec un modèle cinétostatique (§ 13.7.2), vaut maintenant

$$J' = J + \frac{1}{\eta i^2} J_r \lambda^5$$

Le couple de freinage réduit vaut

$$M_\ell^* = \frac{1}{\eta |i|} M_r \lambda^3$$

et le temps d'arrêt devient

$$t_{al} = \frac{J + \frac{1}{\eta i^2} J_r \lambda^5}{\frac{1}{\eta |i|} M_r \lambda^3} \omega_r$$

Le rapport des durées d'arrêt dans les deux montages vaut

$$\frac{t_{al}}{t_{ar}} = \frac{J + \frac{1}{\eta i^2} J_r \lambda^5}{J + J_r} \frac{\eta |i|}{\lambda^3} \quad (26.7)$$

En posant  $t_{al} = t_{ar}$ , on obtient

$$\lambda^5 - \left(1 + \frac{J}{J_r}\right) |i| \lambda^3 + \eta i^2 \frac{J}{J_r} = 0 \quad (26.8)$$

Cette équation fournit le rapport de la taille du frein situé sur l'arbre lent à celle du frein qui se trouverait sur l'arbre rapide pour la même durée d'arrêt. Examinons deux cas particuliers:

$$\bullet \quad J \ll J_r : \quad d_\ell = d_r \sqrt{|i|} \quad (26.9)$$

$$\bullet \quad J \gg J_r : \quad d_\ell = d_r \sqrt[3]{\eta |i|} \quad (26.10)$$

On conclut qu'à temps d'arrêt égal, un frein est toujours plus petit s'il est monté sur un arbre rapide que sur un arbre lent.

### Echauffement

Calculons l'énergie cinétique du groupe et du frein (nous notons exceptionnellement  $E$  afin d'éviter toute confusion avec la température):

- le frein se trouve sur l'arbre rapide

$$E_r = \frac{1}{2} (J + J_r) \omega_r^2$$

- le frein se trouve sur l'arbre lent, on réduit l'inertie du frein sur l'arbre du moteur avec un modèle cinéto-statique (13.74)

$$E_\ell = \frac{1}{2} \left( J + \frac{1}{\eta i^2} J_\ell \right) \omega_r^2 = \frac{1}{2} \left( J + \frac{1}{\eta i^2} J_r \lambda^5 \right) \omega_r^2$$

Dans le cas d'un *frein d'urgence* ou d'un *frein de ralentissement* exploité en régime temporaire, la chaleur est pratiquement entièrement stockée dans la capacité thermique du frein. Celle-ci étant proportionnelle à la masse, donc au cube du diamètre, on a le rapport des échauffements:

$$\frac{\Delta T_r}{\Delta T_\ell} = \frac{E_r}{m_r} \frac{m_\ell}{E_\ell} = \frac{J + J_r}{J + \frac{1}{\eta i^2} J_r \lambda^5} \lambda^3$$

La valeur de la fraction du second membre peut se tirer de (26.7); par substitution, on trouve

$$\frac{\Delta T_r}{\Delta T_\ell} = \frac{t_{ar}}{t_{al}} \eta |i| \quad (26.11)$$

A temps d'arrêt égal, on a

$$\frac{\Delta T_r}{\Delta T_\ell} = \eta |i| \quad (26.12)$$

Supposons maintenant que le frein soit exploité en *régime intermittent*, par exemple, dans le cas d'engins de manutention à usage intensif. Son échauffement résulte de

l'équilibre entre la production de chaleur et le refroidissement par l'air, principalement pendant la marche. Par (19.95) et pour la même fréquence d'utilisation, on peut écrire

$$\frac{\Delta T_r}{\Delta T_\ell} = \frac{h_\ell A_\ell E_r}{h_r A_r E_\ell}$$

où  $h$  est le coefficient de transmission de chaleur à l'air et  $A$  est l'aire de la surface de refroidissement.

En régime turbulent et à grande vitesse, le coefficient de transmission de chaleur est proportionnel à  $v^{0,8}$ . Comme la vitesse périphérique du frein vaut  $v = \omega d/2$  et que sa surface de refroidissement est proportionnelle à  $d^2$ , on obtient

$$\frac{\Delta T_r}{\Delta T_\ell} = \left( \frac{d_\ell \omega_\ell}{d_r \omega_r} \right)^{0,8} \left( \frac{d_\ell}{d_r} \right)^2 \frac{J + J_r}{J + \frac{1}{\eta i^2} J_r \lambda^5}$$

La valeur de la dernière fraction de cette expression se tire de (26.7). Il vient

$$\frac{\Delta T_r}{\Delta T_\ell} = \eta \left( \frac{d_\ell}{d_r} \right)^{-0,2} |i|^{0,2} \frac{t_{ar}}{t_{al}} \quad (26.13)$$

A temps d'arrêt égaux et dans les cas extrêmes considérés plus haut, on a :

$$\bullet \quad J \ll J_r : \quad \Delta T_r = \eta |i|^{0,1} \Delta T_\ell \quad (26.14)$$

$$\bullet \quad J \gg J_r : \quad \Delta T_r = \eta^{0,933} |i|^{0,133} \Delta T_\ell \quad (26.15)$$

Cette étude montre que *l'échauffement d'un frein est plus important s'il est monté sur un arbre rapide que sur un arbre lent.*

## Sûreté

Lorsque le frein est installé sur l'arbre rapide d'un treuil, les organes de transmission sont chargés pendant le freinage par l'effort statique et aussi par l'effort d'inertie de freinage de la charge. S'il se trouve sur l'arbre lent, la transmission est chargée par l'effort d'inertie provenant du moteur, mais elle est déchargée de l'effort exercé par la charge ; en fin de compte, la transmission est moins sollicitée que dans le premier cas.

La rupture accidentelle d'un quelconque organe dans la chaîne cinématique entre le frein et la charge a des conséquences dangereuses. Du point de vue de la sûreté, on a toujours intérêt à mettre le frein le plus près possible de la charge alors qu'on le voudrait sur l'arbre rapide pour diminuer sa taille.

Ces exigences contradictoires obligent d'équiper certaines machines de deux freins :

- Un frein de service destiné à ralentir et arrêter la machine lors de toutes les manœuvres normales. Il se monte généralement sur l'arbre le plus rapide, près

du moteur et doit pouvoir dissiper la chaleur produite par de fréquentes manœuvres.

- Un frein de sécurité installé le plus près possible de la charge qui doit pouvoir arrêter la machine à lui tout seul et supporter l'échauffement consécutif.

Cette conception se rencontre dans les funiculaires, les téléphériques et les machines d'extraction de puits de mines.

En cas d'exigences de sécurité extrêmes d'engins de levage, on entraîne le treuil par deux réducteurs et on prévoit deux freins. Avec la disposition illustrée par la figure 26.32, un frein parvient toujours à retenir la charge où que survienne une rupture. Chaque organe doit naturellement être dimensionné pour la charge totale.

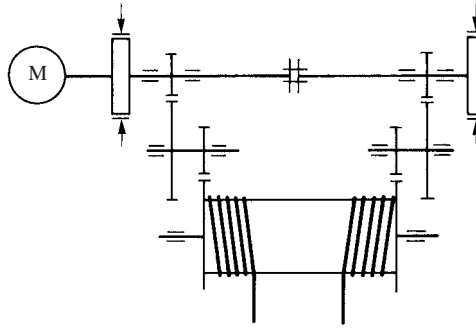


Fig. 26.32 Treuil avec deux réducteurs et deux freins.

### 26.5.5 Embrayages

L'installation d'un embrayage soulève des questions analogues à celles discutées au paragraphe précédent au sujet des freins. Lorsque la chaîne cinématique comporte un réducteur, on peut en principe mettre l'embrayage à l'entrée ou à la sortie de cet organe.

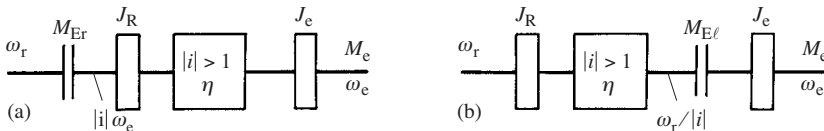


Fig. 26.33 Localisation d'un embrayage: (a) sur un arbre rapide; (b) sur un arbre lent.

### Taille

Supposons tout d'abord que l'embrayage soit situé à l'entrée du réducteur (fig. 26.33a). Il doit transmettre le couple d'entraînement  $M_e/(\eta|i|)$  et accélérer l'inertie  $J_R$  du réducteur et l'inertie réduite du mécanisme entraîné  $J_e$  jusqu'à la vitesse  $|i|\omega_e$ . La durée de synchronisation  $t_s$  étant prescrite, la formule (14.101) permet de calculer le couple d'embrayage nécessaire

$$M_{Er} = \frac{M_e}{\eta|i|} + \left( J_R + \frac{J_e}{\eta i^2} \right) \frac{|i|\omega_e}{t_s} \quad (26.16)$$

Placé sur l'arbre secondaire (fig. 26.34b), l'embrayage ne doit plus amener que l'inertie  $J_e$  jusqu'à la vitesse  $\omega_e$  dans le même temps. Il doit donc transmettre

$$M_{E\ell} = M_e + J_e \frac{\omega_e}{t_s} \quad (26.17)$$

Le rapport des couples d'embrayage nécessaire dans chaque cas vaut

$$\frac{M_{Er}}{M_{E\ell}} = \left( 1 + \frac{\eta i^2 J_R \omega_e}{M_e t_s + J_e \omega_e} \right) \frac{1}{\eta |i|} \quad (26.18)$$

Le couple d'accélération du réducteur est souvent négligeable vis-à-vis du couple d'entraînement et du couple d'accélération de l'inertie principale, alors

$$\frac{M_{Er}}{M_{E\ell}} \approx \frac{1}{\eta |i|} \quad (26.19)$$

Comme dans le cas des freins, pour une même pression de serrage des garnitures et une construction analogue, le couple transmissible par un embrayage est proportionnel au cube de son diamètre (14.154). Cette relation fournit le rapport des diamètres cherchés :

$$\frac{d_\ell}{d_r} = \lambda = \sqrt[3]{\eta |i|} \quad (26.20)$$

*A durée de synchronisation égale, un embrayage est plus grand s'il est situé sur un arbre lent.*

### Echauffement

L'embrayage situé sur l'arbre lent doit transmettre l'énergie demandée par la machine entraînée. Mais celui qui est situé sur l'arbre rapide doit en plus fournir l'énergie perdue dans la transmission et l'énergie cinétique du réducteur. En négligeant ce dernier terme et en reprenant les développements déjà faits à l'occasion de l'étude du frein (§ 26.5.4), on trouve

$$\Delta T_r = \Delta T_\ell \eta^{2,8/3} |i|^{0,133} \quad (26.21)$$

Toutes choses étant égales, *un embrayage monté sur l'arbre rapide chauffe plus intensément* parce que sa surface de refroidissement est plus petite.

### Fréquence du processus d'embrayage

On a vu que l'échauffement d'un embrayage à fonctionnement cyclique limite la vitesse de son arbre primaire et sa fréquence d'utilisation (§ 25.6.5). Examinons maintenant s'il est avantageux, de ce point de vue, de l'installer sur un arbre rapide ou sur un arbre lent.

En nous référant à la figure 26.33(b), admettons d'abord que l'embrayage soit monté sur l'arbre lent. La fréquence maximale s'obtient par l'application de la formule (25.120):

$$f_{\max \ell} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi^2} (T_{\text{adm}} - T_a) \frac{h_\ell A_\ell}{J_e} \frac{M_{E\ell} - M_e}{M_{E\ell}} \frac{1}{N^2}} \quad (26.22)$$

avec:

$T_a$	température de l'air ambiant
$T_{\text{adm}}$	température admissible du corps de l'embrayage
$h$	coefficient de transmission de chaleur
$A$	aire de la surface de refroidissement
$M_{E\ell}$	couple d'embrayage
$M_e$	couple statique d'entraînement
$N$	nombre de tours effectués par l'arbre primaire entre chaque processus d'embrayage

En mettant l'embrayage sur l'arbre rapide (fig. 25.33a), on a les relations suivantes:

- couple d'entraînement réduit:

$$M_e^* = \frac{1}{\eta|i|} M_e$$

- moment d'inertie réduit total, avec un modèle cinétostatique (§ 13.7.2):

$$J_R + J_e^* = J_R + \frac{1}{\eta i^2} J_e$$

- nombre de tours séparant deux cycles:

$$N^* = |i|N$$

- couple d'embrayage pour la même durée de synchronisation:

$$M_{Er} = \frac{1}{\eta|i|} M_{E\ell}$$

La fréquence maximale vaut alors:

$$f_{\max r} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi^2} (T_{\text{adm}} - T_a) \frac{h_r A_r}{\eta i^2 J_R + J_e} \frac{M_{E\ell} - M_e}{M_{E\ell}} \eta \frac{1}{N^2}} \quad (26.23)$$

Ecrivons le rapport des fréquences maximales:

$$\frac{f_{\max \ell}}{f_{\max r}} = \sqrt[3]{\frac{h_\ell A_\ell}{h_r A_r} \frac{1}{\eta} \left( 1 + \eta i^2 \frac{J_R}{J_e} \right)} \quad (26.24)$$



En calculant la valeur de cette expression de la même manière que pour trouver la formule (26.13), on obtient

$$\frac{f_{\max \ell}}{f_{\max r}} = \eta^{-0,0222} |i|^{0,0444} \sqrt[3]{1 + \eta i^2 \frac{J_R}{J_e}} \quad (26.25)$$

La fréquence maximale d'utilisation périodique d'un embrayage est supérieure s'il est situé sur l'arbre lent. La différence provient surtout du fait que l'embrayage rapide doit encore fournir l'énergie cinétique de la transmission et que sa surface de réfrigération est plus petite. Par exemple, pour  $i = 10$ ,  $\eta = 0,95$  et  $J_R = 0,04 J_e$ , on a

$$f_{\max \ell} = 1,87 f_{\max r}$$

## Conclusions

Un embrayage est plus petit s'il est installé sur un arbre rapide, mais il chauffe plus et doit être particulièrement bien refroidi. En régime thermique temporaire, on préfère mettre un embrayage sur un arbre rapide; en revanche il est avantageux de situer un embrayage fonctionnant cycliquement sur un arbre lent, car sa cadence limite, à échauffement égal, est supérieure.

### 26.5.6 Volants

Un volant est utilisé principalement pour stocker de l'énergie cinétique ou pour régulariser la marche d'une machine (§ 14.6.1 et § 20.4.3). On se demande s'il vaut mieux le mettre sur un arbre rapide ou sur un arbre lent.

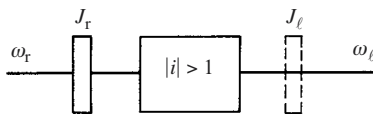


Fig. 26.34 Position d'un volant dans une chaîne cinématique.

Qu'un volant soit monté sur un arbre rapide ou sur un arbre lent (fig. 26.34), il doit contenir la même énergie cinétique, donc

$$\frac{1}{2} J_r \omega_r^2 = \frac{1}{2} J_\ell \omega_\ell^2$$

et

$$\frac{J_\ell}{J_r} = \left( \frac{\omega_r}{\omega_\ell} \right)^2 = i^2$$

On a étudié les volants au paragraphe 12.4.3. On y trouve les formules suivantes :

- masse d'un volant :

$$m = \rho R^3 G_3 \quad (12.70)$$

- moment d'inertie :

$$J = m R^2 G_1 \quad (12.63)$$

$G_1$  et  $G_3$  sont des facteurs géométriques. En introduisant ces expressions dans le rapport des moments d'inertie, on trouve les relations suivantes :

- rapport des rayons :

$$\frac{R_\ell}{R_r} = |i|^{2/5} \quad (26.26)$$

- rapport des masses :

$$\frac{m_\ell}{m_r} = |i|^{6/5} \quad (26.27)$$

La contrainte de comparaison dans un volant vaut

$$\sigma_g = \rho R^2 \omega^2 G_2 \quad (12.65)$$

où  $G_2$  est un facteur dépendant de la géométrie. On a le rapport

$$\frac{\sigma_{g\ell}}{\sigma_{gr}} = \left( \frac{R_\ell}{R_r} \frac{\omega_\ell}{\omega_r} \right)^2 = \left( |i|^{2/5} |i|^{-1} \right)^2 = |i|^{-6/5} \quad (26.28)$$

En conclusion, à énergie cinétique égale :

- un volant est plus petit et plus léger s'il est situé sur l'arbre rapide ;
- la contrainte est plus forte dans le volant situé sur l'arbre rapide.

Ce dernier résultat signifie qu'en allant jusqu'à la limite de résistance, on peut stocker plus d'énergie cinétique dans un volant lent et lourd que dans un volant rapide et léger.

Un volant sert aussi à atténuer les couples perturbateurs par un effet de barrage ; dans ce cas, il doit toujours se trouver entre la source des perturbations et les organes à protéger (§ 17.7.2).

### 26.5.7 Limiteurs d'efforts

Des efforts excessifs sont susceptibles de briser des pièces et de causer des accidents. Dans les machines sujettes à surcharge, il convient de limiter les efforts par des dispositifs idoines. On rencontre deux types de surcharge :

- la machine fonctionne, mais l'effort d'entraînement est excessif ;
- le mouvement de la machine est soudainement ou progressivement bloqué par un obstacle.

#### Effort d'entraînement excessif

Les organes de machines supportent généralement sans dommage des surcharges modérées temporaires de 10 à 20%, car ils sont calculés avec des marges de sécurité suffisantes ; en revanche, des moteurs électriques longtemps surchargés chauffent et

pourraient être endommagés. On surveille leur température interne par des thermostats placés dans le bobinage ou on mesure l'intensité du courant pour évaluer le couple par voie indirecte et déclencher le moteur en cas de surcharge durable. On profite souvent des réducteurs enfilés en bout-d'arbre (fig. 26.35) pour équiper leur bielle de réaction (1) de ressorts amortissant les chocs et de contacts de déclenchement en cas de surcharge (§ 10.4.2). La figure 26.36 montre une poulie à réducteur épicycloïdal incorporé avec son bras de réaction. Dans certains cas, on installe un couplemètre pourvu d'une électronique de surveillance avec seuil d'alerte.

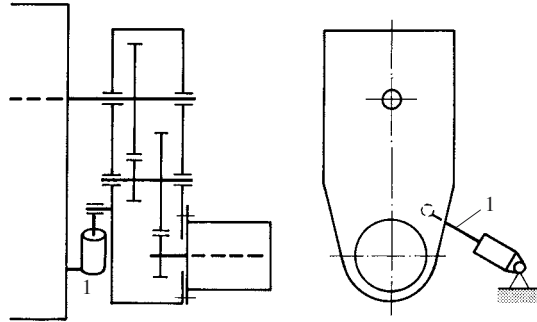


Fig. 26.35 Réducteur à enfiler en bout-d'arbre.

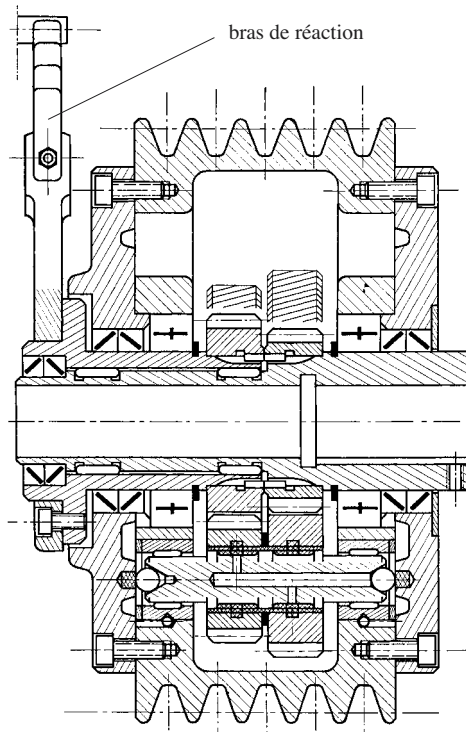


Fig. 26.36 Poulie à réducteur épicycloïdal intégré (REDEX).

Compte tenu des marges de sécurité usuelles, une surcharge importante, plus de deux fois le couple nominal, même très brève, risque de provoquer la rupture d'une pièce. Il existe divers principes de protection :

- Limiteurs de couple à pièce de rupture. Un doigt préalablement entaillé pour constituer une section fragile, casse en cas de surcharge. On ne peut malheureusement pas essayer le mécanisme de protection sans le rompre et le remplacement des goupilles prend du temps.
- Limiteurs de couple à friction (fig. 26.37). Comme dans un embrayage, des disques (5) et (6) sont serrés par un ressort (10). Le couple de glissement se règle par un écrou (8), mais il est imprécis parce que le coefficient de frottement varie dans de larges limites.
- Limiteurs à transmission de force par obstacle (fig. 26.38). Des cliquets ou des billes sont pressés par un ressort réglable dans des empreintes correspondantes de la pièce entraînée. Si le couple transmis est supérieur au couple de déclenchement, les billes (4) sont chassées des empreintes et repoussées contre la force des ressorts (2) en désolidarisant le plateau (5) et le moyeu (6).
- Les coupleurs font aussi office de limiteurs de couple (§ 20.5.5).

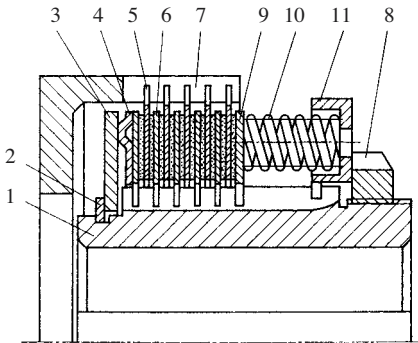


Fig. 26.37 Limiteur de couple à friction multidisque.

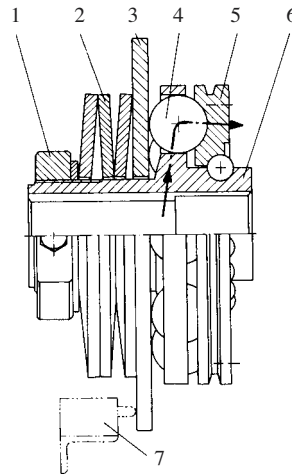


Fig. 26.38 Limiteur de couple à billes.

Les limiteurs de couple à friction s'échauffent rapidement s'ils viennent à patiner, c'est pourquoi il faut les protéger en déclenchant le moteur dès qu'ils commencent à glisser. On surveille le glissement ou la température par :

- un thermostat ou un thermomètre incorporé dans les accouplements multidisques (réponse lente) ;
- un contact signalant la désolidarisation des deux arbres ; par exemple, le contact (7) (fig. 26.38) est actionné lorsque les billes sont repoussées ;
- une roue d'impulsion sur chaque demi-arbre mesurant leur vitesse respective et un comparateur électronique signalant immédiatement le glissement ; ce dispositif, très rapide, est aussi mis à profit pour signaler des vitesses insuffisantes, témoins de surcharge, ou déceler des survitesses.

### Blocage par obstacle

On observe parfois le blocage progressif d'une machine, par exemple par un effet de bourrage du produit traité. Mais on rencontre aussi des arrêts brutaux, par exemple dans les machines-outils à commande numérique lorsque l'outil entre en collision avec l'ébauche ou lorsqu'un chariot arrive brutalement en fin de course à la suite d'une défaillance du système de contrôle. Ces collisions provoquent de fortes surcharges du fait que l'énergie cinétique des pièces en mouvement doit se transformer en énergie potentielle de déformation.

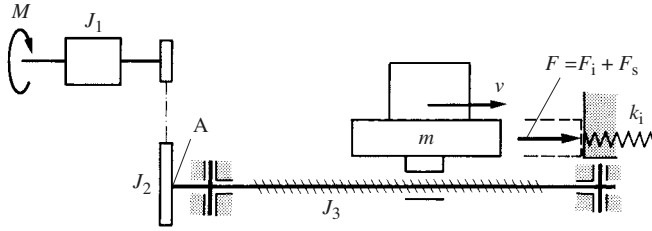


Fig. 26.39 Commande d'un chariot, collision avec le bâti.

Considérons le chariot d'une machine-outil (fig. 26.39) commandé par une vis de mouvement. Lorsqu'il vient en butée, le chariot exerce une force  $F$  sur le bâti qui se referme à travers la boucle d'effort statique par les butées, la vis et l'écrou. Avec les paramètres de cette figure, on a la masse réduite au niveau du chariot:

$$m^* = m + J_1^* + J_2^* + J_3^*$$

L'énergie cinétique de la masse réduite est convertie en énergie potentielle de déformation de la boucle d'effort. Avec la rigidité interne  $k_i$  de la boucle, on écrit le bilan d'énergie:

$$\frac{1}{2} m^* v^2 = \frac{F_i^2}{2 k_i}$$

dont on tire la force cinétique

$$F_i = v \sqrt{k_i m^*}$$

A cette force s'ajoute la force statique provoquée par le couple maximal du moteur à l'arrêt  $M_d$  (couple de démarrage). La force totale de collision vaut alors

$$F = |i| M_d + v \sqrt{k_i m^*}$$

Cette force cinétostatique évolue selon la courbe (1) de la figure 26.40 après la collision. L'installation d'un limiteur d'effort découple tous les éléments qui se trouvent en amont. On le place donc avantageusement le plus près possible de la masse, si possible dans l'écrou. Dans ce cas, la force de collision ne vaut plus que

$$F = F_E + v\sqrt{k_1 m}$$

où  $F_E$  est la force de glissement du limiteur. Elle évolue selon la courbe (2) de la figure 26.40 avec une oscillation amortie. Dans les petites machines, on se contente d'un limiteur de couple situé entre la poulie et la vis de mouvement, au point A de la figure 26.39.

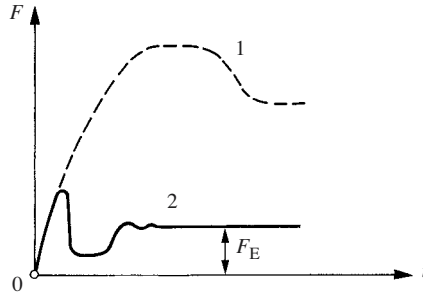


Fig. 26.40 Force de contact lors d'une collision.

### Surcharge de grues

Les grues exigent une protection vis-à-vis de deux phénomènes :

- la surcharge du câble et du mécanisme de levage ;
- le renversement de la grue par le moment de la charge par rapport à la base.

La figure 26.41 montre l'allure de la charge admissible au crochet en fonction de la portée. Le limiteur de charge se compose d'un dynamomètre et d'un calculateur qui tient compte à la fois de la charge et de la portée ; en cas de surcharge, il interdit tout levage et tout accroissement de la portée.

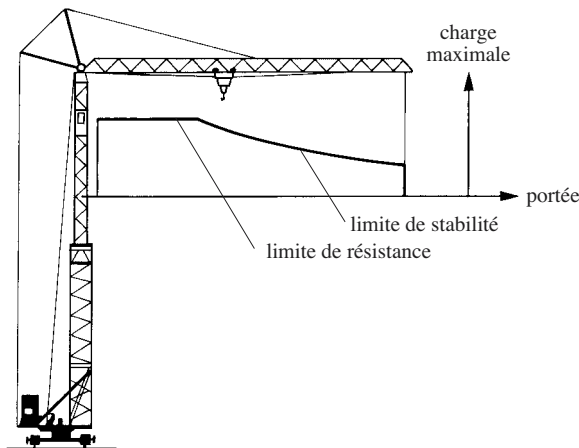


Fig. 26.41 Limites de l'effort de levage d'une grue.

### 26.5.8 Conception modulaire

La conception modulaire consiste à construire différents objets avec des éléments types qui diffèrent par leur taille et/ou par leur fonction. Par exemple, l'ensemble formé par un palier hydrodynamique, une butée et le carter les contenant peut servir aussi bien à une turbine à vapeur ou à gaz, à un turbocompresseur ou à une grande pompe. Chaque module peut s'exécuter en une série de grandeurs types permettant la construction de machines de tailles différentes. La conception modulaire est largement utilisée pour les machines électriques, les pompes et les réducteurs. Elle offre de nombreux avantages :

- les frais de développement sont uniques ;
- le calcul des coûts et la préparation de devis sont rapides ;
- la fabrication en série est accélérée ;
- la gestion de stock chez le fabricant est allégée ;
- le stock de pièces de rechange chez l'utilisateur est réduit ;
- le montage et l'entretien des machines sont facilités ;
- les délais de livraison sont abrégés.

La construction modulaire s'applique de plus en plus pour abaisser les prix de revient, mais elle présente aussi des inconvénients :

- des désirs particuliers de l'utilisateur restent insatisfaits ;
- une machine modulaire n'est pas toujours optimale.

Pahl et Beitz [26.7] décrivent le détail de la méthode de conception modulaire.

### 26.5.9 Intégration

L'intégration d'éléments et de fonctions permet généralement de simplifier les constructions et d'en réduire l'encombrement. Cette affirmation est illustrée par l'évolution des turbopompes d'alimentation de chaudières marines décrite par [26.10] cité dans [26.11]. La figure 26.42 représente une construction ancienne ; la turbine Curtis à trois étages et les deux roues de pompe centrifuge sont clavetées sur un arbre porté par trois paliers lisses hydrodynamiques. L'huile circule dans un circuit extérieur avec une pompe électrique, un filtre et un réfrigérant. La turbine et la pompe ont chacune deux joints tournants, la bêche de la turbine et celle de la pompe sont montées indépendamment l'une de l'autre sur un gros socle en fonte. La nouvelle machine (fig. 26.43) intègre les deux bêches en une pièce unique ; la roue de la pompe est en porte-à-faux sur un arbre creux reposant sur deux paliers. La turbine Curtis n'a que deux étages, elle est centrée par un arbre fin reposant sur un petit palier du côté de la turbine et logé dans l'arbre creux du côté de la pompe, le couple est transmis à la pompe par une denture Hirth. Mais le progrès le plus marquant est la lubrification des paliers et de la butée par de l'eau fournie par la pompe centrifuge supprimant du même coup tous les joints et le circuit de graissage. La pompe est non seulement plus petite, mais aussi plus fiable.

Un autre exemple est fourni par la construction du réducteur et du mât des hélicoptères proposée par Messerschmidt-Bölkow (fig. 26.44). La solution traditionnelle consiste à installer le rotor au bout de l'arbre vertical sortant du réducteur ; l'arbre transmet le couple moteur au rotor et la force de sustentation de l'appareil à la butée. La nouvelle construction relie le réducteur au rotor par un tambour jouant le rôle d'arbre creux à l'intérieur duquel se trouve le mécanisme de commande des pales. Le schéma montre clairement le gain de place obtenu.

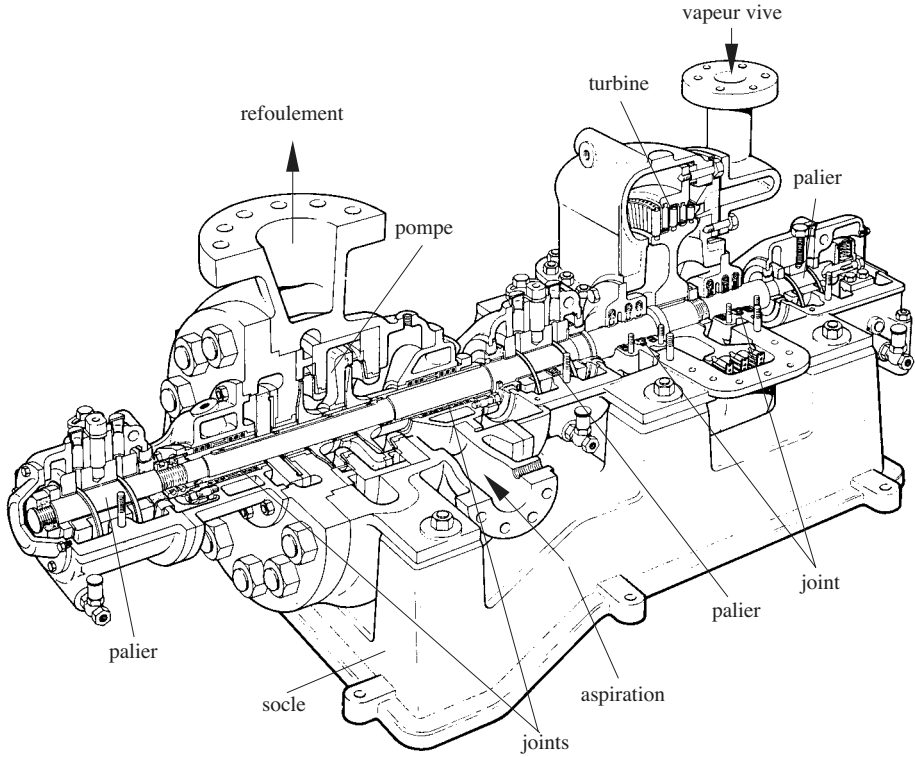


Fig. 26.42 Turbopompe Weier de construction ancienne.

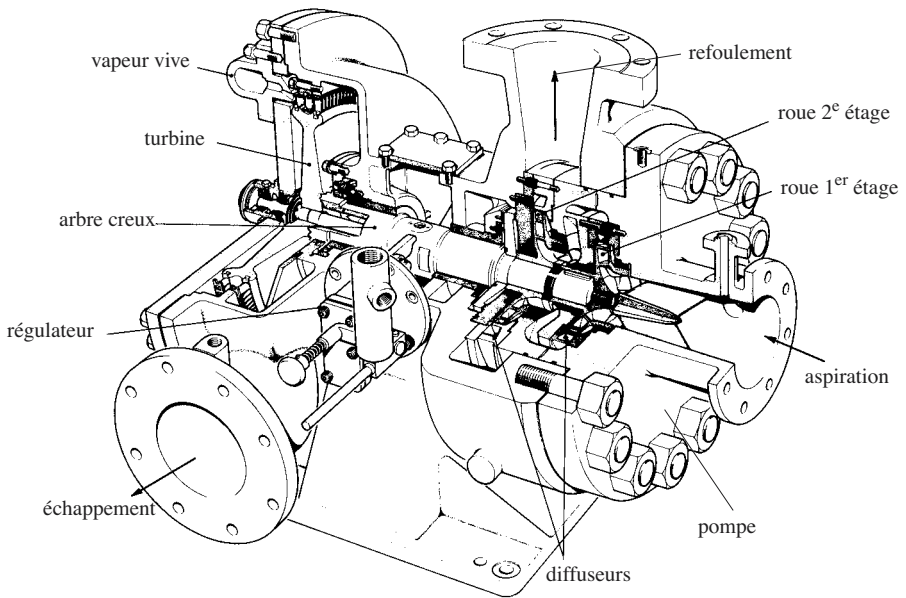
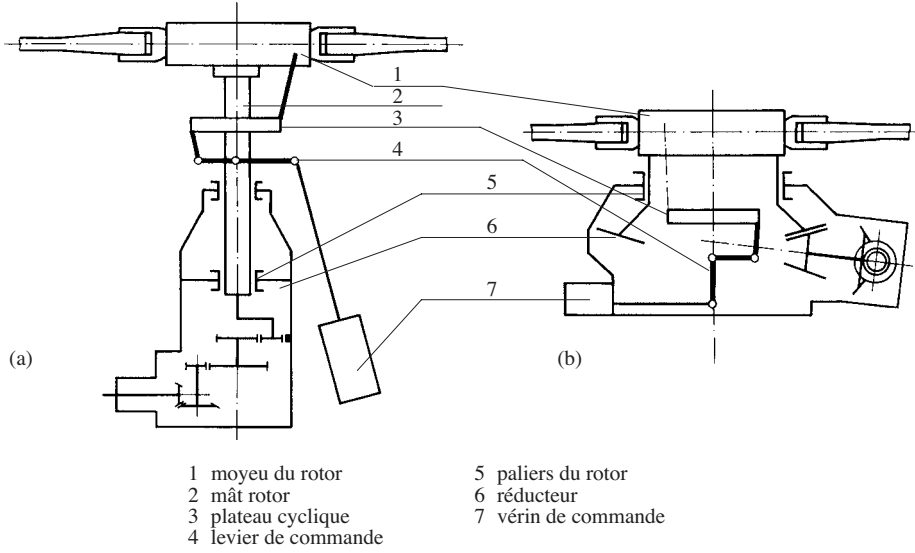
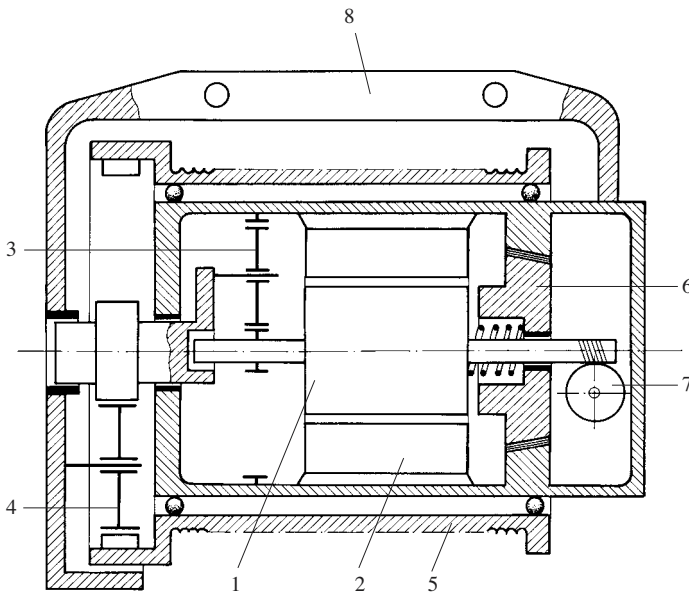


Fig. 26.43 Turbopompe intégrée.





**Fig. 26.44** Schéma de réducteurs et de mâts d'hélicoptères: (a) ancienne version; (b) nouvelle version.



**Fig. 26.45** Palan électrique: (1) rotor du moteur, (2) stator, (3) réducteur épicycloïdal, (4) second étage de réduction avec roue intermédiaire, (5) tambour à câble, (6) frein à cône à ouverture magnétique, (7) contacts de fin de course, (8) suspension.

On installe habituellement le moteur et le réducteur à l'intérieur du tambour à câble des palans électriques (fig. 26.45) ou dans les tambours d'entraînement des convoyeurs. La figure 26.36 illustre l'exemple d'un réducteur épicycloïdal logé dans la poulie d'une transmission à courroie trapézoïdale.

### 26.5.10 Esthétique

Les machines, créations humaines, ne peuvent pas égaler les beautés de la nature. Leur présence dérange et gêne l'artiste ou l'admirateur d'un beau paysage. Au début, on a voulu les embellir par des éléments d'architectures classiques: bâtis à colonnes doriques ou ioniques des machines à vapeur à balancier de Watt; manivelles incurvées en cols de cygnes. On s'est vite débarrassé de ces décorations inutiles en ne pensant qu'à l'aspect fonctionnel des pièces. Peu à peu s'est développé un nouveau sens d'esthétique industrielle qu'on désigne par l'anglicisme *design*. Le design industriel est aujourd'hui une discipline à part entière qui tente de marier technologie et art. Il englobe formes, couleurs et fonctions techniques et participe aussi à la sûreté des machines en visant de bonnes relations ergonomiques avec l'homme. C'est pourquoi le design ne doit pas être «quelque chose» qu'on entreprend en dernier, lorsque se pose la question de la couleur de la peinture. Bien plus, il faut se préoccuper de l'aspect de la machine déjà au stade de la conception en s'attachant la collaboration d'un spécialiste.

La beauté est une notion subjective qui évolue avec les époques et la culture des peuples. Mais, en restant dans notre domaine, paraît belle une machine dont les lignes sont sobres et dépouillées. On n'aime pas un objet dont l'aspect est tourmenté par un grand nombre d'appendices; il suffit de jeter un coup d'œil sur la figure 26.46 représentant un tour de deux époques très différentes. Les commandes numériques de positionnement et les commandes de moteurs à vitesse variable ont épuré les lignes en supprimant les manivelles et les leviers de manœuvre. Un utilisateur préfère travailler avec une belle machine, laquelle se vend aussi beaucoup mieux, ce qui justifie les efforts d'esthétique des constructeurs automobiles.

Une bonne machine est généralement belle; mais ce n'est naturellement pas toujours vrai. En effet, un superbe carter peut fort bien cacher un mécanisme mal conçu et

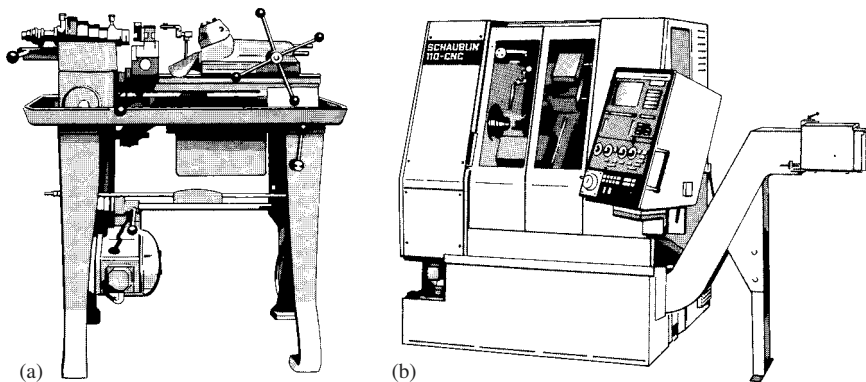


Fig. 26.46 Tours: (a) vers 1925; (b) vers 1985.

rapidement hors d'usage. Mais il semble que des machines bien construites, dans le détail et dans leur ensemble, dégagent un sentiment de beauté tranquille. Si beau rime avec simplicité et douceur de forme, on comprend mieux l'assertion précédente. En effet, les règles énoncées pour accroître la rigidité des constructions (§ 6.5.1), pour diminuer les efforts intérieurs (§ 5.10.3) et les concentrations de contraintes (§ 24.3.4) concourent toutes à la beauté du design. Hoenow [26.12] s'est penché sur ces relations et cite l'exemple de l'assemblage de carters. L'ancienne construction (fig. 26.47), toujours prisée par les débutants, dévie les forces à travers les vis (non représentées); la paroi du carter, les brides et les vis travaillent en traction et en flexion. Dans une conception moderne (fig. 26.48), les vis et les parois travaillent essentiellement en traction. Ces dernières constructions sont indiscutablement plus belles.

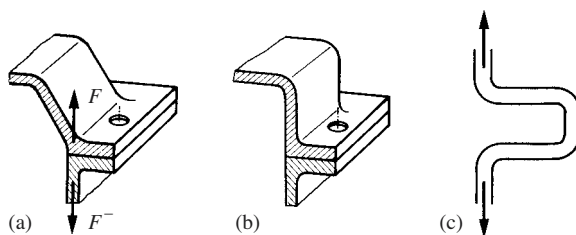


Fig. 26.47 Ancienne liaison à brides: (a) et (b) exécution; (c) cheminement de force.

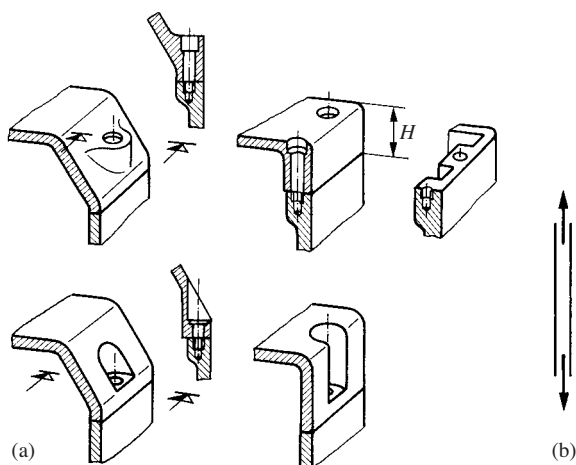
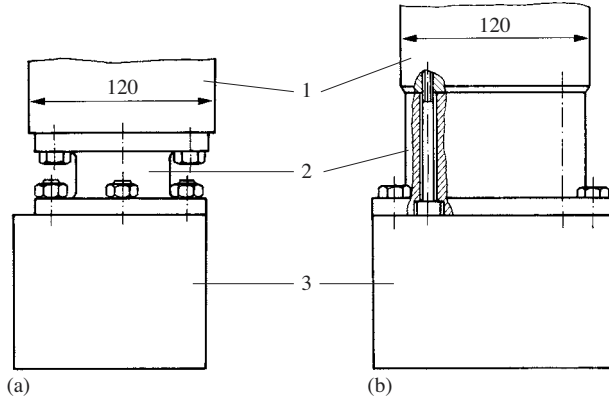


Fig. 26.48 Assemblages de carters sans bride: (a) diverses exécutions; (b) cheminement de force.

L'assemblage d'un moteur (1) avec un réducteur (3) par l'intermédiaire d'une pièce (2) (fig. 26.49) est plus beau dans la variante (b), plus fonctionnel aussi parce qu'il facilite le nettoyage de la machine et l'accès aux vis est meilleur.

Des capots et des parois de protection empêchent l'accès accidentel aux mécanismes et à l'espace de travail des machines modernes. On en profite pour améliorer l'aspect général. Un bon choix des couleurs souligne les relations entre les volumes



**Fig. 26.49** Assemblage d'un moteur et d'un réducteur: (a) apparence étriquée, vis peu accessibles, niche à saleté; (b) apparence robuste et propre.

fonctionnels et met en évidence les zones dangereuses. Un design soigneux des tableaux de commande clarifie les manœuvres et améliore la sécurité d'utilisation.

Le design est grandement facilité par la création des volumes et leur examen spatial à l'écran des ordinateurs (CAO). Mais cela ne dispense pas de confectionner une maquette de ce qu'on imagine construire pour permettre à des personnes étrangères aux bureaux d'étude et à leurs méthodes de travail de juger la conception retenue.

## 26.6 SIMILITUDES

### 26.6.1 Définitions et bases

Au stade d'un avant-projet, il est utile de savoir comment une modification de la taille ou du matériau d'un organe influence ses performances. Inversement on doit aussi pouvoir évaluer rapidement comment les dimensions d'organes évoluent avec les efforts qu'ils doivent transmettre. Certains aspects ont déjà été présentés au paragraphe 24.7.2.

On fait appel à des règles de similitude qui découlent directement de la définition mathématique des grandeurs ou de l'étude des catalogues.

#### Rapport de similitude

Soit une grandeur  $X$  d'une pièce de référence et  $X'$  la valeur de cette même grandeur dans une pièce semblable; on définit le rapport de similitude relatif à  $X$ :

$$\lambda_x = \frac{X'}{X} \quad (26.29)$$

Les valeurs  $X$  et  $X'$  ont le même signe, par conséquent le rapport de similitude est toujours positifs.

Dans les relations qui suivront, les paramètres géométriques d'une relation de similitude sont toujours ceux qui interviennent dans le calcul de la grandeur concer-

née; nous les appelons *dimensions déterminantes*. Par exemple, la contrainte dans une tige sollicitée en traction ne dépend que de l'aire de sa section et pas de sa longueur; par conséquent, pour des sections géométriquement semblables, la contrainte varie inversement au carré d'une des dimensions de la section: diamètre; hauteur d'un profilé.

On ne perdra pas de vue que les dimensions déterminantes figurant dans une relation de similitude évoluent toutes dans la même proportion. En écrivant, par exemple,

$$\lambda_V = \lambda_L^3$$

ou

$$V' = V \lambda_L^3$$

on exprime que le volume d'un corps évolue comme le cube de l'une de ses dimensions, c'est-à-dire que la forme est invariable. Par exemple, un cône grandit homothétiquement en conservant le même angle au sommet, alors son volume croît indifféremment avec le cube du rayon de sa base ou avec le cube de sa hauteur.

Le rapport de similitude du volume d'une poutre peut aussi s'écrire

$$\lambda_V = \lambda_L^2 \lambda_\ell$$

où  $\lambda_\ell$  est le rapport de similitude de la longueur et  $\lambda_L$  celui d'une dimension transversale. Dans cette similitude, seule la forme de la section reste inchangée tandis que la proportion entre la longueur et une dimension transversale est quelconque.

Le tableau 26.50 donne les relations pour des grandeurs de base.

Tableau 26.50 Similitudes de base.

Géométrie	longueur	$L' = L \lambda_L$
	surface	$A' = A \lambda_L^2$
	volume	$V' = V \lambda_L^3$
	moment de résistance	$W' = W \lambda_L^3$
	moment quadratique	$I' = I \lambda_L^4$
Cinématique	vitesse angulaire	$\omega' = \omega \lambda_\omega$
	vitesse linéaire	$v' = v \lambda_\omega \lambda_L$
	accélération angulaire	$\dot{\omega}' = \dot{\omega} \lambda_\omega$
	accélération linéaire	$a' = a \lambda_\omega^2 \lambda_L$
Matériau	masse volumique	$\rho' = \rho \lambda_\rho$
	module d'élasticité	$E' = E \lambda_E$
	résistance limite	$R'_{\text{lim}} = R_{\text{lim}} \lambda_R$
Inertie	masse	$m' = m \lambda_\rho \lambda_L^3$
	moment d'inertie	$J' = J \lambda_\rho \lambda_L^5$

**Efforts et contraintes statiques**

Du point de vue dimensionnel, une contrainte  $\sigma$  est en relation avec la force statique selon

$$F_s = \sigma A \quad [N] = [Pa] \cdot [m^2]$$

d'où la relation de similitude

$$\lambda_F = \lambda_\sigma \lambda_L^2 \quad (26.30)$$

*A contrainte égale, la force transmise par une pièce en traction ou en compression est proportionnelle au carré de sa dimension déterminante.*

Par définition, un couple est le produit d'une force par une distance, alors

$$\lambda_M = \lambda_F \lambda_L = \lambda_\sigma \lambda_L^3 \quad (26.31)$$

*A contrainte égale, un couple est proportionnel au cube d'une dimension déterminante.*

La contrainte ne peut excéder la contrainte admissible du matériau

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{R_{\text{lim}}}{S}$$

En introduisant le rapport de similitude de la résistance limite  $\lambda_R$  et celui du facteur de sécurité,  $\lambda_S$ , on a

$$\lambda_\sigma = \frac{\lambda_R}{\lambda_S} \quad (26.32)$$

Introduisons cette expression dans (26.30) et (26.31), il vient :

$$\lambda_F = \frac{\lambda_R}{\lambda_S} \lambda_L^2 \quad (26.33)$$

et

$$\lambda_M = \frac{\lambda_R}{\lambda_S} \lambda_L^3 \quad (26.34)$$

*A dimensions égales, l'effort transmissible par un organe est proportionnel à la résistance de son matériau et inversement proportionnel au facteur de sécurité.*

Les relations de similitude statique figurent dans le tableau 26.51; on y tient compte non seulement de la géométrie, mais aussi des efforts et des contraintes.

Lorsqu'une grandeur reste constante, il suffit de poser dans les formules que son rapport de similitude est égal à l'unité.

**Tableau 26.51** Similitudes statiques.

<b>Facteur de sécurité</b>		$S' = S \lambda_S$
Efforts	• force	$F' = F \lambda_F$
	• moment, couple	$M' = M \lambda_M$
<b>Contrainte dans des poutres</b> (longueur $\ell$ , une dimension transversale $L$ )		
	• traction, compression	$\sigma' = \sigma \lambda_F \lambda_L^{-2}$
	• cisaillement	$\tau' = \tau \lambda_F \lambda_L^{-2}$
	• torsion	$\tau_t' = \tau_t \lambda_M \lambda_L^{-3}$
	• flexion	$\sigma' = \sigma \lambda_F \lambda_\ell \lambda_L^{-3}$
<b>Déformation de poutres</b>		
	• traction, compression	$f' = f \lambda_E^{-1} \lambda_L^{-2} \lambda_\ell \lambda_F$ $f' = f \lambda_E^{-1} \lambda_\ell \lambda_\sigma$
	• flexion	$f' = f \lambda_E^{-1} \lambda_L^{-4} \lambda_\ell^3 \lambda_F$ $f' = f \lambda_E^{-1} \lambda_L^{-1} \lambda_\ell^2 \lambda_\sigma$
	• torsion	$\varphi' = \varphi \lambda_G^{-1} \lambda_L^{-4} \lambda_\ell \lambda_M$ $\varphi' = \varphi \lambda_G^{-1} \lambda_L^{-1} \lambda_\ell \lambda_\tau$
<b>Rigidité de poutres</b>		
	• traction compression	$k' = k \lambda_E \lambda_L^2 \lambda_\ell^{-1}$ $k' = k \lambda_E \lambda_\ell^{-1} \lambda_F \lambda_\sigma^{-1}$
	• flexion	$k' = k \lambda_E \lambda_L^4 \lambda_\ell^{-3}$ $k' = k \lambda_E \lambda_L \lambda_\ell^{-2} \lambda_F \lambda_\sigma^{-1}$
	• torsion	$k' = k \lambda_G \lambda_L^4 \lambda_\ell^{-1}$ $k' = k \lambda_G \lambda_L \lambda_\ell^{-1} \lambda_M \lambda_\tau^{-1}$

### Efforts et contraintes dynamiques

Selon la loi de Newton,

$$F = m a = \rho V a = \rho V L \omega^2$$

et

$$M = J \dot{\omega} = \rho V L^2 \dot{\omega}$$

où  $L$  est une longueur, le plus souvent un rayon. Les lois de similitude des efforts dynamiques d'organes géométriquement semblables s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_F &= \lambda_{Fi} = \lambda_p \lambda_L^4 \lambda_\omega^2 \\ \lambda_M &= \lambda_{Mi} = \lambda_p \lambda_L^5 \lambda_\omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (26.35)$$

La similitude des contraintes engendrées par ces efforts vaut

$$\lambda_{\sigma} = \lambda_p \lambda_L^2 \lambda_{\omega}^2$$

A la limite de la résistance du matériau, avec (26.32),

$$\frac{\lambda_R}{\lambda_S} = \lambda_p \lambda_L^2 \lambda_{\omega}^2$$

Tirons de cette équation le rapport de similitude de vitesses :

$$\lambda_{\omega} = \frac{1}{\lambda_L} \left( \frac{1}{\lambda_S} \frac{\lambda_R}{\lambda_p} \right)^{1/2} \quad (26.36)$$

La vitesse limite d'une pièce sollicitée par ses propres forces d'inertie est inversement proportionnelle à ses dimensions et proportionnelle à la racine carrée du rapport  $R_{lim}/\rho$  de son matériau (résistance spécifique). *Pour de grandes vitesses, il faut construire petit et utiliser des matériaux légers à haute résistance.*

### Nombre de Cauchy

Par définition, le **nombre de Cauchy** est le rapport d'une force d'inertie à une force statique

$$Ca = \left| \frac{F_i}{F_s} \right| \quad (26.37)$$

Son rapport de similitude donne

$$Ca' = Ca \frac{\lambda_{Fi}}{\lambda_F}$$

Avec les expressions (26.35) et (26.30) pour une force, respectivement (26.31) pour un couple, on obtient

$$\frac{Ca'}{Ca} = \frac{\lambda_p}{\lambda_{\sigma}} \lambda_L^2 \lambda_{\omega}^2 \quad (26.38)$$

Lorsqu'une pièce est sollicitée simultanément par un effort statique et une charge dynamique propre, on a parfois avantage à choisir une similitude qui maintient constant le rapport entre ces efforts. Cette condition s'exprime par un nombre de Cauchy constant, donc :

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_{\sigma}} \lambda_L^2 \lambda_{\omega}^2 = 1$$



et, sans changer le matériau,

$$\lambda_L \lambda_\omega = 1$$

*Pour un nombre de Cauchy constant, la vitesse est inversement proportionnelle à la taille de l'organe.*

### **Puissance**

La puissance d'un élément tournant vaut

$$P = M\omega$$

Le rapport de similitude du couple étant donné par (26.34), on a le rapport de similitude de puissance

$$\lambda_P = \frac{\lambda_R}{\lambda_S} \lambda_L^3 \lambda_\omega \quad (26.39)$$

Cette relation importante lie la puissance transmissible par un élément de machine à son matériau, au facteur de sécurité, à sa taille et à sa vitesse. *La puissance transmissible par un élément tournant est proportionnelle à sa vitesse, au cube de sa dimension principale déterminante et à la contrainte admissible par le matériau.* Sans changer le matériau ni la puissance, on a

$$\lambda_L^3 \lambda_\omega = 1 \quad (26.40)$$

*A puissance et matériau égaux, la taille d'un élément de machine tournant est inversement proportionnelle à la racine cubique de sa vitesse.*

De manière analogue, pour un organe en translation, on obtient avec (26.33)

$$\lambda_P = \frac{\lambda_R}{\lambda_S} \lambda_L^2 \lambda_v \quad (26.41)$$

*La puissance transmissible par un élément en translation est proportionnelle à sa vitesse, au carré de sa dimension transversale et à la contrainte admissible par le matériau.*

*A puissance et matériau égaux, la taille transversale d'un élément de machine en translation est inversement proportionnelle à la racine carrée de sa vitesse.*

## **26.6.2 Organes de machines**

### **Masse**

La masse de pièces géométriquement semblables varie avec  $\lambda_p \lambda_L^3$ , mais celle d'un organe tel qu'un réducteur à engrenages ou un moteur varie moins vite avec la taille parce que toutes les pièces, notamment l'épaisseur des parois du carter, ne grandissent pas proportionnellement à l'encombrement. On écrit

$$m' = m \lambda_L^n \quad (26.42)$$

L'exposant  $n$  dépend de l'organe considéré; pour des réducteurs à engrenage,  $n = 2,5$  à  $2,7$ .

### Pulsation propre de poutres continues en flexion

La formule (13.7) donne les pulsations propres d'une poutre de masse uniformément répartie. Selon les cas, on a les relations de similitude suivantes pour les pulsations propres d'ordre  $k$ :

- longueur  $\ell$  et dimensions transversales  $L$  variables:

$$\omega'_k = \omega_k \lambda_E^{1/2} \lambda_p^{-1/2} \lambda_L \lambda_\ell^{-2} \quad (26.43)$$

- longueur constante et dimensions transversales variables:

$$\omega'_k = \omega_k \lambda_E^{1/2} \lambda_p^{-1/2} \lambda_L \quad (26.44)$$

- longueur  $\ell$  variable et dimensions transversales constantes:

$$\omega'_k = \omega_k \lambda_E^{1/2} \lambda_p^{-1/2} \lambda_\ell^{-2} \quad (26.45)$$

### Pulsation propre de structures en flexion

Une poutre de masse négligeable porte une masse dont le rapport de similitude est

$$\lambda_m = \lambda_p \lambda_L^3$$

En supposant que toutes les dimensions de la poutre varient homothétiquement, le rapport de similitude de rigidité tiré du tableau 26.51 vaut

$$\lambda_k = \lambda_E \lambda_L$$

La relation entre les pulsations propres est alors

$$\omega'_0 = \omega_0 \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_m} \right)^{1/2} = \omega_0 \lambda_E^{1/2} \lambda_p^{-1/2} \lambda_L^{-1} \quad (26.46)$$

### Pulsation propre en torsion de groupes tournants

La même analyse que ci-dessus donne

$$\omega'_1 = \omega_1 \lambda_G^{1/2} \lambda_p^{-1/2} \lambda_L^{-1} \quad (26.47)$$

En conclusion:

- les fréquences propres des machines sont inversement proportionnelles à leur taille;

- les problèmes dynamiques sont plus aigus dans les grosses machines parce que leurs fréquences propres sont plus basses;
- la réduction de la taille par l'utilisation de matériaux performants est avantageuse du point de vue dynamique.

### Bielle de machines à piston

Appliquons les relations de similitude à la bielle d'un moteur à piston (fig. 26.52). Supposons que la forme de la section de la bielle ne change pas avec la taille du moteur; la taille de la section est caractérisée par sa hauteur  $h$  (dimension déterminante). La similitude de la force d'inertie transversale de la bielle s'écrit:

$$\lambda_{Fi1} = \lambda_{p1} \lambda_h^2 \lambda_\ell \lambda_a$$

Comme l'accélération est proportionnelle à  $R\omega^2$ , il vient:

$$\lambda_{Fi1} = \lambda_{p1} \lambda_h^2 \lambda_\ell \lambda_R \lambda_\omega^2$$

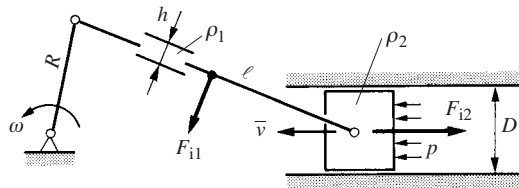


Fig. 26.52 Schéma de l'embellage d'un moteur à piston.

On a la similitude de la contrainte d'inertie de flexion (tab. 26.51):

$$\lambda_{of} = \frac{\lambda_{Fi1} \lambda_\ell}{\lambda_h^3} = \lambda_{p1} \frac{\lambda_\ell^2}{\lambda_h} \lambda_R \lambda_\omega^2$$

La vitesse moyenne du piston

$$\bar{v} = \frac{2}{\pi} R\omega$$

joue un rôle important dans le fonctionnement thermique du moteur. Faisons apparaître son rapport de similitude dans celui de la contrainte,

$$\lambda_{of} = \lambda_{p1} \frac{\lambda_\ell^2}{\lambda_h \lambda_R} \lambda_v^2 \quad (26.48)$$

Le rapport de bielle  $\ell/R$  varie très peu d'un moteur à l'autre, alors  $\lambda_\ell = \lambda_R$  et

$$\lambda_{of} = \lambda_{p1} \frac{\lambda_\ell}{\lambda_h} \lambda_v^2 \quad (26.49)$$

Cherchons maintenant le rapport de similitude de la contrainte de traction dans la bielle provoquée par la force d'inertie du piston. Ses proportions géométriques étant données, le volume du piston est proportionnel au cube de l'alésage  $D$  du cylindre. Le rapport de similitude de la force d'inertie s'écrit :

$$\lambda_{Fi2} = \lambda_{p2} \lambda_D^3 \lambda_R \lambda_\omega^2$$

Le rapport de similitude de la contrainte de traction dans la bielle s'écrit (tab. 26.51) :

$$\lambda_{\sigma t} = \frac{\lambda_{Fi2}}{\lambda_h^2} = \lambda_{p2} \frac{\lambda_D^3}{\lambda_h^2} \lambda_R \lambda_\omega^2$$

et, avec la vitesse moyenne du piston,

$$\lambda_{\sigma t} = \lambda_{p2} \frac{\lambda_D^3}{\lambda_h^2 \lambda_R} \lambda_v^2 \quad (26.50)$$

La poussée exercée par la pression  $p$  du gaz sur le piston comprime la bielle. Son rapport de similitude de force est

$$\lambda_F = \lambda_p \lambda_D^2$$

et celui de la contrainte utile dans la bielle vaut

$$\lambda_{\sigma u} = \frac{\lambda_D^2}{\lambda_h^2} \lambda_p \quad (26.51)$$

Agrandissons homothétiquement toutes les dimensions de la machine,  $\lambda_\ell = \lambda_h = \lambda_R = \lambda_D$ . Il vient, par (26.49), (26.50) et (26.51),

$$\lambda_{\sigma f} = \lambda_{p1} \lambda_v^2 \quad (26.52)$$

$$\lambda_{\sigma t} = \lambda_{p2} \lambda_v^2 \quad (26.53)$$

$$\lambda_{\sigma u} = \lambda_p \quad (26.54)$$

Ces relations démontrent que la sollicitation du matériau d'une bielle de moteur ou d'un compresseur à piston est indépendante de la taille de la machine, à vitesse moyenne constante. On améliore les performances d'une machine à piston en accroissant la vitesse moyenne; on choisit un matériau très résistant et léger pour réaliser les bielles et les pistons. C'est ainsi que l'on a passé de l'acier aux alliages légers, puis au titane et aujourd'hui à la fibre de carbone.

Cet exemple prouve que l'usage des règles de similitude, au demeurant très simples, permet de tirer rapidement des conclusions importantes pour la construction. Il démontre aussi l'existence de proportions harmonieuses (sect. 24.7).

### Arbres

Le diamètre d'un arbre dimensionné à la résistance sur la base du couple transmis est donné par la formule (24.62). Son rapport de similitude s'écrit:

$$\lambda_d = \lambda_\tau^{-1/3} \lambda_M^{1/3} \quad (26.55)$$

En exprimant le couple par la puissance transmise et la vitesse, on a:

$$\lambda_d = \lambda_\tau^{-1/3} \lambda_\omega^{-1/3} \lambda_P^{1/3} \quad (26.56)$$

Ces formules sont aussi valables si l'arbre est encore sollicité par une contrainte de flexion proportionnelle au couple transmis, à condition que la distance entre les paliers ne change pas.

### Paliers lisses hydrodynamiques

On sait que le fonctionnement des paliers lisses à lubrification hydrodynamique est régi par le nombre de Sommerfeld (§ 2.4.2 et 25.6.3). Son expression (25.96) permet d'écrire:

$$So' = So \lambda_F \lambda_\psi^2 \lambda_D^{-2} \lambda_\eta^{-1} \lambda_\omega^{-1}$$

On recommande habituellement de choisir en première approximation le jeu relatif  $\psi$  en fonction de la vitesse périphérique  $v$  [m/s] selon

$$\psi = \sqrt[4]{v/2,5} \cdot 10^{-3}$$

Son rapport de similitude est alors

$$\lambda_\psi = \lambda_d^{1/4} \lambda_\omega^{1/4}$$

Portons cette valeur dans le rapport de similitude du nombre de Sommerfeld, il vient

$$So' = So \lambda_F \lambda_D^{-3/2} \lambda_\eta^{-1} \lambda_\omega^{-1/2} \quad (26.57)$$

avec les rapports de similitude suivants:

$\lambda_F$	charge radiale
$\lambda_D$	alésage du coussinet
$\lambda_\eta$	viscosité du lubrifiant
$\lambda_\omega$	vitesse de l'arbre

Appliquons maintenant cette loi de similitude aux paliers de turbomachines. Nous voulons faire apparaître l'influence de la masse du rotor sur le nombre de Sommerfeld en retenant trois critères de dimensionnement :

### *Vitesse critique*

Le diamètre de l'arbre est très souvent déterminé par la première vitesse critique du rotor. Le rapport de similitude de la vitesse critique s'écrit sur la base de la formule (25.86) :

$$\lambda_{\omega c} = \lambda_E^{1/2} \lambda_d^2 \lambda_\ell^{-3/2} \lambda_m^{-1/2}$$

où  $\lambda_m$  est le rapport de similitude de la masse du rotor. La longueur des demi-arbres (fig. 26.53) est approximativement proportionnelle au diamètre, donc  $\lambda_\ell = \lambda_d$ . Par conséquent

$$\lambda_{\omega c} = \lambda_E^{1/2} \lambda_d^{1/2} \lambda_m^{-1/2}$$

Introduisons  $\lambda_d$  tiré de cette équation dans l'expression (26.57) en remarquant que  $D \approx d$  et  $\lambda_F = \lambda_m$ ; il vient

$$So' = So \lambda_E^{3/2} \lambda_\eta^{-1} \lambda_m^{-1/2} \lambda_{\omega c}^{-3} \lambda_\omega^{-1/2} \quad (26.58)$$

Cette formule montre que le nombre de Sommerfeld des paliers portant de gros rotors ( $m$  grand) rapides ( $\omega$  et  $\omega_{cr}$  grands) est petit. Du point de vue du nombre de Sommerfeld, ces paliers sont peu chargés.

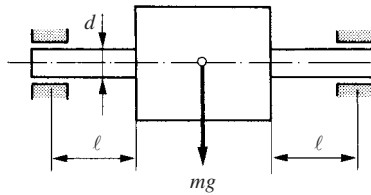


Fig. 26.53 Rotor.

### *Résistance à la flexion*

Le rapport de similitude de la contrainte de flexion d'un arbre se déduit de la formule valable pour une poutre dans le tableau 26.51 :

$$\lambda_\sigma = \lambda_F \lambda_\ell \lambda_d^{-3}$$

Avec le même raisonnement que dans le calcul avec la vitesse critique, on trouve finalement :

$$So' = So \lambda_\sigma^{3/4} \lambda_\eta^{-1} \lambda_m^{1/4} \lambda_\omega^{-1/2} \quad (26.59)$$

### Résistance à la torsion

La masse du rotor n'intervient pas dans le diamètre de l'arbre si seul le couple transmis est déterminant. Dans ce cas, la formule (26.57) montre que le nombre de Sommerfeld est proportionnel à la masse du rotor.

### Conclusions

Cette analyse et des évaluations numériques permettent de tirer les conclusions suivantes :

- Les paliers de gros rotors rapides dont l'arbre est dimensionné sur la base du critère de vitesse critique fonctionnent avec un petit nombre de Sommerfeld ; il sont peu chargés.
- Si le diamètre de l'arbre est déterminé par la résistance à la flexion, le nombre de Sommerfeld augmente comme  $m^{1/4}$ . Il est proportionnel à la masse si l'arbre ne dépend que du couple transmis.

### Roulements

Le rapport de similitude de la charge équivalente d'un roulement se déduit facilement de l'équation (25.107). On trouve

$$\lambda_{Fe} = \lambda_{Lh}^{-1/p} \lambda_w^{-1/p} \lambda_d^m \lambda_c \quad (26.60)$$

Avec les valeurs des exposants figurant dans le tableau 25.30, on voit que la charge équivalente tolérable augmente vite avec la taille du roulement, mais diminue lorsque la vitesse croît.

La charge est transmise dans les roulements par des contacts hertziens. On peut admettre que le nombre de corps roulants, billes, galets ou aiguilles, est approximativement le même pour tous les roulements d'une même série, mais que le diamètre de ces éléments est proportionnel à l'alésage du roulement. Sur la base de (6.46), le rapport de similitude de la rigidité des roulements à billes s'écrit

$$\lambda_k = \lambda_d^{1/3} \lambda_F^{1/3} \quad (26.61)$$

et pour les roulements à galets, avec (6.53),

$$\lambda_k = \lambda_b^{0,8} \lambda_F^{0,1} \quad (26.62)$$

Les roulements à galets sont plus rigides que les roulements à billes à cause du contact linéaire des corps roulants ; les roulements à aiguilles sont encore plus rigides parce que leurs corps roulants sont plus nombreux.

La rigidité des roulements dépend, d'une part de la taille et du genre de roulement, d'autre part de la charge transmise. En admettant une *longévité constante*, c'est-à-dire une pression hertzienne constante, pour une vitesse donnée, on démontre que

$$\lambda_k = \lambda_d \quad (26.63)$$

*A vitesse et longévité égales, la rigidité de roulements à billes ou à galets est proportionnelle à l'alésage.*

Pour un alésage donné, on accroît la rigidité d'un palier en répartissant la charge radiale sur  $n$  roulements disposés côte à côte. La rigidité d'un roulement diminue mais les  $n$  rigidités sont en parallèle. Selon le genre de roulements, on a :

- roulements à billes

$$k' = k n \left( \frac{1}{n} \right)^{1/3} = k n^{2/3} \quad (26.64)$$

- roulements à galets

$$k' = k n \left( \frac{1}{n} \right)^{0.1} = k n^{0.9} \quad (26.65)$$

### Rotors

La vitesse critique du rotor esquissé à la figure 25.28(b) est donnée par la formule (25.87). En variant proportionnellement toutes les dimensions, la racine carrée de cette formule reste constante et la vitesse critique obéit alors à la similitude

$$\lambda_{wc} = \lambda_L^{-1} \quad (26.66)$$

La vitesse critique est inversement proportionnelle à la taille de la machine, on retrouve la loi (26.46).

### 26.6.3 Réducteur

Pour illustrer l'application des méthodes, on se propose une étude générale d'un réducteur à engrenage visant à répondre aux questions suivantes :

- La taille de l'engrenage est-elle déterminée par la résistance des dents à la flexion ou par la résistance à la pression superficielle?
- Le pignon doit-il être rapporté sur son arbre ou taillé dans la masse avec l'arbre?
- Peut-on utiliser des paliers à roulements ou faut-il des paliers hydrodynamiques?
- Les paliers les plus proches de leurs limites d'utilisation sont-ils situés sur l'arbre rapide ou sur l'arbre lent?

On étudie le dimensionnement du réducteur schématisé à la figure 26.54 en fonction de la puissance transmise et de la vitesse de l'arbre d'entrée.

### Engrenage

Les dentures d'un engrenage doivent résister à la flexion et à la pression de contact. Les formules de prédimensionnement du module sont: (19.81) pour la flexion et (19.82) pour la pression. Le module de l'engrenage doit être supérieur ou égal au plus grand des deux modules.

Formons le rapport des modules ; après introduction des résistances admissible du matériau, on trouve :

$$\frac{m_{nH}}{m_{nF}} = 1,413 \sqrt[3]{\frac{S_H^2}{S_F} \frac{\sigma_{F \lim}}{\sigma_{H \lim}^2} Z_E^2} \sqrt[3]{\frac{\cos \beta}{z_1} \frac{1+u}{u}} \quad (26.67)$$



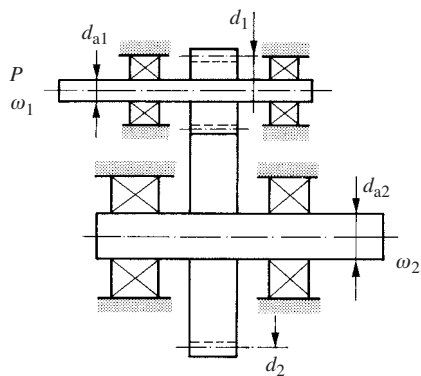


Fig. 26.54 Réducteur à engrenage.

Le tableau 26.55 donne la valeur de ce rapport. On constate que le module est déterminé par le critère de la résistance à la flexion lorsque les flancs des dentures sont trempés ; le critère de la pression de contact permet le dimensionnement des matériaux à faible dureté.

**Tableau 26.55** Critère de dimensionnement du module d'un pignon, calculé avec une sécurité en flexion de 1,8, une sécurité à la pression de 1,3,  $Z_E = 192 \sqrt{MP_a}$ ,  $\beta = 0^\circ$  et des résistances limites des matériaux selon le tableau 26.56.

Matériau et traitement	$u$ $z_1$	$m_{nH}/m_{nF}$			
		2,8	2,8	5,5	5,5
		21	30	21	30
Ac 60		1,99	1,77	1,90	1,69
CK 45 normalisé		1,54	1,36	1,47	1,30
37 Cr 4 amélioré		1,59	1,41	1,52	1,35
37 Cr 4 trempé par induction		1,06	0,94	1,01	0,90
42 Cr Mo 4 nitruré		1,22	1,08	1,17	1,06
20 Mn Cr 5 cémenté		1,04	0,93	1,00	0,89

Le diamètre primitif du pignon vaut

$$d_1 = z_1 \frac{m_n}{\cos \beta} \tag{26.68}$$

où  $\beta$  est l'angle d'hélice de la denture.

La largeur  $b$  de la denture se réfère habituellement au module par la largeur relative

$$\psi_m = \frac{b}{m_n}$$

Mais on a une meilleure visualisation des proportions géométriques en référant la largeur au diamètre primitif du pignon. Avec (26.68), il vient

$$\psi_d = \frac{b}{d_1} = \frac{b}{m_n z_1} \cos \beta = \frac{\psi_m}{z_1} \cos \beta \quad (26.69)$$

On ne peut exploiter pleinement la capacité de charge théorique d'un engrenage que si la force normale de denture est transmise uniformément sur la ligne de contact. C'est pourquoi il est inutile et même nuisible de faire un pignon très large si l'arbre s'incline par l'effet des forces appliquées ou si le taillage est de mauvaise qualité. On indique, par exemple,  $\psi_m = 10 \dots 15$  pour un pignon monté en porte-à-faux et  $\psi_m = 25 \dots 30$  et plus lorsque le pignon se trouve sur un arbre très rigide entre des paliers à roulement. Avec les nombres de dents usuels, 19 à 31, et  $\beta$  compris entre 0 et 20°, ces valeurs donnent les proportions  $\psi_d = 0,3 \dots 0,7$  et respectivement 0,8...1,6.

Calculons le diamètre primitif du pignon sur la base du critère de résistance à la flexion. Par la formule (26.68) dans laquelle on introduit le module donné par l'expression (19.81) avec la résistance admissible en flexion, il vient:

$$d_{1F} = 1,64 \sqrt[3]{\frac{M_1 z_1 S_F}{\psi_d \cos \beta \sigma_{F \lim}}} \quad (26.70)$$

Dans le cas où la résistance à la pression de contact est déterminante, il vient avec (19.82):

$$d_{1H} = 2,317 \sqrt[3]{\frac{M_1 S_H^2}{\psi_d \sigma_{H \lim}^2} Z_E^2 \frac{1+u}{u}} \quad (26.71)$$

Notons que cette dernière valeur est indépendante du nombre de dents et de l'angle d'hélice.

Le tableau 26.56 montre que le traitement du flanc des dents diminue très sensiblement la taille d'un engrenage; c'est aussi visible dans le tableau 26.25.

**Tableau 26.56** Taille d'un pignon selon les matériaux, calculée avec  $u = 2,8$ , une sécurité en flexion de 1,8, une sécurité à la pression de 1,3, un couple  $M_1 = 1000 \text{ Nm}$  et une largeur  $b = d_1$ ,  $z_1 = 30$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $Z_E = 192 \sqrt{\text{MPa}}$ .

Matériau et traitement	$\sigma_{F \lim}$ [MPa]	$\sigma_{H \lim}$ [MPa]	$d_{1F \min}$ [mm]	$d_{1H \min}$ [mm]	$m$ [mm]	$d_1$ [mm]	%
Ac 60	200	400	106	187,3	6,5	195	100
CK 45 normalisé	200	590	106	144,6	5,0	150	77
37 Cr 4 amélioré	270	650	95,9	135,5	4,5*	135	69
37 Cr 4 trempé par induction	310	1280	91,6	86,3	3,0*	90	46
42 Cr Mo 4 nitruré	430	1220	82,1	89,1	3,0	90	46
20 Mn Cr 5 cémenté	480	1630	79,2	73,4	2,5*	75	39

\* Valeur arrondie en-dessous (correction de denture)

### Charge sur les paliers

Un engrenage cylindrique exerce sur les arbres les forces suivantes :

- une *force radiale*, la force normale apparente de denture,

$$F_{nt} \approx \frac{2 M_1}{d_1} \frac{1}{\cos \alpha_n} \quad (26.72)$$

où  $\alpha_n$  est l'angle de pression dans le plan normal aux dents ;

- une force axiale

$$F_a = \frac{2 M_1}{d_1} \tan \beta \quad (26.73)$$

Introduisons l'expression (26.71) du diamètre du pignon dans (26.72). On obtient :

$$F_{nt} = \frac{2}{B_1} \left( \frac{\sigma_F \lim}{z_1} \right)^{1/3} M_1^{2/3} \frac{(\cos \beta)^{1/3}}{\cos \alpha_n} \quad (26.74)$$

La recherche de constructions compactes qui recourent à des aciers à haute résistance traités et en diminuant le nombre de dents du pignon a pour conséquence d'accroître considérablement la charge sur les arbres, et elle pose des problèmes pour les paliers à cause de la diminution du diamètre du pignon.

L'action sur les paliers dépend de la position du pignon et de la roue par rapport aux paliers et du genre de palier. Dans le cas de la figure 26.54, où l'engrenage est situé au milieu de la portée, chaque palier est chargé par  $F_{nt}/2$ .

### Diamètre des arbres

#### Arbre rapide

Le diamètre de l'arbre du pignon s'exprime par une formule du type

$$d_{a1} = A_1 \sqrt[3]{\frac{M_1}{R_{\lim 1}}} S \quad (26.75)$$

Le facteur  $A_1$  dépend de la géométrie.

Le rapport du diamètre primitif du pignon au diamètre de son arbre vaut, avec les formules (26.70) et (26.71),

$$\frac{d_{1F}}{d_{a1}} = \frac{1,64}{A_1} \sqrt[3]{\frac{z_1}{\psi_d \cos \beta} \frac{S_F}{S} \frac{R_{\lim 1}}{\sigma_F \lim}} \quad (26.76)$$

$$\frac{d_{1H}}{d_{a1}} = \frac{2,317}{A_1} \sqrt[3]{\frac{1}{\psi_d} \frac{S_H^2}{S} \frac{R_{\lim 1}}{\sigma_H^2 \lim} \frac{Z_E^2}{u} \frac{1+u}{u}} \quad (26.77)$$

On choisit habituellement des matériaux de même classe de qualité pour l'arbre et pour le pignon. Le matériau est même identique lorsque l'arbre et le pignon sont monobloc. Le rapport des résistances des matériaux dans ces formules varie donc relativement peu. Il est remarquable que le rapport des diamètres soit indépendant du couple, c'est une proportion harmonieuse.

L'analyse des tableaux 26.55 et 26.56 montre qu'un pignon est le plus petit lorsque ses dents sont durcies par trempe ou nitruration. La résistance à la flexion de ces aciers est élevée, de sorte que le diamètre primitif du pignon est relativement petit par rapport à l'arbre. Le rapport (26.76) pourrait même devenir inférieur à l'unité surtout si le facteur  $A_1$  est grand à cause de la flexion. En définitive le pignon sera avantageusement pris dans la masse avec l'arbre si sa denture est traitée.

En revanche, le pignon se rapporte sur l'arbre s'il est en un acier relativement peu résistant, surtout si son nombre de dents est grand.

### Similitudes

On se propose de comparer le diamètre des deux arbres, puis de comparer leur paliers afin de savoir lesquels sont déterminants. L'arbre rapide (indice 1) sert de référence. Le rapport de similitude d'une grandeur  $X$  entre cet arbre et l'arbre (indice 2) s'écrit:

$$\lambda_x = \left| \frac{X_2}{X_1} \right| \quad (26.78)$$

On ne considère que la valeur absolue du rapport car un rapport de similitude est par essence positif. Les rapports de similitude élémentaires sont:

- pour la vitesse

$$\lambda_\omega = \left| \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| = |i|^{-1} \quad (26.79)$$

- pour le couple

$$\lambda_M = \left| \frac{M_2}{M_1} \right| = \eta |i| \quad (26.80)$$

- pour la contrainte admissible

$$\lambda_\sigma = \left| \frac{R_{\lim 2/S_2}}{R_{\lim 1/S_1}} \right| = \lambda_{R \lim} \lambda_s^{-1} \quad (26.81)$$

### Arbre lent

La formule (26.75) permet d'écrire le rapport de similitude des diamètres:

$$\lambda_{da} = \frac{d_{a2}}{d_{a1}} = \frac{A_2}{A_1} \lambda_{R \lim}^{-1/3} \lambda_s^{1/3} \lambda_M^{1/3}$$

Le facteur de sécurité est habituellement le même pour les deux arbres; par conséquent  $\lambda_s = 1$ . Avec (26.80) il vient:

$$\lambda_{da} = \frac{A_2}{A_1} \lambda_{R \lim}^{-1/3} (\eta|i|)^{1/3} \quad (26.82)$$

L'arbre lent est plus gros que l'arbre rapide; la différence s'accroît encore si l'arbre du pignon est fait en un acier plus résistant comme c'est souvent le cas.

### Roulements

Le rapport de similitude de la longévité des roulements des deux arbres se tire de (26.60):

$$\lambda_{Lh} = \frac{L_{h2}}{L_{h1}} = \lambda_{Fe}^{-p} \lambda_{\omega}^{-1} \lambda_{da}^{mp} \lambda_c^p \quad (26.83)$$

Les deux arbres sont chargés par la même force d'engrènement et on suppose qu'elle se répartit de la même manière sur les deux paliers de chaque arbre; alors  $\lambda_{Fe} = 1$ . Avec (26.79) et (26.82), on obtient:

$$\lambda_{Lh} = \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^{mp} \eta^{mp/3} \lambda_{R \lim}^{-mp/3} \lambda_c^p |i|^{1+mp/3} \quad (26.84)$$

Ecrivons encore le rapport de similitude de l'indice de vitesse des roulements des deux arbres:

$$\lambda_I = \frac{(nd)_2}{(nd)_1} = \frac{A_2}{A_1} \eta^{1/3} \lambda_{R \lim}^{-1/3} i^{-2/3} \quad (26.85)$$

Une évaluation numérique montre qu'on a habituellement  $\lambda_{Lh} > 1$  et  $\lambda_I < 1$ . Ces résultats signifient que la longévité des roulements portant l'arbre rapide est la plus courte et que leur indice de vitesse est le plus élevé.

### Limite d'application des roulements

L'emploi de roulements dans les paliers de transmission est limité par leur longévité. On vient de constater que les roulements de l'arbre rapide sont les plus sollicités; cherchons leur longévité en fonction de la vitesse de cet arbre et de la puissance transmise. Cette valeur a déjà été calculée au paragraphe 24.7.2:

$$L_h = a_1 a_{23} f_T 1745 \left( \frac{c}{B_1} \right)^p B^{mp} \omega_1^{(2-m)p/3-1} P^{-(2-m)p/3} \quad (24.129)$$

avec:

- $a_1$  facteur de fiabilité
- $a_{23}$  facteur de correction pour le matériau et les conditions de fonctionnement du roulement

- $c$  coefficient dépendant du type et du modèle de roulement  
 $f_T$  facteur de température  
 $B$  et  $B_1$  voir le développement de la formule (24.127)

Avec les valeurs des exposants  $m$  et  $p$  données dans le tableau 25.30, on a les lois suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ roulements à billes à gorges profondes: } L_h \sim \omega_1^{-0,5} P^{-0,5} \\ \bullet \text{ roulements à galets cylindriques: } L_h \sim \omega_1^{-0,444} P^{-0,555} \end{array} \right\} (26.86)$$

On note que la longévité des roulements diminue lorsque la vitesse et la puissance augmentent. Par conséquent, l'utilisation de roulements ne convient pas pour les transmissions très rapides et très puissantes.

Tirons la puissance de l'équation (24.129) pour mettre en évidence la limite de puissance transmissible en fonction de la vitesse et de la longévité. En réunissant tous les coefficients de  $\omega_1$  et de  $P$  en un coefficient unique  $B_2$  on trouve:

$$P = \left( \frac{B_2}{L_h} \right) \frac{3}{(2-m)p} \omega_1^{1 - \frac{3}{(2-m)p}} \quad (26.87)$$

Cette fonction est représentée à la figure 26.57 avec des échelles logarithmiques. La droite limite baisse lorsque la longévité exigée augmente.

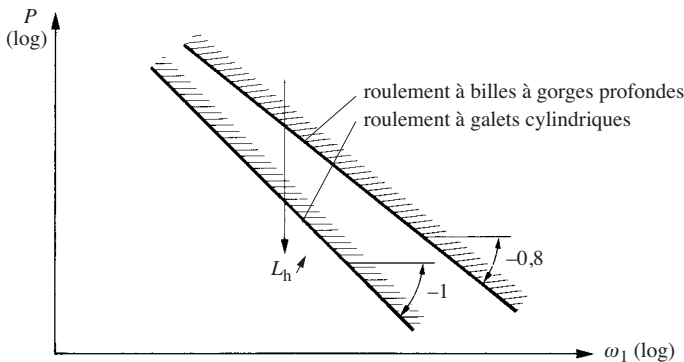


Fig. 26.57 Limitation de puissance de réducteurs à engrenage en fonction de la vitesse du pignon.

### Paliers lisses hydrodynamiques

Lorsqu'on a épuisé les ressources des roulements, on recourt à des paliers lisses hydrodynamiques, en particulier lorsque les arbres tournent vite comme dans les réducteurs pour turbomachines. Ecrivons le rapport des nombres de Sommerfeld calculés pour chaque arbre par (26.57) en supposant que les paliers ont la même largeur relative  $\beta_2 = \beta_1$ , que l'huile à la même viscosité  $\eta_2 = \eta_1$  et que  $F_2 = F_1$ ,

$$\lambda_{So} = \frac{So_2}{So_1} = \lambda_D^{-3/2} \lambda_w^{-1/2} \quad (26.88)$$

Avec (26.82) et les relations (26.80) et (26.81), il vient

$$\lambda_{So} = \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^{-3/2} \eta^{-1/2} \lambda_{R \text{ lim}}^{1/2} \quad (26.89)$$

On note qu'à matériaux égaux, le nombre de Sommerfeld prend la même valeur dans les paliers des deux arbres. Il est en réalité un peu plus petit dans les paliers de l'arbre de sortie parce que, selon les formules (25.99) ou (25.101), l'échauffement y est plus faible et l'huile plus visqueuse.

L'épaisseur minimale du film d'huile vaut

$$h_0 = \psi \frac{d_a}{2} (1 - \varepsilon)$$

où  $\varepsilon$  est l'excentricité de l'arbre. Le rapport des épaisseurs minimales vaut alors

$$\lambda_{h0} = \frac{h_{02}}{h_{01}} = \lambda_\psi \lambda_{da} \frac{1 - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1} \quad (26.90)$$

$\varepsilon$  augmente lorsque  $So$  croît, mais comme les nombres de Sommerfeld des paliers sont voisins, on admet  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Avec un calcul analogue à celui développé ci-dessus, on obtient

$$\lambda_{h0} = \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^{5/4} \eta^{5/12} \lambda_{R \text{ lim}}^{-5/12} |i|^{1/6} \quad (26.91)$$

L'évaluation numérique montre que *le film d'huile est plus mince dans les paliers de l'arbre rapide*. Pour un même état de surface, ce sont donc ces paliers qui sont le plus délicats et dont le dimensionnement est déterminant. Cette conclusion peut s'inverser dans les gros réducteurs où le poids de la roue peut accroître sensiblement la charge sur les paliers de l'arbre lent.

Introduisons (26.74) et (26.75) dans l'expression (25.96) du nombre de Sommerfeld. On constate que *le nombre de Sommerfeld du palier du pignon est indépendant du couple de dimensionnement, il est seulement inversement proportionnel à la vitesse du pignon*.

## Conclusions

- Le module, et donc la taille, d'un engrenage est déterminé par la résistance à la flexion des dents si les flancs sont trempés. La pression hertzienne est déterminante pour des matériaux peu résistants. Dans les cas intermédiaires il convient de calculer le module pour les deux critères.

- Un pignon à haute résistance, durci, est généralement pris dans la masse de l'arbre. Il est rapporté sur l'arbre s'il est fait en un matériau peu résistant; dans ce cas son diamètre est indépendant du nombre de dents.
- Dans le cas où l'entraxe est imposé, on choisira les matériaux, les traitements de surface et le nombre de dents en visant une solution économique. Il est inutile d'utiliser un acier à haute résistance coûteux si un matériau moins résistant suffit.
- L'arbre lent est plus gros que l'arbre rapide.
- Les paliers à roulement ne conviennent pas pour les grandes vitesses ni pour les fortes puissances.
- La puissance maximale acceptable avec des roulements diminue lorsque la vitesse augmente ou lorsque la longévité désirée croît. On peut repousser la limite en prenant les précautions suivantes:
  - choisir des types de roulements offrant une forte capacité de charge dynamique de base;
  - faire les arbres plus gros que strictement nécessaire du point de vue de la résistance afin de pouvoir installer des roulements de plus grande taille, mais en veillant à ce que l'indice de vitesse soit acceptable;
  - soigner l'étanchéité extérieure, mais empêcher aussi par des joints la pénétration dans les roulements d'impuretés provenant de l'intérieur du mécanisme;
  - lubrifier correctement les roulements, choisir une huile éprouvée;
  - en cas de lubrification forcée, filtrer soigneusement l'huile, retenir les particules plus grandes que 5  $\mu\text{m}$ .
- Ce sont les roulements de l'arbre rapide qui sont critiques car leur longévité est en principe plus courte que celle des arbres lents.
- Les paliers hydrodynamiques de l'arbre rapide sont plus délicats que ceux de l'arbre lent parce que l'épaisseur minimale du film d'huile y est plus petite.
- Le nombre de Sommerfeld des paliers de l'arbre rapide est indépendant du couple de dimensionnement, mais il est inversement proportionnel à la vitesse.
- Le nombre de Sommerfeld d'un palier de l'arbre lent est égal ou un peu inférieur à celui de l'arbre rapide.

## 26.7 SÛRETÉ

### 26.7.1 Généralités

La notion de sûreté d'une machine est difficile à cerner. Voici une définition intéressante: *la sûreté est l'état d'esprit tranquille en l'absence de risque, de péril et de dommage.*

C'est donc une qualité précieuse qui contient un aspect psychologique et matériel. Elle concerne non seulement l'utilisateur immédiatement en contact avec la machine, mais aussi la population voisine. Pour comprendre l'état agréable dans lequel se trouve un homme en sécurité, il suffit de penser, a contrario, à la crainte qu'inspire une machine peu sûre dont on ne sait jamais si elle va causer un accident. La définition ci-dessus évoque aussi le risque de dommage matériel aux conséquences financières souvent désastreuses.

La sûreté doit être une préoccupation constante, pas seulement dans les calculs de résistance, mais aussi de manière plus générale pour éviter tout accident. Hélas, bon nombre de constructeurs oublient complètement ce point de vue parce que:



- ils ont une confiance aveugle en ce qu'ils ont conçu (présomption ou inconscience);
- ils croient qu'un accident n'arrive qu'aux autres (vanité ou insouciance);
- ils pensent que la sûreté n'est pas assez scientifique pour s'y arrêter (orgueil et mépris).

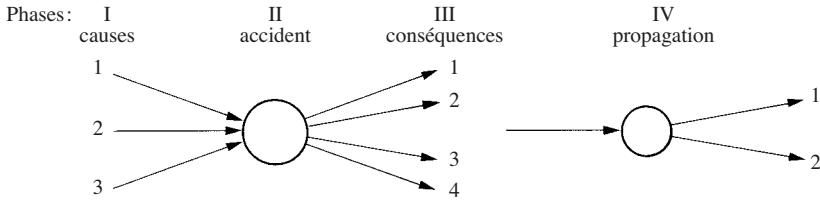


Fig. 26.58 Dynamique d'un accident.

D'une manière générale, on distingue quatre phases dans le déroulement d'un accident (fig. 26.58) :

- Phase I. Les causes d'accident sont à l'état latent; ce sont principalement :
  - des erreurs de conception;
  - des défauts de fabrication ou de montage;
  - des défauts évolutifs (usure, fretting, fissuration de fatigue, corrosion);
  - des erreurs humaines (inconscience, erreur d'exploitation, formation insuffisante).
- Phase II. L'accident se produit, toujours brutalement.
- Phase III. L'accident a des conséquences matérielles et humaines, souvent désastreuses avec de gros dégâts, des blessés et même des morts.
- Phase IV. L'accident provoque une cascade d'autres incidents et accidents, il se propage dans le système technique et à l'environnement en une sorte d'accidents en chaîne.

La sûreté est étroitement liée à la notion de *fiabilité*. C'est la capacité d'un organe, d'une machine ou d'un système d'assurer correctement sa fonction, dans les limites normales d'emploi, pendant un temps donné. Cette définition est très générale. On peut exprimer la fiabilité mathématiquement. Supposons qu'un organe doive exécuter  $N$  fois sa fonction mais qu'il soit  $N_f$  fois défaillant; sa fiabilité est

$$f = \frac{N - N_f}{N} = 1 - \frac{N_f}{N} \quad (26.92)$$

Une machine est d'autant plus sûre que la fiabilité de chacun de ses composants est plus élevée. La fiabilité globale diminue lorsque le nombre de composants augmente car, sauf simultanéité, toute défaillance d'un élément compromet la sûreté de l'ensemble et diminue sa disponibilité. Il faut par conséquent :

- viser la plus haute fiabilité (qualité) de chaque composant;
- limiter le nombre de composants au strict minimum indispensable (pas de gadgets).

Le **taux de défaillance** est le rapport du nombre de défaillances  $N_f$  qui surviennent au nombre de fois  $N$  qu'un organe doit remplir sa fonction. Alors

$$p_f = \frac{N_f}{N} \quad (26.93)$$

et l'expression (26.92) permet d'écrire

$$f = 1 - p_f \quad (26.94)$$

Ainsi, la fiabilité et le taux de défaillance sont complémentaires.

La fiabilité s'apparente à la disponibilité qui est le temps durant lequel un objet exécute correctement son service rapporté à une durée de service attendue ou rapporté à une année.

Le taux de défaillance est assez élevé au début de l'exploitation d'un objet technique à cause de ses «maladies d'enfance». Il s'améliore après la mise au point et le remplacement des éléments affectés de défauts de fabrication; mais il augmente rapidement en fin de vie de l'objet à cause de l'usure et du vieillissement des composants. La représentation du taux de défaillance en fonction du temps est la célèbre courbe dite en baignoire.

Un accident a toujours des conséquences financières et parfois humaines qui se chiffrent en un coût  $C$ . Le **risque** est par définition:

$$\text{risque} = p_f C \quad (26.95)$$

Ce produit représente le coût probable de sinistres, au sens large du terme, pendant la durée d'exploitation d'un objet. L'appréciation du risque sert de base au calcul des primes exigées par les assureurs. Il donne parfois lieu à de vives discussions, comme par exemple dans le domaine nucléaire; d'une part, les concepteurs affirment que rien ne peut arriver car ils ont tout prévu; d'autre part, les tiers, craignant le pire, exagèrent les conséquences d'un accident. Dans ce débat, le risque apparaît comme le résultat du produit de zéro par l'infini. Qui peut valablement trancher? On peut néanmoins penser ceci:

- L'honnêteté intellectuelle force de reconnaître qu'un accident ne peut jamais être exclu. Le passé prouve qu'en dépit des plus grandes précautions des objets déclarés absolument sûrs ont pourtant subi des accidents catastrophiques.
- Il existe un risque réel dès qu'il y a le moindre doute sur le fonctionnement d'un composant ou d'un ensemble.

Il faut néanmoins se rendre compte qu'une recherche de sûreté à tout prix est impossible pour des raisons purement économiques car elle débouche le plus souvent sur une complication des installations. Cette complexité va même parfois à fin contraire car elle abaisse la fiabilité de l'ensemble. On est conduit finalement par la force des choses à devoir accepter un **risque raisonnable** qu'on évalue par une démarche analogue à celle présentée au paragraphe 24.4.4 pour trouver la valeur optimale du facteur de sécurité. C'est un risque optimal économique.

La lutte pour la sûreté commence à la conception d'un objet et se poursuit durant toute sa vie par des mesures d'entretien du matériel et de formation du personnel d'exploitation.

Une étude systématique des accidents a permis de classer leur origine et leurs conséquences par **niveaux de sûreté** (fig. 26.59), qui sont hiérarchisés selon leur place dans l'enchaînement d'un accident. L'exemple suivant fera comprendre cette classification.

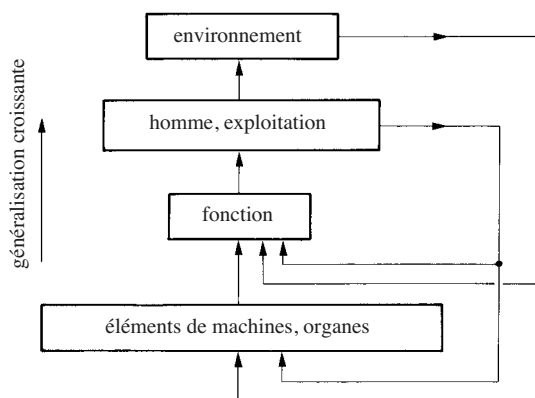


Fig. 26.59 Les niveaux de sûreté.

A bord d'un navire pétrolier, une canalisation d'huile de commande du gouvernail éclate (élément de machine). Le gouvernail est paralysé et ne peut plus diriger le bâtiment (défaillance d'une fonction) ; le système de secours ne fonctionne pas (défaut d'entretien) ; comme le navire n'a qu'une hélice (sûreté insuffisante), il ne peut pas se diriger au moyen des machines. Il se trouve que le pétrolier navigue à proximité de la terre, il est jeté à la côte par un vent violent. La vie de l'équipage est en péril ; peu après, le navire se brise sous l'assaut des vagues, puis le pétrole contenu dans les citernes se répand dans la mer et souille les plages (environnement). La rupture d'un tube, simple incident, s'est transformée par une réaction en chaîne en une catastrophe d'importance internationale.

Les atteintes à la sûreté provoquées par :

- l'inconscience,
- la négligence,
- l'ignorance,
- les économies financières,

ont obligé à réglementer la construction et l'exploitation des machines sur la base de l'expérience acquise. Le concepteur doit connaître ces règlements et les appliquer, comme par exemple en matière de construction de récipients sous pression, d'engins de levage ou de transport. Il se met ainsi à l'abri de poursuites judiciaires pour négligence en cas d'accidents graves.

Cependant, les lois freinent aussi le développement technique, car elles ne s'adaptent souvent que trop lentement à l'évolution de la technologie et du progrès dans le calcul des organes de machine.

La meilleure sûreté de conception et la plus grande qualité d'exécution sont illusoire si l'exploitation n'est pas à la hauteur de sa mission. Le personnel doit être sérieux, compétent et vigilant. Il faut lui donner la meilleure formation et le soumettre à un entraînement périodique rigoureux pour agir correctement en cas de situation délicate. Aucun laxisme n'est tolérable.

### 26.7.2 Anticipation des sources d'accidents

Le concepteur d'une machine ou d'une installation doit *rechercher en cours d'étude toutes les sources vraisemblables d'accident* afin de prendre très tôt les mesures propres à les éviter et à empêcher leur propagation. Cette démarche fait largement appel à l'imagination et à l'expérience.

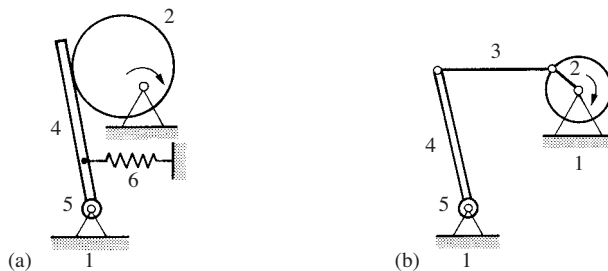
#### Imagination

Un accident survenant toujours à la suite d'une défaillance ou d'un malheureux concours de circonstances, il s'agit d'imaginer tout ce qui pourrait survenir. Cet effort d'imagination peut avoir un caractère «sauvage», au gré de ce qui vient à l'esprit, par exemple lors de discussions de groupes (*brain storming*). Mais il est souhaitable de procéder plus systématiquement en considérant un à un chaque organe sous trois aspects:

- L'organe peut-il faillir à sa fonction?
- Quelles sont les conséquences de sa défaillance?
- Que faire pour améliorer la sûreté de l'organe et de l'ensemble?

Une méthode de recherche consiste à décrire en détail le fonctionnement de la machine en cause puis de mettre le texte à la forme négative. On examine ensuite attentivement les causes et les conséquences d'un dysfonctionnement afin de trouver les parades. Appliquons cette méthode, par exemple, au mécanisme représenté à la figure 26.60(a) et destiné à verrouiller la guillotine d'une machine à découper des barres en tronçons d'égale longueur.

- Description: une came (2) imprime au suiveur (3) un mouvement oscillant qui est transmis par l'arbre (4) au verrou (non représenté) qui maintient la guillotine pendant l'avance des barres à couper en longueurs fixes. Le ressort de traction (5) rappelle toujours le suiveur.
- Forme négative: une came (2) n'imprime pas de mouvement oscillant au suiveur (3). Le mouvement du suiveur n'est pas transmis au verrou qui ne peut pas maintenir la guillotine pendant l'avance des barres à couper en longueurs fixes. Le ressort (5) ne rappelle pas toujours le suiveur.
- Conséquences: la guillotine n'étant pas maintenue en position de repos, elle peut empêcher l'avance des barres et bloquer la machine en provoquant éventuellement la rupture de certains organes.
- Origines du dysfonctionnement: une augmentation du frottement dans les paliers de l'arbre (4) (défaut d'entretien, fretting) empêche le mouvement de retour du suiveur; la liaison du bras à l'arbre (4) ou cet arbre sont rompus; le ressort (5) ou l'une de ses attaches sont cassés.
- Parades: supprimer le ressort (organe délicat); commander le bras (4) soit par une came à deux flancs opposés, soit par un mécanisme à bielle et manivelle (6 et 7) (fig. 26.60b). Du point de vue conceptuel, cela revient à remplacer un



**Fig. 26.60** Entraînement d'un arbre oscillant: (a) commande non positive; (b) commande positive.

mécanisme à commande non positive par un autre à commande positive. Soigner les paliers de l'arbre (4), les mettre à l'abri de polluants. Prévoir des pièces robustes, même si les efforts sont apparemment faibles.

L'imagination est sans limite. On sera très vite en présence d'innombrables scénarios d'accidents, particulièrement lorsqu'on imagine des combinaisons de défaillances. Il faut alors opérer un tri pour ne retenir que les accidents vraisemblables. Il n'apparaît en effet pas raisonnable de cumuler des situations hautement improbables et indépendantes.

L'analyse des conséquences de toute défaillance consiste à partir d'une situation donnée, à prévoir à chaque étape les éventualités possibles et les enchaînements qui en découlent logiquement. On construit ainsi progressivement l'*arbre de défaillance*. Mais là aussi on se trouve très vite confronté à un foisonnement inextricable. Une aide importante pour démêler cet écheveau consiste à attribuer à chaque événement une probabilité de réalisation puis de calculer la probabilité de chaque scénario. Cette approche probabilistique s'intègre dans la théorie de la fiabilité, mais son allure mathématique et scientifique ne doit pas faire illusion car :

- l'enchaînement des situations conduit à un nombre de branches quasi infini parmi lesquelles il faut bien faire un choix ;
- les probabilités de chaque étape sont généralement inconnues.

Les difficultés de l'analyse entachent toujours toute conclusion d'un certain arbitraire, mais la comparaison de la probabilité de diverses occurrences permet quand même souvent de prendre des décisions valables pour améliorer la sûreté d'un système.

Outre les défaillances matérielles, il faut aussi penser aux défaillances humaines : erreur de manipulation, oubli de consignes, distraction, abaissement de la vigilance par accoutumance au danger.

### Expérience acquise

L'analyse de la sûreté est considérablement facilitée par l'expérience et par le souvenir d'incidents passés. Hélas, l'acquisition d'expérience se paie, même parfois lourdement. On doit insister ici sur l'importance du «retour d'expérience». Il est indispensable qu'un constructeur connaisse tous les incidents de fonctionnement rencontrés, pour en tenir compte dans le développement et pour communiquer aux exploitants des règles de conduites convenables. Cet échange d'expériences est bien organisé notamment dans l'aviation civile et dans l'énergie nucléaire.

### 26.7.3 Sûreté intrinsèque

La sûreté intrinsèque vise à empêcher toute défaillance du matériel. Tout comme dans le domaine du dimensionnement, on distingue les principes de conception suivants :

- le principe «*safe life*» ou de fonctionnement sûr ;
- le principe «*fail safe*» ou de défaillance sûre ;
- le principe «*damage-tolerant design*».

#### Principe «*safe life*»

Selon ce principe, aucune défaillance n'est acceptée pendant la durée de service d'une pièce, on n'admet aucune rupture. Le principe «*safe life*» stipule donc une sécurité absolue. Par conséquent, le dimensionnement des pièces et des organes de machine doit être extrêmement généreux afin qu'aucune pièce ne se rompe jamais et que les caractéristiques de fonctionnement soient respectées en tout temps. Cela conduit à un matériel lourd, encombrant et coûteux. On remplace les pièces vitales, surtout lorsque leur inspection est difficile, avant qu'elles atteignent leur limite de longévité prévisible (entretien préventif).

Du point de vue de la conception des mécanismes, il faut prévoir des commandes positives comme on l'a vu à propos de la figure 26.60.

L'usure perturbe le fonctionnement des organes de machines avec transmission de mouvement par frottement (courroie plate ou trapézoïdale, roue de friction, embrayage). En revanche, les courroies dentées, chaînes, engrenages et embrayages à crabots sont des transmissions positives qui ne peuvent être en défaut qu'en cas de rupture ou de coincement par un corps étranger.

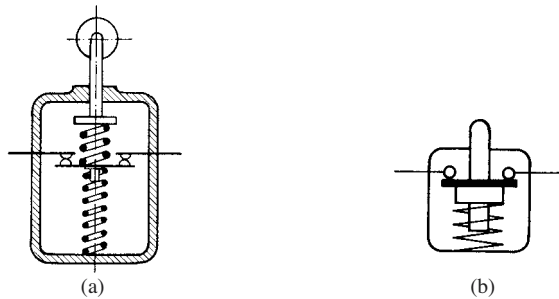


Fig. 26.61 Interrupteur de fin de course: (a) commande non positive; (b) commande positive.

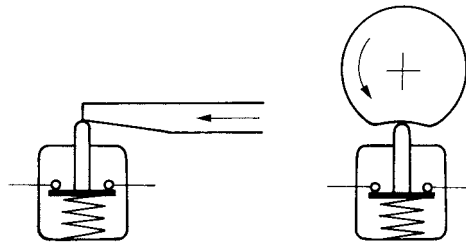
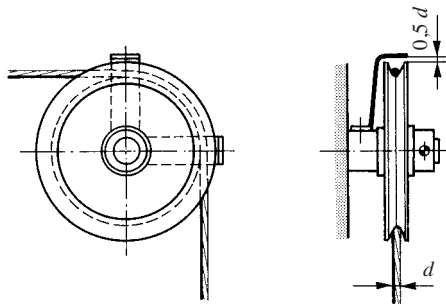


Fig. 26.62 Interrupteurs actionnés positivement.

On rencontre de nombreux interrupteurs avec une commande non positive des contacts. Le contact représenté à la figure 26.61(a) est actionné par un ressort porté par la tige-poussoir. En cas de soudure des contacts, le ressort est simplement comprimé par le poussoir sans que le circuit soit obligatoirement rompu. Dans les interrupteurs à commande positive, en revanche, le poussoir est capable de briser la lame de contact soudée (fig. 26.61b). Il faut naturellement aussi commander l'interrupteur positivement (fig. 26.62).

Une poulie à câble (fig. 26.63) pourvue d'étriers de protection empêchant le câble de sortir de la gorge lorsqu'il prend du mou est un autre exemple de construction «safe life».



**Fig. 26.63** Poulie avec étrier empêchant la sortie du câble.

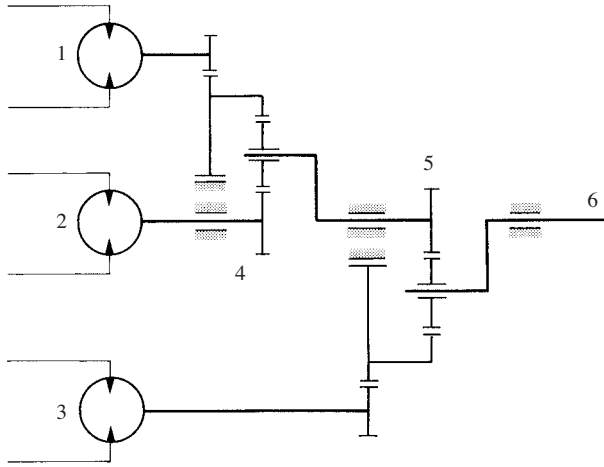
Tous les organes de machines sont naturellement dimensionnés avec des marges de sécurité. Mais on ménage parfois les installations en ne les faisant pas constamment fonctionner au maximum de leurs possibilités. C'est particulièrement vrai pour les moteurs d'avions et les moteurs marins militaires, très poussés, dont la puissance exploitée en régime de croisière est toujours inférieure à la puissance maximale nominale.

### Principe «fail safe»

Le surdimensionnement des pièces selon la méthode «safe life» est souvent inacceptable. On est de toute manière obligé d'accepter des défaillances, par conséquent autant dimensionner plus petit mais en prenant un certain nombre de précautions :

- Une défaillance ne devrait intervenir que progressivement de manière à ce que l'organe remplisse encore son rôle, même avec une capacité réduite, sans que survienne une situation dangereuse. Il faut donc prendre des mesures de construction pour bloquer la propagation de fissures.
- Il faut prévoir des moyens propres à prévenir l'utilisateur de l'affaiblissement ou de la défaillance d'un organe.
- La fonction de l'organe de machine défaillant doit être assurée ou reprise par un autre organe (redondance) assez longtemps pour qu'on puisse arrêter la machine ou la mettre dans un état non dangereux. La redondance augmente certes la sécurité d'exploitation et la disponibilité, mais la fiabilité s'améliore relativement peu ; elle est parfois même plus petite parce qu'une plus grande complexité de la machine augmente aussi la probabilité de pannes.
- Une défaillance ne doit pas en entraîner une autre et amorcer une cascade catastrophique.

Voici quelques exemples.



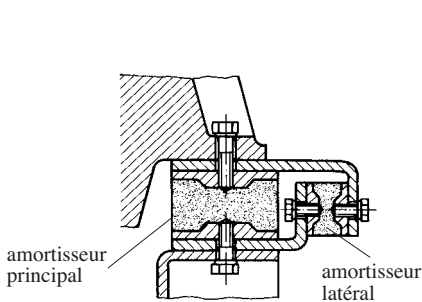
**Fig. 26.64** Schéma d'une commande à trois moteurs.

La commande des gouvernes de la navette spatiale américaine est assurée par des systèmes redondants. Trois moteurs hydrauliques (1), (2), (3) (fig. 26.64) entraînent l'arbre de commande (6) d'une gouverne par l'intermédiaire des trains épicycloïdaux (4) et (5). Un seul moteur suffit encore pour entraîner la gouverne à vitesse réduite. Chaque moteur est équipé d'un frein qui le bloque en cas de manque de pression d'huile, afin d'empêcher l'affolement du mécanisme. La commande électrohydraulique des moteurs est quadridondante.

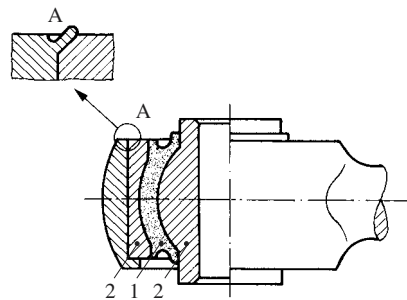
Nous empruntons encore quelques exemples à Pahl et Beitz [26.7].

L'amortisseur latéral de vibrations situé sous une machine (fig. 26.65) peut se fissurer progressivement et même se déchirer de part en part; sa fonction sera reprise par l'amortisseur principal, mais la fréquence propre de vibration de la machine sera modifiée. On pourrait prévoir un unique amortisseur oblique.

Dans l'articulation sphérique en caoutchouc (fig. 26.66), les pièces ne se séparent pas si le caoutchouc (1) est déchiré.

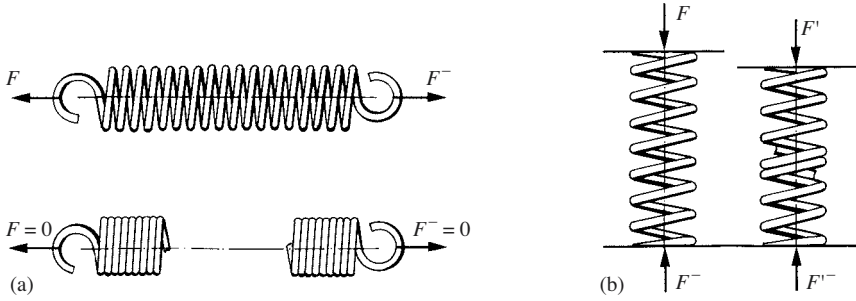


**Fig. 26.65** Amortisseurs de vibrations.



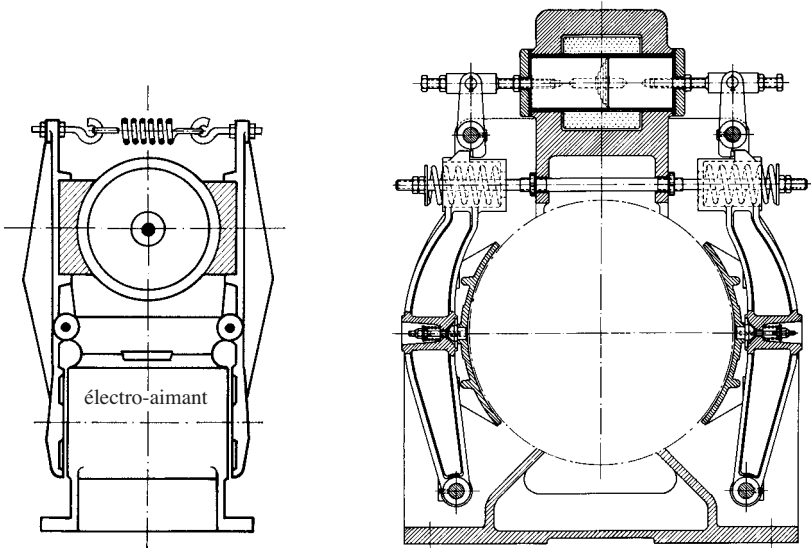
**Fig. 26.66** Articulation sphérique en caoutchouc.



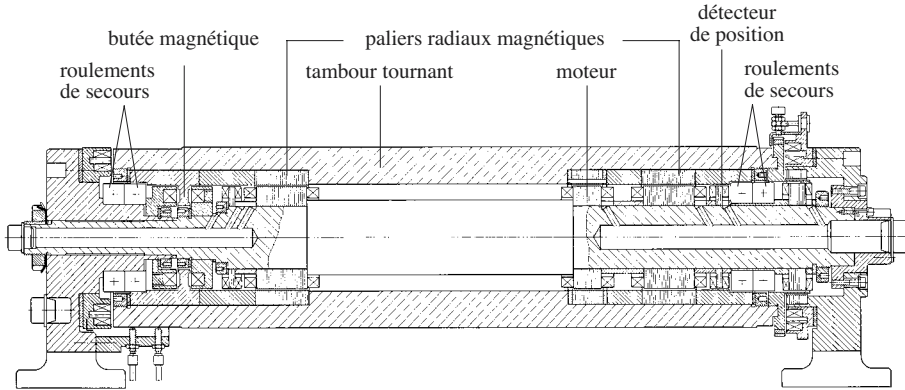


**Fig. 26.67** Rupture de ressorts à boudin: (a) ressort de traction,  $F = 0$ ; (b) ressort de compression,  $F$  diminuée.

Les ressorts se rompent par fatigue ou par corrosion. Tandis qu'un ressort utilisé en traction ne remplit plus sa fonction (fig. 26.67a), un ressort de compression peut encore exercer une force réduite, car les spires voisines de la rupture s'appuient l'une contre l'autre (fig. 26.67b). C'est pourquoi l'usage de ressorts de traction est interdit dans les organes de sécurité; on exige en revanche de prévoir deux ressorts de compression travaillant en parallèle (redondance passive). Ce principe s'applique notamment aux freins: celui de la figure 26.68 est mis hors service lors de la rupture du ressort tandis que le frein d'ascenseur représenté à la figure 26.69 assure encore un freinage suffisant si un ressort vient à casser. Notons qu'il faut guider les ressorts de compression, soit par une tige intérieure, soit par un manchon extérieur, afin qu'ils ne puissent s'échapper latéralement en cas de rupture.



**Fig. 26.68** Frein à sabots avec un ressort de traction. **Fig. 26.69** Frein à sabots avec deux ressorts de compression.



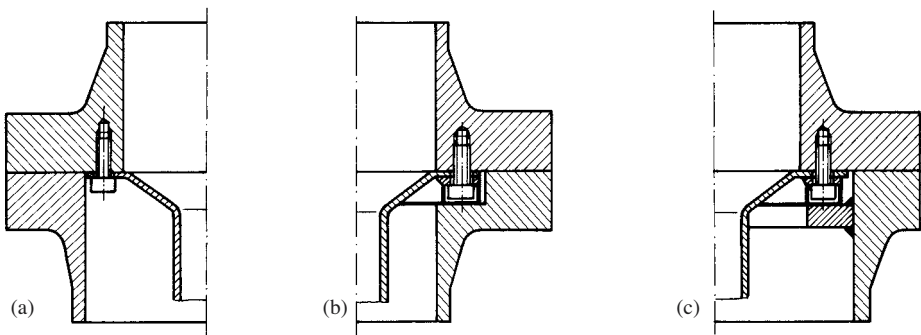
**Fig. 26.70** Tambour à paliers magnétiques actifs.

La figure 26.70 représente un tambour à guidage électromagnétique pourvu de roulements à billes dont la bague intérieure ne touche normalement pas l'arbre. En cas de défaillance électrique, l'arbre s'appuie sur les roulements et peut tourner sans dommage jusqu'à l'arrêt. Les roulements jouent le rôle de paliers de secours.

Lorsqu'on a besoin d'une étanchéité absolue (génie chimique, génie nucléaire), on utilise des soufflets pour assurer l'étanchéité des tiges de commande des robinets (fig. 22.59). Une garniture ordinaire offre une seconde barrière de sécurité, car il arrive que des soufflets se fendent. L'espace situé entre les deux étanchéités peut se mettre en communication avec un détecteur de fuite afin de signaler la défectuosité du soufflet et l'état de fonctionnement dangereux.

L'emploi de matériaux à comportement fragile est dangereux; il ne faut jamais les utiliser pour des pièces vitales ou celles dont la rupture peut présenter un caractère catastrophique.

Un mécanisme est «fail safe» lorsque son comportement est stable en cas de perturbation. Cet aspect a été étudié en relation avec les instabilités thermiques à la section 21.4.



**Fig. 26.71** Fixation d'une tuyère dans une tuyauterie : (a) des vis peuvent tomber dans la tuyauterie; (b) et (c) les vis sont retenues.

La figure 26.71(a) montre une tuyère fixée par une série de vis à l'intérieur d'un tuyau. La tête d'une vis qui se casse tombe dans la tuyauterie et, entraînée par le fluide, elle peut provoquer des dégâts ailleurs ou bloquer un robinet. On évite que l'incident dégénère et se propage grâce à une construction selon les figures 26.71(b) ou (c).

On pourrait imaginer construire une machine entièrement selon le principe «fail safe», mais elle contient en réalité toujours des composants «safe life», par exemple, les fusées de roues et le mécanisme de direction d'une automobile.

### Conception «damage-tolerant design»

Les progrès accomplis dans le domaine de la mécanique de la rupture permettent d'évaluer avec une précision acceptable la durée de propagation des fissures de fatigue. Au lieu de rejeter une pièce dès l'apparition d'une fissure, on tolère maintenant, si la construction le permet, de poursuivre l'exploitation jusqu'à ce que la fissure atteigne une longueur maximale admissible. Si la propagation est lente, le remplacement des pièces fissurées s'effectue seulement lors de la prochaine révision périodique. Cette conception a cours en aviation. Le fait de ne pas remplacer un roulement dès les premiers signes de détérioration (bruit) procède de la même méthode, mais exige l'installation d'accéléromètres pour déceler à temps le bruit provoqué par l'usure.

### 26.7.4 Organes de sécurité et de protection

Si un système n'est pas intrinsèquement sûr, il convient de prévoir un ou plusieurs *dispositifs de sécurité* qui ont pour but :

- d'empêcher la mise en service s'il existe un état dangereux ;
- d'empêcher les fausses manœuvres ou un fonctionnement dangereux ;
- de ramener le système dans un état de fonctionnement sûr en cas de danger (souvent l'arrêt de la machine).

Les organes de sécurité ne sont pas à proprement parler indispensables au fonctionnement d'une machine ; on les ajoute pour éviter les accidents ou limiter leurs conséquences. On considère que les organes de réglage automatique contribuent aussi à la sûreté, car ils maintiennent en permanence des paramètres importants dans les limites de fonctionnement normal.

Les dispositifs de sécurité doivent répondre à certains principes de base :

- un seul dispositif de sécurité suffit en principe lorsqu'un accident ne peut survenir qu'à la suite de la défaillance de deux organes du système ;
- il faut deux dispositifs de sécurité indépendants lorsqu'un accident peut se produire à la suite de la défaillance d'un seul organe du système ;
- une redondance active doit suppléer immédiatement à l'organe défaillant si le défaut crée une situation dangereuse ;
- les systèmes de sécurité doivent être eux-mêmes particulièrement sûrs et fiables, si possible «fail safe» ; ils doivent être indépendants les uns des autres ;
- une machine arrêtée par un dispositif de sécurité ne doit pas se remettre spontanément en marche après que le danger soit écarté ; elle ne doit pouvoir être remise en service que par une intervention manuelle, éventuellement après déblocage du dispositif de sécurité ;
- des systèmes de sécurité redondants devraient fonctionner selon des principes différents ;

- toute intervention d'un organe de sécurité doit être signalée (hormis l'action normale de la régulation);
- une machine doit être mise en état de fonctionnement sûr, ou arrêtée, si un défaut du système de sécurité crée une situation dangereuse; c'est l'autoprotection par les dispositifs de sécurité;
- la défaillance d'un organe de sécurité doit être signalée; elle ne doit pas provoquer d'accident si elle passe inaperçue;
- toute défaillance d'un organe de la machine doit déclencher une alerte;
- la mise hors service volontaire d'un dispositif de sécurité doit être rendue impossible; dans le cas contraire, elle doit être signalée ou doit commander automatiquement l'arrêt de l'exploitation;
- le fonctionnement des dispositifs de sécurité doit s'éprouver dans les conditions de fonctionnement réelles.

Les dispositifs limiteurs d'efforts sont des organes de sécurité qui évitent la rupture de pièces en cas de surcharge (§ 26.5.7). On protège les récipients sous pression au moyen de soupapes de sûreté; en règle générale, on prévoit deux soupapes.

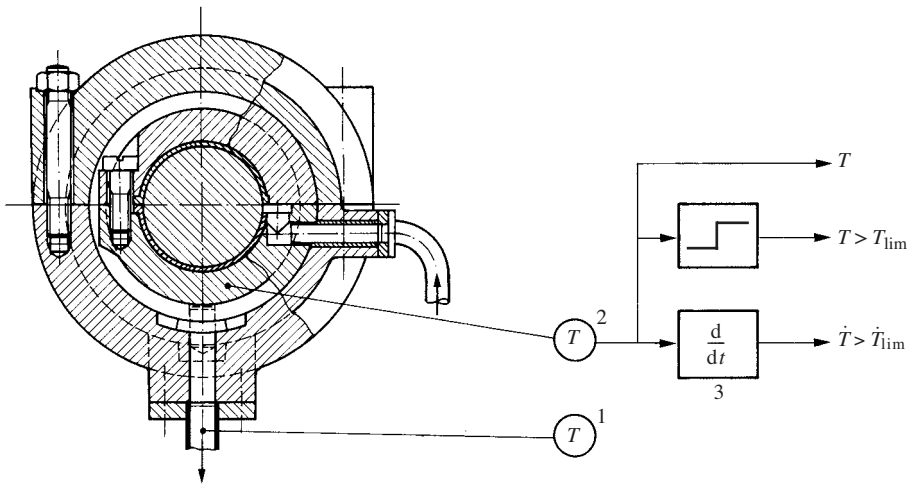


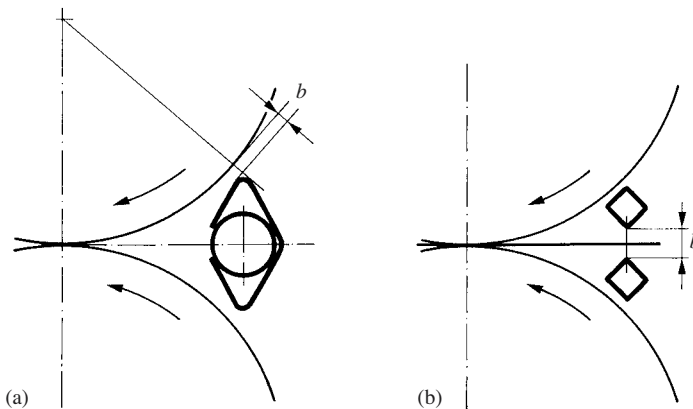
Fig. 26.72 Surveillance thermique d'un palier hydrodynamique.

On sait que la surcharge d'un palier hydrodynamique ou un débit d'huile insuffisant se manifeste par un échauffement anormal (§ 21.4.1); on surveille habituellement la température au moyen d'un thermomètre (1) installé à la sortie de l'huile (fig. 26.72). L'échauffement est rapide si le palier entre dans le domaine de frottement mixte; mais le thermomètre est trop lent pour prévenir à temps de l'imminence du grippage. On s'affranchit de l'inertie thermique de toute la masse du palier en plaçant un thermocouple (2) immédiatement sous la surface du coussinet; en outre, ce thermomètre répond même en cas de manque d'huile. L'important étant de prévenir toute surchauffe, il ne faut pas attendre que la température du palier atteigne un seuil dangereux pour intervenir. Un dérivateur (3) déclenche une alerte ou provoque un arrêt d'urgence

automatique dès que la température commence à croître trop vite. Ce système pêche par l'impossibilité de pouvoir l'essayer dans des conditions réelles.

Les **organes de protection** sont destinés à mettre l'homme ou l'environnement hors d'atteinte dangereuse d'une machine. Voici quelques exemples courants de protection :

- capots autour d'engrenages, de chaînes et autres organes mobiles ;
- grilles de protection de courroies ;
- armoires métalliques contenant du matériel électrique ;
- cache-vis sur des pièces en mouvement, notamment sur les accouplements d'arbres ;
- barrages immatériels par faisceaux lumineux ou infrarouges et cellules photoélectriques arrêtant la machine en cas de franchissement ;
- barres de protection devant l'entrée de cylindres risquant de happer un bras ou un vêtement (fig. 26.73) ;
- signaux acoustiques et lumineux intenses prévenant le personnel du démarrage imminent d'une machine.



**Fig. 26.73** Barre de protection à l'entrée de deux cylindres : (a) pas de passage de feuille; (b) passage d'une feuille entre deux barres. La distance  $b$  ne permet pas de passer un doigt.

## 26.8 ASPECTS ÉCONOMIQUES

La construction mécanique est aussi dominée par le souci constant de l'économie. Un produit ne se vend que s'il est avantageux comparativement aux réalisations concurrentes ; il doit donc être :

- bon marché à l'achat ;
- bon marché à l'exploitation ;
- bon marché à l'entretien.

L'estimation de la valeur d'un produit tient toujours compte de ces trois aspects. L'aspect économique passe aujourd'hui souvent avant la performance technique, les acheteurs privilégient le rapport prix/qualité ; le mot qualité s'entend ici dans un sens très général. Signalons en passant qu'une fourniture extrêmement rapide est un gage

de succès commercial. L'obsolescence accélérée du matériel incite les milieux financiers à limiter strictement les investissements et à accorder moins d'importance à la recherche d'une grande longévité des produits. Des études montrent qu'en diminuant légèrement les performances, on peut abaisser sensiblement les coûts.

Le constructeur est assailli par des préoccupations économiques à tous les stades du développement d'un produit : cahier des charges, conception, construction, exécution. Disons d'emblée qu'il n'est guère possible de donner dans ce domaine des conclusions définitives. En effet, les coûts de construction sont largement conditionnés par le prix du matériel existant sur le marché et par l'équipement et l'organisation de production du constructeur. Une vérité d'aujourd'hui est peut-être caduque demain à cause d'un bouleversement technologique. L'étude des aspects économiques de la construction des machines sort du cadre de cet ouvrage ; nous renvoyons le lecteur aux nombreux ouvrages spécialisés, par exemple [28.13].

On estime que 70% du prix de revient d'une machine est déterminé par le bureau technique. L'influence du constructeur sur le prix est très forte dans la phase de conception (fig. 26.74), beaucoup plus faible lors de l'étude détaillée d'un projet. Par ailleurs, le coût d'éventuelles modifications est d'autant plus lourd que l'étude est plus avancée. C'est pourquoi il est vital de se préoccuper des aspects économiques dès le début d'un projet, lorsque les modifications sont encore faciles à apporter. Il convient d'étudier soigneusement plusieurs variantes de solutions ; l'ordinateur facilite beaucoup le travail et permet de gagner du temps. Pour autant qu'une variante satisfasse convenablement les conditions techniques du cahier des charges, on choisira toujours la solution globalement la meilleure marché.

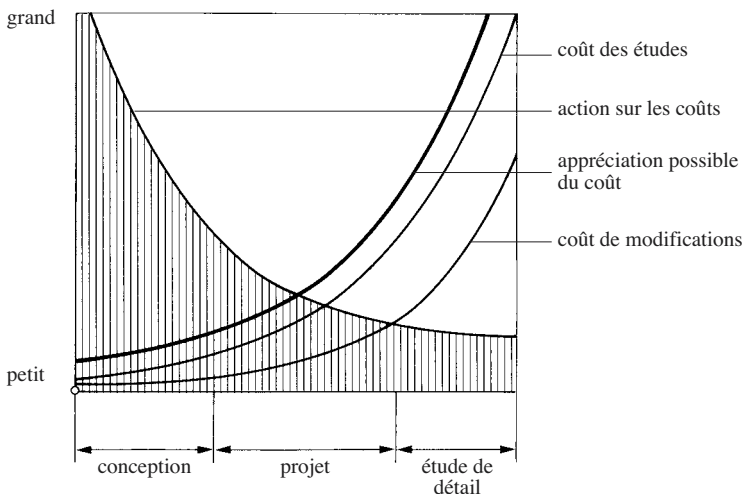


Fig. 26.74 Influence sur les coûts au cours du développement d'un projet.

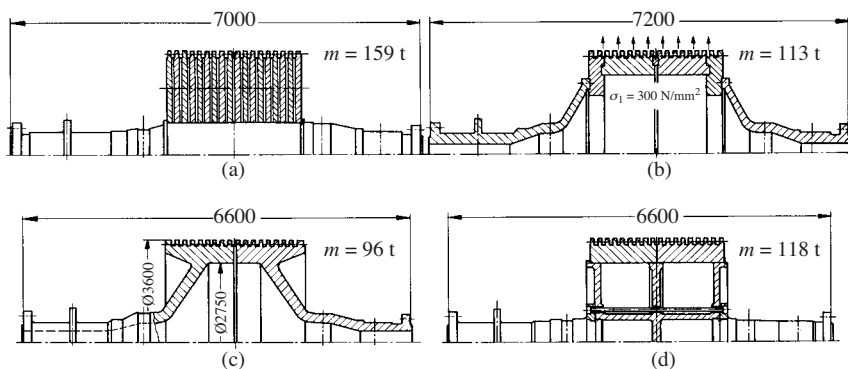
Le calcul du coût final d'une réalisation nouvelle est d'autant plus facile et précis que l'étude est plus détaillée. Au stade de l'avant-projet, les coûts ne peuvent s'estimer que par comparaison avec ceux d'une réalisation similaire et sur la base de quelques évaluations lacunaires. L'expérience, chaque fois renouvelée, prouve que les prototypes et la

commercialisation de nouveaux produits coûtent toujours beaucoup plus cher que prévu. Tout se passe comme s'il existait une loi de dépassement de crédit. Le dépassement est d'autant plus important que l'objet est plus extraordinaire et que le facteur d'extrapolation de performance est plus grand. Whyte cite des coûts finaux variant entre 2,5 et 26 fois le budget accordé lors de la prise de décision de construire [28.11]. Désireux de voir se réaliser un projet, et par crainte du refus de la part des financiers, les ingénieurs sont portés à un optimisme exagéré. La dure réalité est pourtant incontournable, il existe toujours des difficultés inattendues et des revers qui prolongent les délais de mise au point et renchérissent les constructions. Nous préconisons de multiplier l'estimation du coût obtenue à la fin de l'avant-projet d'un prototype entièrement nouveau par 2,5 à 4 pour prédire le coût final. On observe que les grands projets atteignent maintenant des coûts qui obligent leurs promoteurs à des collaborations internationales. C'est le cas pour la mise au point de grands accélérateurs de particules, le développement d'un avion civil supersonique ou la réalisation de stations spatiales. Le développement technologique et le gigantisme buteront souvent contre un mur financier qui limitera les ambitions.

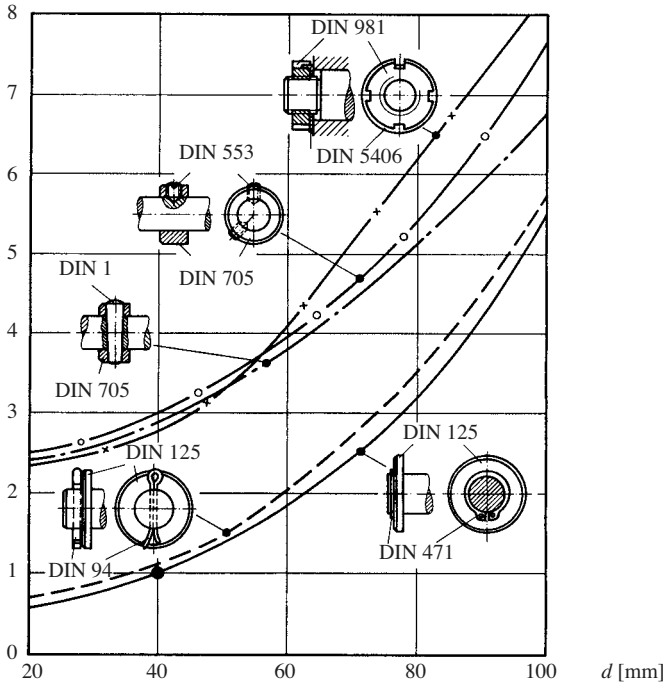
D'une manière générale, les moyens propres à abaisser le prix de revient d'une machine sont les suivants :

- diminuer le nombre de pièces par une construction simple et intégrée;
- diminuer le nombre de pièces différentes, normalisation interne à l'usine;
- acheter le plus possible de pièces à l'extérieur pour profiter du bas prix des grandes séries;
- diminuer le volume des pièces;
- diminuer le volume de matière à enlever par usinage;
- diminuer l'aire des surfaces usinées;
- simplifier le montage et l'ajustage des pièces;
- ne pas exiger de tolérances inutilement étroites.

Cette énumération non exhaustive montre qu'il est toujours avantageux de diminuer la taille des pièces et le volume de matière nécessaire, même s'il faut pour cela utiliser parfois des matériaux à haute résistance plus coûteux. La figure 26.75 illustre clairement qu'une construction intégrée est plus avantageuse car elle diminue la masse de l'objet.



**Fig. 26.75** Construction du rotor d'un alternateur entraîné par une turbine hydraulique (Siemens) : (a) armatures rapportées sur l'arbre; (b) bouts-d'arbre en acier coulé boulonnés au tambour polaire; (c) deux bouts-d'arbre intégrés avec le rotor et boulonnés; (d) tambour polaire monté sur un arbre.



**Fig. 26.76** Coût relatif de divers moyens d'arrêt axial en fonction du diamètre de l'arbre; emprunté à [26.13].

Le souci du coût est aussi constant au niveau des détails constructifs. La figure 26.76 montre, par exemple, le coût relatif de quelques solutions d'arrêt axial d'un arbre. Ces comparaisons de prix dépendent considérablement de l'organisation et de l'équipement des ateliers, elles n'ont pas un caractère de généralité absolue.

L'exploitant d'une machine est préoccupé par sa rentabilité. Il existe, par exemple, une vitesse optimale des avions et des navires pour laquelle les frais de combustible sont acceptables par rapport à l'avantage commercial. On accroît la vitesse si la consommation et le coût de l'énergie diminuent. L'accroissement de la capacité unitaire de transport est avantageux. Des machines simples jouissent très souvent d'une disponibilité supérieure à celle de machines très performantes et sont finalement plus rentables.

## 26.9 CONCLUSIONS PRINCIPALES

Il est difficile de formuler des règles générales de conception à cause du grand nombre de paramètres en jeu. C'est pourquoi on s'est limité à des aspects généraux.

Une fois les fonctions requises identifiées, on choisit les organes capables de les assurer. Pour des raisons de simplicité, on souhaite évidemment qu'un organe remplit plusieurs fonctions. Mais lorsqu'une fonction pose des exigences extrêmes, il est préférable de lui dédier un organe spécial; il en va de même lorsque des fonctions sont contradictoires. On observe que la fiabilité et la sûreté d'une machine sont meil-



leures si chaque pièce remplit seulement une fonction et si la construction est isostatique. Dans certains cas, on est obligé d'attribuer plusieurs organes à la même fonction pour multiplier leur action. D'une manière générale, une construction simple est toujours meilleure.

On simplifie les machines du point de vue mécanique en commandant chacun de leurs mouvements par un moteur indépendant et en les coordonnant par des dispositifs électroniques et informatiques qui offrent l'avantage d'une grande souplesse d'utilisation.

Dans les machines de production existe souvent un long arbre pour entraîner plusieurs récepteurs. Cet arbre devrait être rapide et suivi de réducteurs car, à contrainte de torsion égale, il apparaît plus rigide et offre une fréquence propre en torsion plus élevée qu'un arbre lent. Il est donc préférable d'installer les réducteurs de vitesse entre l'arbre principal et les récepteurs plutôt qu'entre le moteur et l'arbre.

Un embrayage et un frein sont moins encombrants s'ils sont montés sur un arbre rapide, mais ils chauffent plus que s'ils se trouvent sur un arbre lent. En cas de commande intermittente, il faut situer les embrayages près de l'organe de travail afin de diminuer l'inertie du mécanisme commandés et l'échauffement de l'embrayage.

Un volant de stockage d'énergie ou de régulation de marche est plus petit s'il est rapide, mais sa vitesse périphérique est limitée par la résistance à l'éclatement. On stocke plus d'énergie dans une grosse masse à petite vitesse. On place avantageusement un volant du côté de la source de perturbation afin de profiter de son inertie pour protéger les organes de transmission (effet barrage).

Il convient de protéger les moteurs et les organes de transmission de surcharges. On utilise des instruments de mesure avec détecteurs de seuil ou des limiteurs d'effort qui interrompent automatiquement la transmission en cas de surcharge. Des organes de transmission non positifs, notamment les coupleurs, limitent aussi le couple transmis. En cas de danger de blocage brutal, il faut prévoir des dispositifs élastiques capables d'absorber l'énergie cinétique.

Le succès commercial d'un beau produit est meilleur. Il faut se préoccuper de l'esthétique déjà au stade de la conception, si possible avec le concours d'un designer.

L'étude des similitudes mécaniques est féconde pour apprécier rapidement l'influence de certains paramètres sur les caractéristiques des organes et pour prendre des décisions de conception sans devoir faire des calculs détaillés.

Il faut vouer une très grande attention à la sûreté : utiliser de préférence des organes «fail safe», des ressorts de compression plutôt qu'en traction, des éléments à commande positive ; imaginer toutes les situations dangereuses et prévoir les organes de sécurité et de protection nécessaires ; observer les règlements en vigueur.

Le souci de l'économie domine toute étude et réalisation. 70% du coût d'une machine est déterminé par le bureau d'étude, c'est pourquoi il faut investir très tôt le temps nécessaire pour chercher des solutions économiques. Il ne faut donc jamais lésiner sur les études de variantes, d'autant plus que l'ordinateur facilite beaucoup le travail. On rationalise les constructions par une conception modulaire et en intégrant les organes.

## CONCLUSIONS GÉNÉRALES

### 27.1 PERFORMANCES LIMITES

Les principales performances des machines sont étroitement liées à leur vitesse et à l'effort exercé. On a montré dans cet ouvrage comment chaque phénomène limitatif se traduit par une courbe limite dans le plan effort-vitesse envisagé au début (sect. 1.4). On représente généralement la vitesse et l'effort utile de la machine. La figure 27.1 contient les principales limites de performance rencontrées; voici la signification des courbes:

- 1 Vitesse maximale à la limite de rupture d'une pièce par une force d'inertie.
- 2 Domaine de vitesse impraticable à cause d'une quelconque vitesse critique ou d'une résonance dynamique.
- 3 Vitesse maximale permise par la précision des mouvements ou l'affolement d'un suiveur.
- 4 Effort maximal limité par la rupture en surcharge statique de la pièce la plus dangereuse (celle qui casse en premier).
- 5 Effort limité par la rupture de fatigue de la pièce la plus dangereuse; il dépend de la longévité attendue.
- 6 Limitations de l'effort par l'épaisseur minimale de films lubrifiants hydrostatiques; la limite baisse à grande vitesse du fait de la diminution de la viscosité de l'huile consécutive à l'échauffement.
- 7 Portance maximale de films lubrifiants hydrodynamiques (paliers lisses, engrenages); le maximum est lié à l'échauffement de l'huile.
- 8 Limite imposée par le produit  $\bar{p}v$  admissible du point de vue de l'usure de surfaces à frottement mixte ou sec; cette limite dépend de la longévité souhaitée du couple tribologique. L'hyperbole est limitée par l'effort maximal (8') et par la vitesse maximale (8'') acceptables par les matériaux.
- 9 Effort limité par les efforts d'inertie chargeant les pièces; il dépend de la longévité si un effort d'inertie fatigue une pièce.
- 10 Limite d'échauffement de moteurs et d'organes de transmission.

Ces courbes ne sont pas exhaustives, leur position dans le plan est propre à chaque cas. On pourrait encore tracer une enveloppe représentant les limites financières à l'accroissement continu des performances.

Le point figuratif de fonctionnement de la machine ne peut se trouver que dans un domaine praticable sous peine d'avarie ou d'usure prématurée. Dans le cas de la figure 27.1, seul le domaine A est utilisable; le domaine B serait praticable pour une turbo-

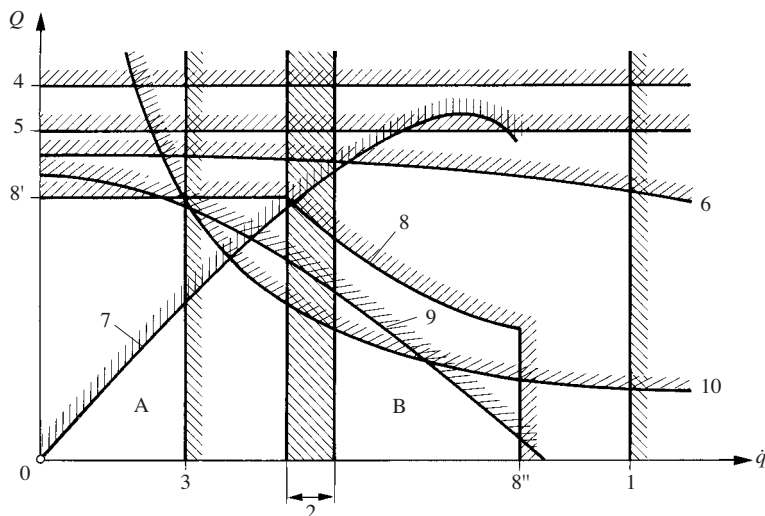


Fig. 27.1 Principales limites de fonctionnement dans le plan effort-vitesse.

machine en régime surcritique pour laquelle ne se pose aucun problème de précision de mouvement.

L'accroissement des besoins, la recherche d'une rentabilité toujours plus grande et parfois le prestige poussent à construire des machines toujours plus rapides, capables d'exercer des efforts toujours plus grands et toujours plus puissantes. Cette évolution inéluctable revient à vouloir placer le point figuratif toujours plus loin de l'origine du diagramme effort-vitesse.

Chaque organe présente ses propres limites et *les performances d'une machine résultent finalement de la superposition des limites de chacun*. Il est important de connaître l'organe de machine ou la pièce qui fixe la première limite rencontrée en voulant augmenter l'effort ou la vitesse, afin de le retravailler et d'améliorer ainsi toute la machine. Une machine est bien construite lorsque toutes ses pièces présentent des limites à peu près identiques. Lorsqu'on arrive au bout de ce développement, on ne peut continuer qu'en faisant un saut de technologie. Il en fut ainsi en passant de la machine à vapeur à la turbine, ou en passant de la presse à imprimer feuille par feuille à la rotative. Nous avons montré dans cet ouvrage les moyens permettant de repousser les limites de fonctionnement.

L'aire du rectangle, définie par les axes de coordonnées et un point figuratif, représente la puissance utile de la machine (sect. 1.7). Voici comment procéder pour trouver la puissance maximale lorsque le point figuratif se trouve sur une courbe limite :

- Si le point se trouve sur une hyperbole, par exemple l'hyperbole limite d'échauffement, la puissance maximale est égale au produit  $Q\dot{q}$  de l'hyperbole, quelle que soit sa position.
- Lorsque une caractéristique  $Q(\dot{q})$  est une droite inclinée (fig. 27.2), la puissance est représentée par une parabole dont le sommet, la puissance maximale, est situé à la moitié de la vitesse de marche à vide,  $\dot{q}_{\text{opt}} = 1/2 \dot{q}_v$ . Alors

$$P_{\max} = Q_{\text{opt}} \dot{q}_{\text{opt}} = \frac{1}{4} Q_0 \dot{q}_v \quad (27.1)$$

- Pour trouver le point d'une caractéristique quelconque pour lequel la puissance est maximale (fig. 27.3), on procède graphiquement en cherchant par tâtonnement la droite tangente à la courbe en un point B, de telle façon que les segments AB et BC interceptés par les axes de coordonnées soient égaux.

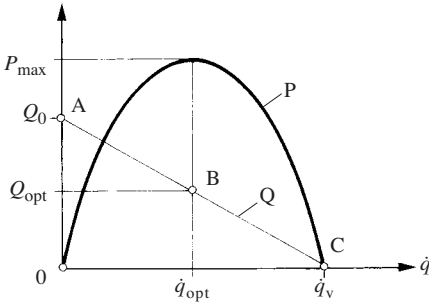


Fig. 27.2 Caractéristique linéaire.

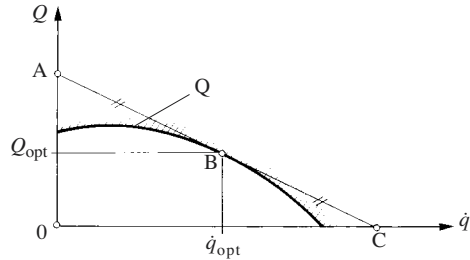


Fig. 27.3 Puissance maximale.

## 27.2 DIRECTIVES GÉNÉRALES DE CONCEPTION

### 27.2.1 Méthodologie

L'étude et la réalisation de tout objet technique se déroulent en principe en plusieurs étapes dans l'ordre suivant:

- **Cahier des charges.** Il est préparé par l'utilisateur et souvent conjointement avec le fabricant. Le cahier des charges fixe toutes les caractéristiques principales de l'objet et les conditions d'exploitation à satisfaire.
- **Avant-projet.** A ce stade, l'objet se conçoit dans les grandes lignes; on arrête les principes de fonctionnement, et un dessin d'ensemble donne une idée de la réalisation. Une évaluation des coûts fixe le cadre financier. On élabore en règle générale plusieurs avant-projets avec des variantes.
- **Evaluation.** La comparaison des avant-projets sur des bases technico-économiques conduit à choisir celui qui satisfait au mieux le cahier des charges.
- **Projet.** L'avant-projet retenu est examiné plus en détail. Il est décomposé en sous-systèmes qui font tous l'objet d'une étude de variantes pour permettre de choisir les meilleures solutions technologiques. Cette phase s'achève par une description détaillée et des dessins d'ensemble de l'objet. L'évaluation du coût est plus précise.
- **Etude de détail.** Après une nouvelle évaluation du projet, on passe à l'étude et au choix de tous les composants. Chaque élément est dimensionné soigneusement. L'étude vise à préparer tous les documents nécessaires pour la réalisation.
- **Réalisation.** L'objet entre dans sa phase de fabrication et d'assemblage.
- **Essais.** L'objet est mis en service et soumis à des tests pour vérifier que les performances réelles satisfont le cahier des charges.

- **Exploitation.** Les qualités et les faiblesses se révèlent seulement après un certain temps d'exploitation. Elles guideront ensuite de nouveaux développements.

Le détail de la méthodologie est exposé dans l'excellent ouvrage de Pahl et Beitz [27.1 et 27.2].

Au niveau de l'avant-projet et du projet, il importe de prendre en considération simultanément plusieurs aspects :

- le fonctionnement,
- le respect des caractéristiques exigées,
- la sûreté,
- l'acoustique et le bruit,
- le design,
- la réglementation en vigueur,
- la charge écologique,
- le coût,
- l'exploitation,
- la fin de vie et le recyclage de l'objet.

Il ne faut négliger aucun de ces aspects sous peine de rencontrer difficultés et mécomptes alors qu'il sera trop tard pour effectuer les corrections nécessaires. On se rappellera qu'une étude soignée est toujours moins coûteuse que transformations et réparations ultérieures.

Le concepteur doit s'attacher tout d'abord à dégager les grands principes de fonctionnement de l'objet, peu importe le détail de la réalisation dès lors qu'il sait que des solutions existent. Il est inutile de procéder trop tôt à des dimensionnements détaillés. Des calculs simples sont généralement suffisants au stade de l'avant-projet.

Du point de vue strictement mécanique, le concepteur devrait toujours avoir à l'esprit les principes rappelés ci-après. Leur liste n'est pas exhaustive. Certaines directives se répètent lorsqu'elles affectent plusieurs phénomènes. Nous les énumérons sans commentaire particulier puisqu'elles résument en quelque sorte cet ouvrage. Le lecteur consultera les sections et paragraphes cités pour la justification des règles ou pour plus de détails et des renseignements complémentaires.

### 27.2.2 Architecture et conception cinématique

L'architecture d'une machine et sa conception cinématique revêtent une grande importance pour son fonctionnement et son comportement dynamique. On vise surtout à

- alléger les pièces,
- accroître la rigidité,
- diminuer les efforts intérieurs,
- diminuer les efforts d'inertie.

Voici quelques principes généraux.

#### Architecture

- Réaliser les mécanismes avec le moins d'éléments possible; veiller à ce qu'ils soient simples et compacts (§ 5.10.3).

- Raccourcir les chaînes cinématiques (§ 5.10.2), particulièrement celles à commande positive dont on exige une grande précision de mouvement (§ 26.5.2).
- Transporter à distance seulement les mouvements d'entraînement rotatifs continus; le cheminement des mouvements oscillants ou fortement variés doit être court (§ 26.5.2).
- Faire tourner rapidement les longs arbres de transport d'énergie, réduire la vitesse localement à chaque utilisateur (§ 26.5.3).
- Commander chaque mouvement par un moteur individuel, coordonner les mouvements électriquement (§ 26.5.2).
- Profiter des moyens informatiques pour programmer certaines commandes et accroître la flexibilité des machines.
- Placer un volant de stockage d'énergie le plus près possible du consommateur d'énergie (§ 17.7.2). Le volant est moins lourd et moins encombrant s'il tourne rapidement (§ 26.5.6).
- Placer un volant de régulation de marche près de la source d'irrégularité, si possible sur un arbre rapide (§ 17.7.2 et 26.5.6).
- Disposer un embrayage ou un frein sur un arbre rapide car il est plus petit et plus léger; mais il chauffe davantage en cas de service intermittent que s'il est monté sur un arbre lent (§ 26.5.4 et 26.5.5).
- Attribuer à chaque élément le moins de fonctions possible en vue d'améliorer la fiabilité et la sécurité.
- Analyser la sécurité et prendre toutes les mesures utiles (sect. 26.7).
- Soigner l'esthétique (design) dès le début d'un projet.

### Cinématique

- Effectuer les mouvements avec des vitesses et des accélérations relativement constantes, sans choc ni saccade, avec de petites accélérations et de faibles valeurs du jerk (§ 15.4.8 et 15.9.2).
- Appliquer des lois de mouvement donnant le moins d'harmoniques possible lors de mouvements périodiques (§ 15.4.6).
- N'effectuer les mouvements variés qu'avec la vitesse strictement nécessaire.
- N'effectuer, si possible, que des mouvements de faible amplitude.
- Eviter les inversions du sens des mouvements (§ 15.9.1 et 17.4.7); préférer les trajectoires continues fermées, si possible circulaires.
- Animer seulement les éléments légers et en plus petit nombre possible, avec des vitesses variables.
- Faire fonctionner les éléments de transmission intermédiaires à petite vitesse.
- Prendre garde aux points morts (§ 9.5.5 et 10.7.5).
- Veiller à ce que les angles de pression ne soient pas trop grands (§ 10.2.4).
- Remplacer un mouvement rapide de l'élément de travail (outil) par un mouvement relatif de deux éléments plus lents.

### 27.2.3 Conception énergétique

L'énergie motrice est en principe fournie par un moteur, mais des éléments de stockage d'énergie, sous forme potentielle ou cinétique, peuvent aussi jouer un rôle moteur dans certaines phases de fonctionnement.

- Etudier le cheminement et le sens du flux d'énergie; définir les quadrants de fonctionnement de chaque branche (§ 12.2.3).

- Permettre, sauf cas particulier, la réversibilité du flux d'énergie en évitant les phénomènes d'autofreinage et en utilisant des mécanismes réversibles (sect. 12.3).
- Bloquer, si nécessaire, le retour d'énergie à l'aide de mécanismes irréversibles en situation d'autoblocage ou d'autofreinage (sect. 10.7 et 12.3).
- Observer certains rapports entre les inerties situées en amont et en aval des mécanismes autofreinés pour permettre leur démarrage et arrêt progressifs (sect. 14.8).
- Éviter les circulations de puissance dans les chaînes cinématiques bouclées (sect. 12.6):
  - en limitant la précontrainte des mécanismes bouclés grâce à une grande précision de fabrication et/ou en assouplissant les voies de transmission (§ 12.6.1);
  - en respectant certains rapports de vitesses si la boucle comporte un train épicycloïdal (§ 12.6.3).
- Prendre toutes les dispositions utiles pour diminuer les pertes d'énergie; notamment choisir des organes de machines convenables.

### 27.2.4 Conception thermique

Les pertes d'énergie mécanique constituent autant de sources de chaleur. La température est limitée par la tenue mécanique des matériaux et par la viscosité requise des lubrifiants pour un bon graissage. L'échauffement et la dilatation thermique limitent la vitesse et la puissance. Il faut:

- Diminuer les frottements inutile.
- Refroidir si possible les organes à l'air en améliorant le coefficient de transmission de chaleur et en augmentant la surface d'échange, éventuellement avec des ailettes (§ 19.6.4).
- Refroidir par une circulation d'huile à travers un échangeur de chaleur auxiliaire si le refroidissement naturel est insuffisant (§ 19.3.3).
- Dimensionner les réducteurs, paliers, embrayages et freins non seulement sur la base de considérations cinétostatiques, mais aussi du point de vue thermique (§ 19.6.5 à 19.6.8).
- Tenir compte du régime de fonctionnement pour calculer l'échauffement; en cas de surcharge, vérifier que la durée de fonctionnement limite est compatible avec les exigences du cahier des charges (§ 19.6.3 et 20.3.3).
- Étudier les dilatations thermiques et leurs influences sur le fonctionnement des mécanismes (§ 19.7.2, sect. 21.4).
- Vérifier que les efforts et les contraintes thermiques sont acceptables, sinon prendre toutes les mesures propres à les diminuer (§ 19.7.3 et 19.7.4).
- Vérifier l'échauffement des paliers, prendre les mesures nécessaires pour limiter la température (§ 19.6.7 et 19.6.2 à 4).

### 27.2.5 Entraînement des machines

Toute machine est mise en mouvement par un ou plusieurs moteurs qui lui fournissent l'énergie nécessaire. Des organes de transmission adaptent les caractéristiques des moteurs aux exigences de la machine. Les organes de commande et de réglage des moteurs sortent du cadre de cet ouvrage.

**Type de moteur**

- Choisir le genre de moteur selon la source d'énergie disponible (§ 20.3.1).
- Choisir un type de moteur dont la caractéristique de couple convient à la caractéristique d'entraînement de la machine et qui satisfait les exigences de réglage de vitesse (§ 20.3.3 et 20.5.3).

**Puissance**

- Déterminer la puissance d'entraînement nécessaire sur la base de la puissance utile requise et des pertes d'énergie ou du rendement de la transmission; dans certains cas, s'appuyer sur l'expérience acquise avec des machines similaires (sect. 20.2).
- Déterminer la puissance d'un moteur en tenant compte des critères suivants:
  - la puissance d'entraînement nécessaire (§ 20.4.1);
  - la durée ou l'espace de démarrage (§ 20.4.1);
  - la durée totale d'un mouvement (§ 20.4.1);
  - l'échauffement en cas de démarrages répétés fréquents (§ 20.4.2);
  - la durée et la puissance de marche relative (§ 20.3.5).
- Calculer la puissance nominale du moteur en tenant compte de son taux d'utilisation, du régime de service, de la température ambiante et de l'altitude du site d'exploitation (§ 20.4.1).

**Vitesse**

- Choisir si possible la vitesse du moteur égale à celle de l'arbre à entraîner; le cas échéant, prévoir une transmission convenable (§ 20.5.1 et 20.6.3).
- Choisir la vitesse de manière à minimiser le coût total ou l'encombrement du moteur et de la transmission (§ 20.5.1).
- Calculer le rapport de vitesses de la transmission sur la base de l'un ou l'autre des critères suivants:
  - la vitesse d'entraînement (§ 20.5.1);
  - l'effort d'entraînement (§ 20.5.1);
  - l'accélération (§ 20.6.3).
- Choisir le moteur et le rapport de vitesses de la transmission de manière à optimiser la durée du mouvement (§ 20.6.3) ou l'échauffement du moteur (§ 20.6.5).
- Situer le point de fonctionnement dans un diagramme couple-vitesse et vérifier que le régime soit stable (§ 14.4.4).
- Évaluer les variations cycliques de vitesse (§ 14.6.1 et 20.4.3).
- Régulariser la marche en équilibrant les mécanismes et/ou en prévoyant un volant ayant une inertie suffisante (§ 14.6.2).

**Démarrage**

- Choisir l'allure de la caractéristique de couple du moteur de manière à ce que le démarrage soit aisé (§ 14.5.1).
- Éviter les démarrages trop brutaux afin de ménager les organes de transmission (§ 17.4.8).
- Vérifier que le démarrage ne dure pas trop longtemps afin que le moteur ne surchauffe pas (§ 14.5.2); le cas échéant, prévoir un embrayage ou un coupleur.
- Vérifier l'échauffement des embrayages et des coupleurs (§ 14.5.3, 14.5.4 et 19.5.4).
- Vérifier que la fréquence des démarrages est compatible avec le moteur choisi (§ 20.4.2).



### Freinage

- Choisir un type de frein adapté aux exigences de la machine et de son exploitation (§ 14.7.1 et 14.7.2).
- Choisir la taille optimale du frein permettant le freinage le plus rapide (§ 14.7.4).
- Vérifier que la température des garnitures et celle du frein restent dans des limites acceptables (§ 19.5.4).
- Vérifier que la fréquence des freinages exigée ne surchauffe pas le frein (§ 19.6.8 et 25.6.5).

### 27.2.6 Conception cinéto-statique

Une conception cinéto-statique saine est indispensable pour obtenir un bon comportement dynamique à grande vitesse. Un système bien construit sollicite relativement peu ses organes de guidage et sa structure. La réduction des efforts dynamiques cinéto-statiques se répercute favorablement sur les vibrations.

Le calcul des efforts sert de base au dimensionnement des organes et des structures.

Conjointement avec l'allégement des pièces, une grande rigidité des structures est la condition sine qua non pour obtenir un bon comportement dynamique et ne pas exciter de vibrations désagréables ni surcharger les pièces.

### Réseau d'efforts

- Déterminer le degré de mobilité des chaînes cinématiques (sect. 9.5) et leur degré d'hyperstatisme intérieur (§ 9.6.2).
- Déterminer le degré d'hyperstatisme d'un système vis-à-vis d'une charge extérieure.
- Diminuer éventuellement le degré d'hyperstatisme (§ 9.6.3).
- Sauf exception, élaborer des constructions isostatiques (§ 5.10.1). Si ce n'est pas possible, maîtriser les efforts hyperstatiques pour les rendre indépendants des imprécisions de fabrication et de montage, des dilatations thermiques et de l'usure (sect. 9.7).
- Étudier l'opportunité de précontraintes pour maintenir certains matériaux en compression (§ 7.6.2), pour supprimer les jeux (§ 7.6.5) ou pour accroître la rigidité (§ 7.6.6).
- Tracer le cheminement des efforts utiles, des efforts induits et des hyperstatiques afin de vérifier la conception mécanique et mettre en évidence les pièces sollicitées (sect. 5.7).
- Vérifier les conditions d'arc-boutement et d'auto-blocage (sect. 10.7).

### Intensité des efforts

- Réduire les charges imposées aux éléments et diminuer les efforts intérieurs pour alléger la construction.
- Supprimer, si possible, les hyperstatiques (§ 5.10.1).
- Équilibrer les forces parasites à leur source (§ 5.10.2).
- Éviter les porte-à-faux et disposer judicieusement les organes de transmission (§ 5.10.2).
- Transmettre les efforts par le chemin le plus court (§ 5.10.3).
- Construire de manière compacte (§ 5.10.3).

- Faire travailler les structures en traction-compression, éviter la flexion et surtout la torsion (§ 5.10.3 et 6.4.1).
- Éviter les déviations brutales de forces (§ 5.10.3).
- Empêcher les surcharges au moyen de limiteurs d'effort à action précise et rapide situés le plus près possible de la source de l'effort dangereux (§ 26.5.7).

### **Distribution des efforts**

- Prendre des mesures pour répartir uniformément les charges sur les diverses voies de transmission en parallèle (chap. 8).
- Uniformiser les contraintes de liaison en veillant à ce que les déformations de deux pièces en contact soient parallèles, de même sens et de même grandeur (§ 8.6.2).
- Se méfier des modèles de calcul simplistes qui supposent que les charges et les pressions de contact sont uniformément réparties. Tenir compte des distributions réelles (sect. 8.3 à 8.7).

### **Masse**

- Simplifier les mécanismes.
- Construire de manière compacte (§ 5.10.3).
- Étudier le cheminement des efforts de manière à diminuer la sollicitation intérieure des pièces (§ 5.10.2 et 5.10.3).
- Alléger les pièces en diminuant leur volume de matière.
- Utiliser des matériaux à haute résistance spécifique: alliages légers, titane, composites (§ 23.7.4).

### **Rigidité**

- Construire de manière compacte (§ 5.10.3).
- Faire travailler les structures en traction-compression, éviter la flexion et surtout la torsion (§ 6.4.1).
- Choisir correctement la forme des sections de poutres; préférer les sections fermées pour la torsion (§ 6.5.1).
- Construire les guidages rigides, à jeu minimal; supprimer le jeu par précharge (§ 7.6.5).
- Construire les bâtis très rigides (§ 6.5.1 et 18.4.6).
- Nervurer les parois et cloisonner les caissons (§ 6.5.1).
- Utiliser des matériaux composites fibrés et des éléments en sandwich (§ 6.5.2).

### **27.2.7 Conception dynamique**

Une bonne conception dynamique doit éviter les vibrations ou pour le moins limiter leur amplitude, dans le but:

- d'assurer aux mécanismes la précision de mouvement et de positionnement voulue à toute vitesse de la machine;
- de mettre les organes et structures de la machine à l'abri de surcharges dynamiques dangereuses;
- d'éviter la transmission de vibrations à l'environnement;
- d'abaisser l'intensité du bruit de fonctionnement.

**Efforts dynamiques**

- Éviter les inversions du sens des efforts donnant lieu à des chocs dans les jeux des liaisons; le cas échéant, le changement de sens doit se faire à petite vitesse (sect. 17.5).
- Alléger les éléments (§ 15.9.2, 15.10.3 et 17.7.1).
- Equilibrer statiquement et dynamiquement les rotors et tous les corps tournants (§ 16.4.6).
- Equilibrer statiquement les mécanismes par des ressorts, éventuellement par des contrepoids, des dispositifs hydrauliques, pneumatiques ou magnétiques (§ 14.6.2).
- Equilibrer dynamiquement les mécanismes à mouvements variés en disposant judicieusement des masselotes d'équilibrage (§ 16.4.3) ou en prévoyant des mécanismes auxiliaires (§ 16.4.4 et 16.4.5).
- Equilibrer les efforts dynamiques par des efforts de compensation appliqués au plus près des points d'application des efforts perturbateurs.
- Compenser les forces d'inertie d'un mécanisme par les forces d'inertie d'un mécanisme voisin (machines polycylindres) (§ 16.4.5).
- Recourir à des compensateurs pour diminuer les efforts dynamiques à la vitesse de régime permanent (§ 17.7.6).
- Éviter les démarrages et freinages brutaux; adapter leur durée à la période propre la plus basse de la chaîne cinématique (§ 15.4.9).
- Diminuer la vitesse relative de pièces qui se heurtent et diminuer l'inertie de la pièce la plus rapide (§ 17.8.1).
- Réduire le travail d'une force de choc en inclinant le mouvement par rapport à la force et en diminuant l'inertie de la pièce la plus rapide (§ 17.8.4).
- Laisser agir un choc, une force dynamique ou un effort de torsion le plus près possible d'un nœud modal pour limiter l'excitation de ce mode (§ 17.7.2 et 17.8.4).
- Equilibrer une force de choc par un choc opposé appliqué à proximité.
- Assouplir localement les zones de contact entre pièces qui se heurtent; interposer une couche d'un matériau à bas module d'élasticité et doué d'un fort amortissement interne pour éviter les rebonds (§ 17.8.4).
- Situer un moment perturbateur au ventre d'un mode de flexion et non près d'un nœud (§ 17.7.2).
- Minimiser les jeux ou les supprimer par précharge (§ 7.6.5, 15.5.3 et sect. 17.5).
- Caler correctement les arbres avec joints de cardan pour que les mouvements soient homocinétiques.
- Utiliser des joints homocinétiques.
- Agir sur la forme modale de la structure de manière à ce que le travail d'une force excitatrice soit minimal: ajouter ou enlever des supports, des paliers, des articulations, des raidissements, des encastremements.

**Précision des mouvements**

- Situer la pulsation propre la plus basse d'une chaîne cinématique au moins 15 à 20 fois plus haut que la pulsation fondamentale d'un mouvement périodique (§ 15.4.6).
- Veiller à ce que la période propre la plus longue d'une chaîne cinématique soit au moins 5 fois plus courte que la durée d'un mouvement apériodique (§ 15.4.9 et 15.9.2).

- Tenir compte des effets de cumul si la durée d'un mouvement apériodique cyclique est inférieure à 30 fois la période de la pulsation propre la plus longue du mécanisme (§ 15.4.10).
- Choisir des lois de mouvement favorables, à jerk minimal et dont les harmoniques d'ordre supérieur à 4 ou 5 ont une très petite amplitude.
- Allonger le plus possible la durée d'un mouvement par rapport à un cycle de la machine (§ 15.5.2 et 15.9.2).
- Alléger les pièces mobiles et diminuer leur inertie (§ 15.9.2), surtout celles qui se trouvent au bout de la chaîne cinématique (§ 15.9.4).
- Donner une grande rigidité à toutes les pièces d'une chaîne cinématique, dans le sens de leur mouvement, aux organes de guidage et au bâti (§ 15.9.2).
- Choisir des matériaux offrant un amortissement interne élevé (§ 15.9.2).
- Réaliser les pièces déterminantes pour la précision en matériaux composites.
- Minimiser les jeux ou les supprimer totalement par précontrainte (§ 7.6.5).
- Disposer un éventuel ressort de rappel à la fin de la chaîne cinématique (sect. 15.3).
- Éviter l'affolement des liaisons unilatérales en diminuant l'inertie des pièces, en accroissant l'effort de rappel, en réduisant le frottement (§ 15.5.2).
- Combattre le stick-slip par l'utilisation de matériaux de glissement adéquats en cas de mouvements lents (§ 2.5.2. et 15.6.3).

### **Efforts dynamiques dans les mécanismes**

- Atténuer le mieux possible les efforts dynamiques sollicitant les pièces et les mécanismes (§ 17.7.1, 17.7.2 et 18.4.1).
- Interposer une forte inertie entre la source d'un effort perturbateur et le mécanisme à protéger (§ 17.7.2).
- Découpler la perturbation et le système à protéger en interposant un élément souple, par exemple un accouplement flexible, de manière à ce que la pulsation propre du système soit nettement inférieure à la pulsation harmonique gênante ou que la période propre soit grande par rapport à la durée d'une perturbation (§ 17.7.2). Cette mesure et la précédente sont impraticables dans le cas de mécanismes à commande positive dont on attend une grande précision, parce qu'elles abaissent toujours les pulsations propres (§ 17.7.1).
- Choisir des matériaux à forte dissipation interne; installer éventuellement des amortisseurs (§ 17.7.2).
- Amortir rapidement les vibrations transitoires en allégeant les pièces et en choisissant des matériaux convenables (§ 17.7.2). A cet égard, la rigidité est sans influence.
- Préférer les amortisseurs à rigidité progressive pour limiter l'amplitude des vibrations au passage de résonances. La pulsation propre dépend de l'amplitude des vibrations (§ 17.7.3).
- Prévoir éventuellement un amortisseur dynamique accordé ou à couplage visqueux. Les amortisseurs pendulaires et ceux à chocs s'adaptent automatiquement à la pulsation perturbatrice (§ 17.7.5).
- Recourir à un compensateur dynamique (§ 17.7.6).
- Prévoir des amortisseurs actifs (§ 18.4.5).

### Résonances

- Éviter que des excitations périodiques coïncident avec une fréquence propre (§ 17.4.3 et 17.4.4). Cela concerne en particulier la fréquence d'engrènement des engrenages et des chaînes, la fréquence d'attaque des fraises. Le rapport entre le nombre d'aubes mobiles et celui d'aubes directrices d'un étage de turbomachines ne doit pas être un nombre entier.
- Utiliser des cames dont la loi du mouvement possède seulement un petit nombre d'harmoniques (cames HS) (§ 15.4.6).
- Veiller à ce que la période de chocs successifs ne coïncide pas avec une période propre.
- Traverser rapidement les résonances en cas de fonctionnement surcritique (§ 17.4.5).
- Diminuer l'amplitude des résonances en utilisant des matériaux à fort amortissement interne (§ 17.7.2).
- Installer des amortisseurs dynamiques (§ 17.7.5).

### Vibrations des machines

- Prendre en priorité toutes les mesures visant à diminuer l'intensité des efforts d'inertie libres (sect. 16.4).
- Placer la machine sur un socle lourd (prendre garde à la flexibilité et à la résistance des dalles) (§ 18.4.3).
- Equiper le bâti d'un ou plusieurs amortisseurs dynamiques (§ 18.4.3).
- Prévoir un amortisseur actif (§ 18.4.5).
- Atténuer la transmission au sol d'efforts d'inertie libres en interposant des amortisseurs souples doués d'un fort amortissement interne pour faciliter le passage de résonances (§ 18.4.2). Prendre garde à leur échauffement (§ 19.4.3).
- Atténuer l'excitation d'un objet par le mouvement de son support en interposant un amortisseur souple amorti (§ 18.4.4).

### Vibration des rotors

- Equilibrer statiquement et dynamiquement les rotors (§ 16.4.6).
- Ne pas laisser tourner en permanence un rotor au voisinage d'une vitesse critique (§ 18.4.1).
- Calculer les vitesses critiques en tenant compte de la compliance des paliers et de leur anisotropie (§ 18.2.2). Les paliers et leurs supports doivent être le plus rigide possible.
- Tenir compte des effets gyroscopiques, en particulier pour les rotors en porte-à-faux (§ 18.2.6).
- Donner aux rotors et aux arbres une rigidité de flexion indépendante de la direction transversale (isotropie) (§ 18.2.5).
- Éviter l'instabilité des paliers hydrodynamiques (§ 18.2.4).
- Ne pas chercher à accroître l'amortissement interne d'un rotor pour faciliter la traversée d'une résonance car il existe un risque d'instabilité. Augmenter, au contraire, fortement l'amortissement externe, spécialement dans les paliers (§ 18.2.4).
- Elever les vitesses critiques d'un arbre en recourant à un arbre creux (§ 18.2.7). L'amincissement est limité par le risque de voilement en torsion (§ 21.3.6).

- Réaliser les rotors sous la forme de tambours creux munis de bouts-d'arbres plutôt qu'en enfilant des éléments avec leur moyeu sur un arbre (§ 6.5.3).
- Précharger un arbre en traction pour élever sa vitesse critique (§ 18.2.7).

### 27.2.8 Construction

L'étude et l'application des principes fondamentaux exposés dans cet ouvrage ne suffisent pas pour réaliser une bonne machine. Encore faut-il que chaque élément et chaque organe soient correctement conçus. Le choix et l'agencement des éléments, le tracé des pièces, les moyens d'assemblage, le choix des matériaux doivent répondre à toutes les exigences fonctionnelles et de qualité. L'étude est complexe à cause du grand nombre de paramètres qui interviennent et de leur interdépendance. Il faut en effet tenir compte, notamment, des aspects suivants :

- le principes de fonctionnement,
- la sûreté,
- les procédés de fabrication selon les moyens disponibles,
- le nombre d'objets à fabriquer,
- les éléments en stock ou disponibles dans le marché,
- le coût des matériaux et de la fabrication,
- la facilité d'assemblage et d'entretien,
- la masse et l'encombrement,
- le bas niveau de bruit,
- le respect des normes et des règlements,
- l'agression chimique de l'environnement,
- les conditions d'exploitation,
- l'influence sur l'environnement,
- l'esthétique,
- l'adaptation ergonomique,
- le délai de réalisation.

Chaque détail a son importance et mérite beaucoup d'attention. Une seule erreur, une omission, un mauvais choix, un petit défaut de fabrication peuvent compromettre le fonctionnement et la sûreté d'une machine. Les divers aspects d'une construction et les diverses exigences sont souvent contradictoires. Toute réalisation résulte finalement de compromis.

Heureusement, on dispose d'une longue tradition qui se reflète dans d'innombrables ouvrages qui décrivent les éléments de machines et leur dimensionnement [27.3 à 27.12]. Nous nous limitons à énoncer quelques directives de construction découlant immédiatement de cet ouvrage.

### Eléments de machines

- Recourir à des liaisons par frottement plutôt que par obstacle lorsque des inversions du sens de l'effort surviennent en service normal.
- Mettre les pièces en contact par des surfaces plutôt que par des lignes; le cas échéant, préférer un contact linéique à un contact ponctuel.
- Prévoir des moyens pour rattraper l'usure et pour corriger les erreurs de fabrication qui affectent les dimensions cinématiques.
- Prendre toutes les mesures de construction propices à accroître la rigidité des pièces et des structures (sect. 6.5).

- Eviter soigneusement tout arc-boutement et autoblocage des guidages (§ 10.7.3).
- Appliquer toutes les règles usuelles de construction.
- Mettre à profit tous les avantages de l'électronique et de l'informatique.
- Penser à mettre en œuvre des techniques nouvelles: liquides électrorhéologiques, piézocéramiques, matériaux à mémoire de forme, paliers magnétiques, amortisseurs magnétiques, ressorts à fluides compressibles, éléments actifs.

### Matériaux

- Choisir les matériaux qui offrent le meilleur compromis entre leurs caractéristiques techniques et les coûts: coût de la matière, coût de la fabrication, incidence des propriétés du matériau sur la taille et sur le coût des organes, coûts d'entretien et d'élimination (charge écologique) (sect. 23.7).
- Adapter la résistance des matériaux à la capacité de résistance strictement nécessaire (§ 24.7.4).
- Choisir des matériaux offrant une haute résistance spécifique et un haut module d'élasticité spécifique (alliages légers, titane, composites fibrés) pour des organes à grandes performances dynamiques.

### Conception tribologique

- Eviter le contact direct entre pièces en mouvement relatif, soit en ménageant un jeu (§ 2.4.9 et 22.4.5) soit en interposant un fluide (sect. 2.4; § 22.4.5).
- Remplacer, si possible, toute liaison glissante ou articulée par une liaison flexible (§ 3.3.2).
- Choisir les matériaux des couples cinématiques, les revêtements et traitements de surface ainsi que l'état de surface de manière à minimiser l'usure (§ 3.2.2) et à prévenir le grippage (§ 3.5.2).
- Prévenir l'écailage en limitant la pression hertzienne et en choisissant des matériaux convenables (§ 3.4.2).
- Eviter le fretting en solidarissant fermement des pièces assemblées par frottement (§ 3.3.2).
- Mettre les couples cinématiques à l'abri des impuretés par des étanchéités convenables (§ 3.2.2) et en filtrant finement l'huile; protéger les roulements contre les impuretés se trouvant dans les carters au moyen d'une étanchéité intérieures.
- Etudier soigneusement la lubrification (sect. 2.4).
- Choisir les organes de guidage de manière à ce que leurs propriétés tribologiques s'accordent avec les conditions d'exploitation (§ 2.4.8).
- Evaluer la longévité des couples cinématiques (sect. 3.6).
- Choisir les matériaux des embrayages, freins et glissières en recherchant une évolution dynamique du coefficient de frottement propice à éviter ou atténuer le stick-slip (§ 2.5.2 et 15.6.3).
- Etudier une procédure de rodage prévoyant un accroissement progressif de la vitesse et de la charge afin d'accroître la longévité des couples cinématiques (§ 3.7.2).

### Tracé des pièces

- Transmettre les efforts par le chemin le plus court et le moins tourmenté possible (§ 5.10.3).

- Prendre des dispositions pour diminuer les efforts intérieurs (§ 5.10.2 et 5.10.3).
- Diminuer le plus possible l'importance des concentrations de contraintes (§ 24.3.4).

### Résistance mécanique

Dimensionner les éléments de machines en observant la démarche générale suivante:

- calculer les efforts cinétostatiques et dynamiques;
- étudier la dynamique des contraintes;
- tenir compte des concentrations de contraintes;
- appliquer la théorie de la rupture adaptée au comportement du matériau et à la dynamique des contraintes (chap. 23).
- ne pas choisir des valeurs de facteurs de sécurité inutilement élevées (§ 24.3.5 et 24.6.1);
- appliquer le principe d'isosécurité et d'isolongévité à toutes les pièces d'un ensemble (sect. 24.7).

### 27.2.9 Modélisation

Les modèles servant de base aux calculs scientifiques doivent correspondre exactement à la construction réelle. A contrario, il faut vérifier que la construction est conforme aux modèles qui ont servi au calcul.

Il faut beaucoup d'expérience pour établir un modèle suffisamment simple pour que l'on puisse dominer le calcul mais cependant assez complet pour rendre compte correctement du comportement d'un système. La structure des modèles dépend de la vitesse des machines et de la relation entre les fréquences excitatrices et les fréquences propres (sect. 13.6). De nombreux dysfonctionnements et des avaries sont consécutifs à l'utilisation de modèles inadaptés aux conditions de fonctionnement réelles. Il faut prudemment se méfier de la routine et du poids de la tradition.

La modélisation par des logiciels, même performants, de calcul de la cinématique et de la dynamique aide certainement le concepteur. Mais elle ne suffit pas pour trouver des solutions. L'ingénieur doit disposer d'une vaste culture technique et doit connaître les phénomènes physiques pour interpréter les résultats fournis par les ordinateurs. Le meilleur des modèles n'est guère plus qu'une approche virtuelle de la réalité.

## 27.3 PERSPECTIVES

Les premières machines ont presque toujours imité la nature ou les gestes humains. Leur fonctionnement utilisait souvent des mouvements alternatifs: pompe à piston, machine à vapeur, presse à imprimer, moteur à explosion. Mais l'augmentation de la puissance et de la productivité nécessite une augmentation de la vitesse. A grande vitesse, les forces d'inertie des pièces en mouvement alternatif deviennent très grandes; elles causent des vibrations et usent prématurément les surfaces des couples cinématiques. C'est pourquoi on a très naturellement cherché à construire des machines rotatives dont la douceur de marche et la simplicité constructive sont évidentes:



pompe centrifuge, turbine à vapeur, rotative d'imprimerie, moteur Wankel. C'est aussi dans cette perspective qu'il faut voir le développement de nouveaux matériaux légers, rigides et résistants.

Au début, les machines de production effectuaient toujours des opérations discontinues, les unes après les autres. Aujourd'hui, on adopte des procédés technologiques continus dont les avantages principaux sont la réduction des temps morts, l'amélioration de la régularité et de la qualité des produits et la simplification des mécanismes.

On cherche également à améliorer la précision des mouvements et du positionnement des pièces mobiles tout en accroissant les cadences.

L'automatisation est de plus en plus poussée. Elle décharge l'homme des tâches routinières de contrôle et de surveillance; elle permet aussi d'augmenter la vitesse des machines au-delà des possibilités de réaction des utilisateurs humains. Les machines comportent aujourd'hui des commandes programmables afin d'augmenter leur souplesse d'utilisation: avec la même installation, on peut fabriquer des produits de caractéristiques très variées; les réglages nécessaires pour passer d'un produit à un autre sont rapides.

Les machines cybernétiques sont promises à un grand avenir. Elles sont douées de certaines fonctions physiologiques humaines: sens tactile, sens visuel pour la reconnaissance d'objets; elles obéissent à la voix et ont une certaine intelligence. Les robots et manipulateurs industriels reproduisent les gestes humains.

L'électronique, avec ses immenses possibilités, modifie profondément l'architecture des machines. Les mécanismes de commande mécanique sont remplacés par des commandes électroniques souples, rapides et précises. Les machines présentent un aspect plus simple et gagnent en productivité. Mais on est tenté, dans ce domaine, par une sophistication croissante préjudiciable à la rentabilité. Les gadgets diminuent la fiabilité et la disponibilité des machines. Seules des machines simples et robustes peuvent être exploitées convenablement par du personnel non qualifié.

Dans le courant universel de la lutte contre la pollution, on s'efforce de diminuer le bruit et la dispersion de produits de graissage. Un autre axe important de progrès est l'augmentation de la fiabilité et de la sûreté. Une meilleure compréhension de la fatigue des matériaux ainsi que la diminution de l'usure concourent à ce résultat.

Le grand public et les milieux politiques pensent généralement que la mécanique est une branche dépassée, car ils sont momentanément surtout impressionnés par le triomphe de l'électronique, de l'informatique et des télécommunications. Cela explique très probablement pourquoi les vocations d'ingénieurs en génie mécanique stagnent ou même diminuent. Il est vrai qu'aux yeux du non-initié, un palier ou un engrenage a aujourd'hui encore la même forme qu'il y a 2000 ans; mais on oublie que leur capacité de charge et leur longévité augmentent constamment alors que leur taille diminue. En réalité, non seulement les organes exerçant des forces sont et demeureront mécaniques, mais on invente encore de nouveaux mécanismes.

La construction des machines exige une somme de connaissances toujours plus grandes, tant théoriques que technologiques. Il est indispensable de constituer des équipes groupant des ingénieurs mécaniciens, électriciens, électroniciens et informaticiens sous l'autorité d'un chef généraliste expérimenté. La multiplicité des tâches, la diversité et la complexité des problèmes rendent ce travail créatif passionnant.

Pour nous, il est sûr que le progrès de la mécanique ne s'arrêtera qu'avec l'humanité.

## BIBLIOGRAPHIE

### CHAPITRE 19

- [19.1] KREITH, F., *Transmission de la chaleur et thermodynamique*, Masson, Paris, 1967.
- [19.2] HOLMAN, J.-P., *Heat Transfer*, 5<sup>e</sup> éd., McGraw-Hill, New York, 1981.
- [19.3] VON KISS, M., *Der Wärmeübergang zwischen sich berührenden metallischen Oberflächen*, Bericht 47, Eidgenössisches Institut für Reaktorforschung, Würenlingen (Suisse), 1963.
- [19.4] WINKELMANN, S., HARMUTH, H., *Schaltbare Reibkupplungen*, Springer, Berlin, 1985.
- [19.5] BLOK, H., «Theoretical Study of Temperature Rise at Surface of Actual Contact under Oiliness Lubrication Condition», *Proc. Gen. Disc. Lubric. IME*, Bd 2, London, pp. 225-235, 1937.
- [19.6] ARCHARD, J.-F., «The Temperature of Rubbing Surfaces», *Wear*, N° 2, p. 458, 1958-59.
- [19.7] KÖHLER, G., RÖGNITZ, H., *Maschinenteile*, 2 vol., 7<sup>e</sup> éd., Teubner, Stuttgart, 1986.
- [19.8] ROLOFF, H., MATEK, W., *Maschinenelemente*, 11<sup>e</sup> éd., Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [19.9] MULLER, H. W., *Die Umlaufgetriebe*, Springer, 1971.
- [19.10] BLOK H., «Lubrication as a Gear Design Factor», *Proc. Inter. Conf. Gearing*, IME, London, pp. 144-158, 1958.
- [19.11] LANG, O. R., STEINHILPER, W., *Gleitlager*, Springer, Berlin, 1978.
- [19.12] PAHL, G., OEDEKOVEN, A., «Temperaturverhalten von trockenlaufenden Reibungskupplungen», *Konstruktion*, 42, pp. 109-119, Springer, 1990.
- [19.13] «Roulements à compensation thermique», *Entraînements et systèmes*, Paris, mai 1991.
- [19.14] HORN, R., GROPP, H., «Betonbetten verbessern die Arbeitsgenauigkeit von CNC-Drehmaschinen», *Maschinenbautechnik*, 36, N° 12, Berlin, 1987.
- [19.15] KRAL, W. A., «Polymerbeton, ein Maschinenbauwerkstoff mit Zukunft», *Technica*, N° 25, Bâle, 1988.

### CHAPITRE 20

- [20.1] HOEHN, B.-R., «Warum stufenlose Getriebe im Kraftfahrzeug ?» *VDI, Bericht N° 803*, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1990.

- [20.2] SCHUETZ, H., «Hat die Keilriemenautomatik Zukunftschancen im Automobil ?», *Konstruktion*, pp. 113-116, Springer, 1993.
- [20.3] HOEHN, B.-R., «Konzepte weit gespreizter stufenloser Getriebe», *Konstruktion*, pp. 359-364, Springer, 1994.
- [20.4] CARLSON, J. D., DUCLOS, T.-G., «ER Fluid Clutches and Brakes, Fluid Property and Mechanical Design Considerations», *Proceeding 2 Int. Conf. on ER Fluids*, 1989.
- [20.5] PHILIPP, W., «Linear - Direktantriebe hoher Genauigkeit und Dynamik», *Konstruktion*, 43, pp. 425-429, Springer, 1991.

## CHAPITRE 21

- [21.1] FLÜGGE, W., *Statik und dynamik der Schalen*, Springer, Berlin, 1957.
- [21.2] TIMOSHENKO, S., *Théorie de la stabilité élastique*, Béranger, Paris, 1947.
- [21.3] KLOTTER, K., *Technische Schwingungslehre*, vol. 1, Springer, Berlin, 1980.
- [21.4] FAUPEL, J. H., FRANKLIN, E., FISHER, PH. D., *Engineering Design*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [21.5] GROSS, S., *Berechnung und Gestaltung von Metallfedern*, Springer, Berlin, 1960.
- [21.6] LANG, O. R., STEINHILPER, W., *Gleitlager*, Springer, Berlin, 1978.
- [21.7] PRUVOT, F., «High Speed Bearings for Machine Tool Spindle», *Annals of the CIRP*, vol. 29, pp. 293-297, 1980.
- [21.8] PRUVOT, F., *Conception et calcul des machines-outils*, vol. 4, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, à paraître.

## CHAPITRE 22

- [22.1] BOREL, L., *Thermodynamique et énergétique*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 3<sup>e</sup> éd., revue et corrigée, Lausanne, 1991.
- [22.2] TÜCKMANTEL, H.-J., «Die Berechnung statischer Dichtverbindungen unter Berücksichtigung der maximal zulässigen Leckmenge auf der Basis einer neuen Dichtungstheorie», *Konstruktion*, N° 40, pp. 116-120, Springer, 1988.
- [22.3] TÜCKMANTEL, H.-J., «Über das elastische Verhalten von Flanschverbindungen», *Konstruktion*, 39, pp. 209-216, Springer, 1987.
- [22.4] LANG, C. M., «Elastische Dichtungen, Pressungsverlauf und Reibung», *Maschinenmarkt*, 75, pp. 2101-2106, 1969.
- [22.5] THOMSON, J. L., «Packed Gland for high Pressures : Analysis of Fundamentals», *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, N° 172, pp. 471-486, pp. 499-512, 1958.
- [22.6] TÜCKMANTEL, H.-J., «Beitrag zur Verbesserung der Berechenbarkeit von Abdichtungen mittels Stopfbuchspackungen», *Konstruktion*, 38, 4, pp. 135-138, Springer, 1986.
- [22.7] MÜLLER G. S., MÜLLER, H. K., «Verwirbelungsverluste von Gleitring-dichtungen», *Konstruktion*, 42, pp. 227-232, Springer, 1990.
- [22.8] WÄCHTER, K., *Konstruktionslehre für Maschineningenieure*, 2<sup>e</sup> éd., VEB Verlag Technik, Berlin, 1989.

- [22.9] MÜLLER, H. K., WAIDNER, P., «Niederdruck - Gleitringdichtungen, Vorgänge im Dichtspalt», *Konstruktion*, 40, pp. 67-72, Springer, 1988.
- [22.10] MAYER, E., *Garnitures mécaniques d'étanchéité*, Dunod, Paris, 1972.
- [22.11] TRUTNOVSKY, K., *Berührungsdichtungen an ruhenden und bewegten Maschinenteilen*, Springer, Berlin, 1975.
- [22.12] HAINZELIN, J., ZALESKI, C. P., «Etude et essai d'un joint métallique liquéfiable pour un réacteur rapide», *Soudage et Techniques Connexes*, N° 19, pp. 27-33, 1965.
- [22.13] ZBINDEN, F., *Instationäre Vorgänge in der Eisdichtung für oszillierende Stangen*, thèse 8015, ETH Zürich, 1986.

## CHAPITRE 23

- [23.1] KURZ, W., MERCIER, J. P., ZAMBELLI, G., *Introduction à la science des matériaux*, 2<sup>e</sup> éd., Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1991.
- [23.2] GROSCH, J., et collectif, *Werkstoffauswahl im Maschinenbau*, Expert, Grafenau, 1986.
- [23.3] KINGERY, W. D., BOWEN, H. K., UHLMANN, D. R., *Introduction to Ceramics*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [23.4] COLLINS, J. A., *Failure of Materials in Mechanical Design*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [23.5] WHYTE, R. R., *Engineering Progress through Trouble*, The Institution of Mechanical Engineers, London, 1975.
- [23.6] LUDWICK, P., *Revue VDI 1926*, cité dans le livre de HÄNCHEN, R., «Neue Festigkeitsberechnung für den Maschinenbau», Carl Hanser, München, 1967.
- [23.7] ROLFE, S. T., BARSOM, J.-M., *Fracture and Fatigue Control in Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1977.
- [23.8] BUI, H. D., *Mécanique de la rupture fragile*, Masson, Paris, 1978.
- [23.9] LABBENS, R., *Introduction à la mécanique de la rupture*, Pluralis, Paris, 1980.
- [23.10] TRAUPEL, W., *Thermische Turbomaschinen*, vol. 2, 3<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1982.
- [23.11] ERHARD, G., *Konstruieren mit Kunststoffen*, Carl Hanser, München, 1993.
- [23.12] FARAG, M. M., *Selection of Materials and Manufacturing Processes for Engineering Design*, Prentice Hall, New York, 1989.
- [23.13] GROSCH, J., et collectif, *Werkstoffauswahl im Maschinenbau*, Expert, Grafenau, 1986.
- [23.14] ASHBY, M. F., *Materials Selection in Mechanical Design*, Pergamon Press, Oxford, 1992.
- [23.15] RAO, S. S., *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1990.
- [23.16] KLOTTER, K., *Technische Schwingungslehre*, vol. 1, Springer, Berlin, 1980.
- [23.17] VEDY, B., BRAUEN, O., «Une idée concrétisée», *Marché suisse des machines*, 6/1994, p. 34-36.
- [23.18] BERTHELOT, T.M., *Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures*, Masson, Paris, 1992.

## CHAPITRE 24

- [24.1] NIEMANN, G., WINTER, H., *Maschinenelemente*, 3 vol., 2<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1981 et 1983.
- [24.2] ROLOFF, H., MATEK, W., *Maschinenelemente*, 11<sup>e</sup> éd., Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [24.3] TOCHTERMAN, W., BODENSTEIN, F., *Konstruktionselemente des Maschinenbaues*, 2 vol., 9<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1979.
- [24.4] HAUGEN, E. B., *Probabilistic Mechanical Design*, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [24.5] JOHNSON, R. C., *Optimum Design of Mechanical Elements*, 2<sup>e</sup> éd., John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [24.6] COLLINS, J. A., *Failure of Materials in Mechanical Design*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [24.7] BUXBAUM, O., *Betriebsfestigkeit*, Stahleisen GmbH, Düsseldorf, 1988.
- [24.8] THUM, A., PETERSEN, C., SVENSON, O., *Verformung, Spannung und Kerbwirkung*, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1960.
- [24.9] SORS, L., *Berechnung der Dauerfestigkeit von Maschinenteilen*, vol. 1, VEB Verlag Technik, Berlin, 1963.
- [24.10] NEUBER, H., *Kerbspannungslehre*, Springer, Berlin 1985.
- [24.11] NEUBER, H., *Theory of notch stresses*, J.W. Edwards, Ann Arbor, Mich., 1946.
- [24.12] BOLLENRATH, TROOST, «Wechselbeziehung zwischen Spannungs- und Verformungsgradient», *Archiv für Eisenhüttenwesen*, N° 23, 1952.
- [24.13] KOGAN, J., *Crane Design, Theory and Calculations of Reliability*, John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [24.14] MILITZER, O., «Exakte Berechnung von Wellen- Naben- Passfederverbindungen.» *Forschungsheft*, N° 26, Forschungsvereinigung Antriebstechnik, Frankfurt/Main, 1975.
- [24.15] MINER, M. A., «Cumulative Damage in Fatigue», *Appl. Mechanics*, N° 12, pp. 159-164, 1945.
- [24.16] ERHARD, G., *Konstruieren mit Kunststoffen*, Carl Hanser, München, 1993.
- [24.17] BERTHELOT, T.M., *Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures*, Masson, Paris, 1992.
- [24.18] BERGMANN, H.W., *Konstruktiongrundlagen für Faserverbundbauteile*, Springer, Berlin, 1992.

## CHAPITRE 25

- [25.1] TRAUPEL, W., *Thermische Turbomaschinen*, vol. 2, 3<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1982.
- [25.2] DOBROVOLSKI, V., et collectif, *Eléments de machines*, MIR, Moscou, 1971.
- [25.3] ROLOFF, H., MATEK, W., *Maschinenelemente*, 11<sup>e</sup> éd., Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [25.4] KOLLMANN, F. G., *Welle – Nabe – Verbindungen*, Springer, Berlin, 1984.
- [25.5] JAMES, M. L., SMITH, G. M., WOLFORD, J. C., WHALEY, P. W., *Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Harper & Row, New York, 1989.

- [25.6] WEAVER, W., TIMOSHENKO, S.P., YOUNG, D.H., *Vibration Problems in Engineering*, 5<sup>e</sup> éd., John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [25.7] HOLZWEISSIG, F., DRESIG, H., *Lehrbuch der Maschinendynamik*, 3<sup>e</sup> éd., Fachbuchverlag, Leipzig-Köln, 1992.
- [25.8] KLOTTER, K., *Technische Schwingungslehre*, vol. 1, Springer, Berlin 1980.
- [25.9] LANG, O. R., STEINHILPER, W., *Gleitlager*, Springer, Berlin, 1978.
- [25.10] KÖHLER, G., RÖGNITZ, H., *Maschinenteile*, 2 vol., 7<sup>e</sup> éd., Teubner, Stuttgart, 1986.
- [25.11] NIEMANN, G., WINTER, H., *Maschinenelemente*, 3 vol., 3<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1981 et 1983.
- [25.12] CHRITIN, V., *Méthodologie de maîtrise du bruit des équipements*, thèse 1678, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1997.

## CHAPITRE 26

- [26.1] KOLLER, R., *Konstruktionslehre für den Maschinenbau*, Springer, Berlin, 1985.
- [26.2] RODENACKER, W. G., *Methodisches Konstruieren*, Springer, Berlin, 1984.
- [26.3] SUH, N. P., *The Principles of Design*, Oxford University Press, New York, 1990.
- [26.4] HIGHT, T. K., STAUFFER, L. A., *Design Theory and Methodology*, ASME, 1993.
- [26.5] FRENCH, M. J., *Involution and Evolution, Design in Nature and Engineering*, 2<sup>e</sup> éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [26.6] MATOUSEK, R., *Konstruktionslehre des allgemeinen Maschinenbaues*, Springer, Berlin, 1974.
- [26.7] PAHL, G., BEITZ, W., *Konstruktionslehre, Methoden und Anwendung*, 3<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1993.
- [26.8] BAGH, P., BRIEHL, G., «Ueber die Entwicklung der Drehmomente-Gewichtsrelation von Hochbelasteten Industriegetrieben und die zugehörigen Herstellkosten», *VDI-Bericht*, N° 332, pp. 191-195, 1979.
- [26.9] FAISANDIER, J., *Mécanismes oléo-hydrauliques*, Dunod, Paris, 1987.
- [26.10] ARKES, G. F., «The Developpment of the Water-lubricated Feed Pump», *Proc. Inst. Mech. Engrs*, N° 177, pp. 691-704, 1963.
- [26.11] WHYTE, R. R., *Engineering Progress through Development*, Mechanical Engineering Publications, London, 1978.
- [26.12] HOENOW, G., «Maschinenkonstruktion und Maschinendesign», *Konstruktion*, 43, pp. 297-300, Springer, 1991.
- [26.13] EHRLENSPIEL, K., *Kostengünstig Konstruieren*, Springer, Berlin, 1985.

## CHAPITRE 27

- [27.1] PAHL, G., BEITZ, W., *Konstruktionslehre, Methoden und Anwendung*, 3<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1993.
- [27.2] PAHL, G., BEITZ, W., *Engineering Design: A Systematic Approach*, Springer, London, 1996.

- [27.3] DECKER, K.-H., *Maschinenelemente*, 11<sup>e</sup> éd. Carl Hanser, Munich, 1992.
- [27.4] NIEMANN, G., WINTER, H., *Maschinenelemente*, 3 vol., 2<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1981 et 1983.
- [27.5] ROLOFF, H., MATEK, W., *Maschinenelemente*, 11<sup>e</sup> éd., Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [27.6] DOBROVLLOSKI, V., et collectif, *Eléments de machines*, MIR, Moscou, 1971.
- [27.7] SZWARCMAN, M., *Eléments de machines*, (Technique et documentation), Lavoisier, Paris, 1983.
- [27.8] DROUING, G., GOU, M., THIRY, P., VINET, R., *Eléments de machines*, Editions de l'Ecole polytechnique de Montréal, 1986.
- [27.9] SHIGLEY, J.E., *Mechanical Engineering Design*, 5<sup>e</sup> éd., McGraw-Hill, New York, 1989.
- [27.10] CREAMER, R.H., *Machine Design*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.
- [27.11] SLOCUM, A.H., *Precision Machine Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1992.
- [27.12] JUVINALL, R.C., MARSHENK, K.M., *Fundamentals of Machine Component Design*, John Wiley & Sons, New York, 1991.

# INDEX

Les nombres qui suivent le terme cité renvoient aux pages correspondantes du livre. La référence principale ou de définition est indiquée en chiffres gras.

## Noms communs

### A

Accélération maximale, 126, 131, 143  
Accident(s), 470, 471  
– recherche des causes, 473  
Accouplement élastique, 337, 412  
Actionneur, 67, 102, 119, 129  
– choix des caractéristiques, 129ss  
Adaptation des inerties, 127  
Ailette de refroidissement, 38, 40  
Algorithme  
– d’appréciation de la sécurité, 323  
– de dimensionnement direct, 303  
– de prédimensionnement, 305  
– de vérification à la résistance, 312  
Allongement  
– à la rupture, 212, 214  
– nominal, **210**  
Amortissement, 135, 407  
Amortisseurs, 406, 440, 477  
Aptitude au service, 270, 271  
Arbre  
– de défaillance, 474  
– de machine, 55, 63, 248, 250, 270, 306, 307, 309, 315, 320, 336, 341, 343, 357ss, 359, 370ss, 374, 382ss, 398ss, 414, 430, 431, 464  
Arc-boutement, 169  
Arrêt, voir ralentissement  
Assemblages, 308, 310, 335, 485  
Assouplissement, 57, 166  
Axe, 332, 333, 345

### B

Barrage  
– fluide, 199ss, 202  
– (liquide de), 196, 200ss  
Bâti, 63, 64  
Bielles, 156, 157, 375ss  
Bilan  
– de puissance, 69  
– thermique, 2ss  
Blocage, 439, 442  
Bras oscillant, 365ss

Bride(s), 177, 183, 185, 187, 412, 448  
Broutement, 168, 169  
Bruit, 99, 349, 403  
Butées, 46, 159, 416, 444

### C

Cahier des charges, 265, 481, 483  
Capacité  
– de charge, 294, 393  
– thermique, **4**  
Caractéristique  
– d’un groupe moteur-coupleur, 115, 116  
– de couple, 72ss, 97, 100, 103, 106, 108ss, 114, 129, 138, 139, 489  
– de puissance, 72ss, 100, 103, 106, 139  
– motrice de véhicule, 137ss  
Catalogues, 296, 310  
Chaîne, voir transmission à chaîne  
Charge  
– admissible, 389  
– (capacité de), 294, 338, 387, 393  
– critique de flambage, 152, 379, 380  
– (diagramme de), 82  
– (distribution de), 286, 287  
– effective, 294  
– exceptionnelle, 314  
– fractionnaire, 35  
– limite, 294  
– (répartition de la), 97  
– thermique nominale, **35**  
Chiffre de vitesse, **26**  
Choc, 209, 220, 223, 225, 276, 321, 322, 370, 440  
– thermique, 61, 62  
Choix  
– d’un actionneur, 129ss  
– de la théorie de la rupture, 311ss  
– de la valeur du facteur de sécurité, 298ss  
– de la vitesse d’un moteur, 99  
– des dimensions, 274  
– des matériaux, 241ss, 266, 274, 344, 346, 462, 469  
– des organes, 422ss  
– du rapport de vitesses, voir rapport de vitesses  
Clavette, 308, 309, 339, 341, 413, 421



## Coefficient

- de conductibilité thermique, 4
- de dilatation thermique, 50
- de frottement, 21, 45, 160
- de matériau, 41
- de pénétration de la chaleur, **20**
- de Poisson, 59, 212, 261
- de sécurité, voir facteur de sécurité
- de transmission de chaleur, 4, 5, 7, 8, 38

## Commande, 67, 102, 117, 119, 135, 427ss, 477

- non positive, 369, 474, 476
- positive, 369, 474, 476

## Compensateur de dilatation, 55, 58

## Comportement de matériaux, 311

- ductiles, 214, 230, 282, 290, 291, 292, 315
- fragiles, 214, 282, 292, 315, 479

## Concentrateur de contraintes, voir entaille et concentration de contraintes

## Concentration de contraintes, 238, 278ss, 281, 282, 285ss, 332

## Conception, 409, 410, 411

- *damage-tolerant design*, 480
- *fail safe*, 476ss
- modulaire, 444
- *safe life*, 475, 476, 480

## Conduction thermique, 4, 39

## Constante de temps

- électromécanique, 81
- thermique, **12**, 47, 70, 82, 83, 396, 398

## Contact hertzien, 27

## Contrainte(s)

- admissible, 307
- alternée, **231**, 232, 277, 278, 316, 317
- circonférentielle, 350ss, 353, 355
- critique de flambage, 153
- critique de voilement, 153ss, 334
- dans paroi de tube, 61
- de comparaison, 287, 288, 306, 311, 313ss, 356, 363
- de comparaison alternée, 321
- de comparaison moyenne, 320
- de flexion, 41, 345
- de torsion, 333
- dynamique, 276, 312
- effective, 276ss, 296
- (état de), voir état de contrainte
- moyenne, **231**, 278, 296, 317
- nominale, **210**, 276, **279**
- ondulée, 231, 317, 320
- principales, 287
- réelle, 212
- répétée ou pulsante, 232
- statique, 232, 276, 311
- thermique, 56, 57, 59, 60

## Convection, 7ss, 47

## Convertisseur de couple, 112, 113

## Corrosion

- (effet sur la fatigue), 229, 236
- sous tension, 209

## Couple

- d'embrayage, 337, 396
- d'entraînement, 69, 80ss, 93, 94, 96, 105, 129
- de démarrage, 73, 75, 78, 93

- de freinage, 73, 80, 130

- (dynamique du), 80ss

- équivalent, 85

- (inversion du), 373

- moteur, 72ss, 80ss, 97, 100, 103, 106, 116, 128ss

- (réglage du), 103

- transmissible, 363

## Coupleur(s), 107ss, 115, 117, 149

## Courbe(s)

- de fatigue, voir diagramme de Wöhler

- de fluage, 240

- de service d'un joint, 179

- de Wöhler, voir diagramme de Wöhler

- limites, 487ss

## Courroie, voir transmission à courroie

## Coût, 241, 300, 301, 425, 471, 481ss, 487

## Crique, voir fissure

Critère(s) de dimensionnement, **269**, 270, 271, 356, 370, 388

- à la résistance, 274, 305, 322, 323

- à la rupture, **288**, 291ss, 332

- d'actionneurs, 87ss, 130, 131

- dynamique, 356ss, 369, 370, 382, 394

## D

## Débit

- de capacité thermique, **9**

- de fuite, 172, 181

## Défaut(s), voir fissure

## Déformation

- plastique, 212, 213, 282, 388

- rémanente, 212

- statique, 398ss

- thermique, 62, 63

## Démarrage, 112

- de moteurs, 78, 93

- (durée du), voir durée du démarrage

## Densité de puissance, 71, 422, 425, 426

## Design, 447ss

## Diagramme

- d'endurance, voir de Haigh

- de charge, 82, 83

- de choix des matériaux, 242ss

- de comportement, 312, 313

- de fluage, 240

- de Goodman, 233, 238, 239

- de Haigh, 232ss, 317, 323

- de Pellini, 224, 225

- de Wöhler, 228ss, 284, 316, 323, 326

- effort-vitesse, 34, 487

Diffusivité thermique, **19**

## Dilatation thermique, 49ss, 53ss, 63, 64, 156, 162, 167, 183ss

Dimension déterminante, **450**

## Dimensionnement, 269

- à la déformation statique, 398ss

- à la longévité, 323ss, 393ss

- à la précision dynamique, 355, 356, 358, 366

- à la résistance, 274, 302ss, 357, 359, 366ss, 372ss, 375ss, 382, 393

- à la vitesse critique, 382ss, 385ss, 394, 459, 461

- à l'usure, 388ss
- aux vibrations de torsion, 370ss, 394
- (critère de), voir critères de dimensionnement
- d'arbres, 306, 307, 321, 355, 357ss, 370ss, 382
- d'engrenages, 40ss
- d'actionneurs, 87ss, 130ss, 135
- de moteurs, voir d'actionneurs
- de rotors, 350ss, 353ss, 385ss, 459, 461
- de roulements, 392ss
- de volants, 95, 350ss, 438, 439
- direct, 303
- indirect, 304ss
- (méthodologie de), 274, 275, 302ss
- thermique, 32ss, 70, 388ss, 391
- Disque, voir rotor
- Dissipation d'énergie, 1
  - dans un coupleur, 118
  - dans un embrayage, 396
  - dans un moteur, 83ss, 133, 134
- Domaine
  - d'endurance illimitée, 228
  - de dimensionnement, 42, 359, 360, 368, 372, 373, 378, 384, 387, 394, 400
  - de fatigue limitée, 228, 230
  - de fatigue oligocyclique, 228, 230
  - de fonctionnement, 487, 488
  - élastique, 212, 213
  - plastique, 212, 213
- Durée
  - d'arrêt, 89, 120, 432
  - d'initiation, 229
  - d'un mouvement, 119, 121, 124, 125, 127, 132
  - d'une perturbation, 370
  - de fonctionnement, 32, 36, 86
  - de propagation, 229
  - de synchronisation, 435, 437
  - du démarrage, 89, 120
- Dynamique du couple moteur, 80ss
- E**
  - Ecart type, 229, 297
  - Echangeur de chaleur, 9, 10
  - Echauffement, **1**, 20, 33, 60, 70, 84, 86, 184, 185, 196, 201, 387, 388ss, 391, 392, 433ss, 436ss
    - avec source de chaleur volumique, 17
    - d'embrayages, 23, 396, 436
    - d'un joint, 192, 196, 201
    - de brides, 185
    - de corps semi-infinis, 19
    - de freins, 397, 433ss
    - de moteurs, voir température de moteurs
    - de paliers hydrodynamiques, 160, 391
    - de roulements, 163
    - de surface, 18
  - Ecrouissage, 213, 215, 282
  - Effort(s), 420
    - admissible, 310, 451
    - d'entraînement, 100, 126
    - dynamique, 283, 369
    - moteur, 136, 137, 138
    - nominal, 276
    - perturbateur, 82, 370
    - résistant, 126, 128
  - Egale résistance, 332, 333, 335, 352ss
    - (principe d'), 332ss, 335, 341
  - Elancement, **151**
  - Eléments finis (calcul par), 330, 380, 401
  - Embrayage(s), 22, 23, 47ss, 337, 396ss, 420, 435ss
  - Energie dissipée, voir dissipation d'énergie
  - Engrenage(s) (voir aussi transmission à –), 26, 31, 36, 39, 40, 294, 331, 346, 370, 373, 414, 416, 423ss
    - conique, 55
    - cylindrique, 40, 336, 337, 342, 461ss
    - épicycloïdal, 42, 96, 414, 415, 423ss, 440, 477
    - vis sans fin, voir transmission à vis sans fin
  - Entaille, 282
    - de décharge, 286
    - (effet d'), 216, 238, 283ss, 314
  - Entraînement par plusieurs moteurs, 96, 97, 98, 427
  - Environnement, 3, 470, 472, 482
  - Epaisseur
    - d'un film lubrifiant, 1, 160, 161, 391, 468
    - d'un joint, 182
    - (influence sur la résistance), 215, 222, 312
    - optimale d'un tube, 61, 155, 334
  - Equilibrage de puissance, 70
  - Equilibre
    - bistable, 147ss
    - instable, **147**, 148
    - stable, **147**, 219, 421, 479
  - Equilongévité, 336
  - Erreur dynamique, voir précision
  - Essai
    - de fatigue, 228ss
    - de résilience, 214, 221
    - de traction, 209ss, 217
  - Etanchéité, 171, 479
    - axiale, 189
    - directe, **171**, 177
    - dynamique, **171**, 188ss, 191ss, 198
    - indirecte, **171**, 178, 191ss, 199ss
    - permanente, **171**, 187, 188
    - (principe d'), 175ss, 178
    - radiale, 189
    - semi-directe, **171**, 200ss
    - statique, **171**, 174ss
  - Etat
    - de contrainte, 215, 280, 284, 287
    - de déformation, 215
    - de surface, 235ss
    - limite, 289, 291, 292, 311, 313
  - Exemples (sauf applications numériques)
    - arbre de commande de l'hélice stabilisatrice d'un hélicoptère, 270, 271
    - blocage d'un chariot, 442
    - choix du matériaux d'un axe, 344ss
    - choix du matériaux d'une coque de sous-marin, 259ss
    - choix du rapport de transmission de véhicules, 139ss
    - conception d'un bras plieur en composite, 264ss
    - déformation d'un arbre de vis sans fin, 398ss
    - dimensionnement d'un arbre oscillant, 357ss

- dimensionnement d'un arbre, 306, 307, 382ss
- dimensionnement d'un bras oscillant, 365ss
- dimensionnement d'une clavette, 308ss
- dimensionnement de bielles, 375ss
- dimensionnement dynamique d'un mécanisme, 403
- entraînement d'un bobinoir, 116, 117
- entraînement d'un convoyeur, 117
- entraînement d'une vis de mouvement, 129
- étude d'un réducteur par similitude, 461ss
- étude d'une bielle par similitude, 456ss
- facteurs de sécurité de câbles, 295
- prédimensionnement d'un arbre, 306ss
- puissance de deux moteurs sur une hélice, 97
- réglage de vitesse d'un chalutier, 117, 118
- simulateur de freinage de chute, 405
- transmission de bruit, 404, 405
- vérification à la résistance d'un arbre, 320

## F

### Facteur

- d'amplification dynamique  $\mu_2$ , 359, 367, 372, 376
- d'application, 319, 374
- d'échauffement intérieur, **16**, 33
- d'échelle, **235**, 284
- d'entaille, **283**, 284, 307, 321, 336
- d'état de surface, **235**, 236ss, 284
- d'intensité des contraintes, **218**, 219ss, 223, 322
- d'ondulation, 229, **232**, 233
- de charge, 83
- de concentration de contraintes, **279**, 281, 283, 311, 314, 315, 320
- de confiance statistique, 229, 284, 324
- de correction, 238, 239, 284
- de correction d'altitude, 72, 73, 87, 90
- de correction de température, 72, 73, 87, 90
- de dimensionnement, 299
- de distribution de pression, 195
- de forme, **254**, 256
- de géométrie, 219, 220, 329
- de plasticité, 152, 154
- de proportion de clavettes, 342
- de réduction de résistance à la fatigue, voir facteur d'entaille
- de résistance, 299
- de sécurité, **272**, 273, 322, 323, 332
- de sécurité au grippage, 44
- de sécurité de surcharge extérieure, 294, **295**, 296, 319
- de sécurité optimal, 300, 301
- de sécurité structurale, 294, 295, 298ss, 311, 312, 315, 316, 318, 319, 322, 323
- de surcharge d'entraînement, 70
- de surcharge mécanique, **82**, 83, 84ss
- de surcharge thermique, **36**, 37
- de susceptibilité du matériaux, **283**
- de température, **238**, 284
- de traitement de surface, **238**, 284
- géométrique, 247, 263

Fatigue, 225ss, 313, 332

- (influences sur la), 234ss
- (limite de), voir limite de fatigue

Fiabilité, 298, 416, 422, **470**

Film d'huile, 43

Fissure, 218, 322

- (germination de), 226
- (longueur critique de), 220, 224, 226, 227, 328ss
- (propagation de), 226, 313, 328

Flambage

- d'une bielle, 156, 157, 379, 380
- d'une coque, 261, 262
- de poutres, 150ss, 155, 156, 157, 251, 255
- de ressorts hélicoïdaux, 158, 159
- de tubes, 154, 158
- élastique, 152
- plastique, 152

Flexion rotative, 277

Fluage, 183ss, 209, 239ss, 313

Flux

- de chaleur, 3, 21, 22, 31, 45, 60
- de force, 278ss
- de production de chaleur, 20
- de puissance, 3

Fonctions

- (distribution des), 411ss
- (séparation des), 413ss

Force, voir aussi effort

- thermique, 56, 57
- d'étanchéité, 178ss
- motrice, 136, 137, 138

Frein(s), 22, 30, 47ss, 79, 397, 398, 431ss, 478

Fréquence

- d'utilisation, 47, 49, 396, 397, 437
- propre, voir pulsation propre

Fretage, 51ss, 339, 363ss

Fuite(s)

- (débit de), 172, 175, 181
- (recherche des) 172ss

## G

Gamme

- de réglage, **104**
- de variation de couple, **105**
- de variation de vitesse, **101**

Garniture mécanique, 193ss, 201

Glissement, 137

- de coupleurs, 107, 117, 137
- de moteur, **77**, 95, 96
- du point de fonctionnement, 80

Grandeur caractéristique, 271

Grippage, 1, 43, 382, 388, 481

Groupe d'entraînement, **67**

## H

Hypothèse de rupture

- de l'énergie de distorsion maximale, 234, 289, 290, 306, 315, 317, 356, 363
- de Mohr, 291, 292
- de Tresca, 290

- de von Mises, voir de l'énergie de distorsion maximale
- du cisaillement maximal, 290, 291

## I

### Indice

- caractéristique, voir produit caractéristique
- de fiabilité, 298
- de performance, 247, 249ss, 252, 253, 257, 258, 262
- de vitesse, 310, 395, 396

Inégalité de sécurité, voir relation de sécurité

Inertie optimale d'un moteur, 127, 135

Instabilité, voir aussi équilibre

- de forme, 150
- thermique, 159ss

Intégration d'organes, 444

Isostatisme, 413, 414, 416

## J

Jeu, 51ss, 99, 169, 387, 390, 392, 458

Joint

- à lèvres, 191, 192
- autoclave, 185, 186
- congelé, 197, 198
- plat, 178, 182, 183ss
- torique, 186, 187

## L

Labyrinthe, 167, 198, 199, 200, 201

Ligne d'arrêt, 227

Limite

- admissible, **272**, 273
- d'élasticité, 210
- de fatigue ou d'endurance, 228, 229
- de performance, 487, 488
- de proportionnalité, 210

Limiteurs d'efforts, 439ss, 481

Loi

- de Gauss, 229
- de Hooke, 58, 212
- de Miner, 325
- de Paris-Erdogen, 328
- de Poiseuille, 174
- du mouvement, 119ss, 369

Longévité, 483

- au fluage, 241
- de roulements, 338, 343, 344, 392ss, 460, 466, 467
- de rupture à la fatigue, 228, 323ss, 329, 330

Longueur relative, 388, 389

Lubrification, 39, 46

## M

Machine, **67**

- rapide, **349**

Marche intermittente, voir régime intermittent

Marge de sécurité, 32, 272, 273, 296, 297, 441, 476

Matériau(x)

- céramiques, 246
- (choix des), voir choix des matériaux
- composites, 245, 246, 266, 267, 332
- ductile, voir comportement ductile
- fragile, voir comportement fragile
- non métalliques, 245ss, 330ss
- polymères, 331

Mécanique de la rupture, 218ss, 226, 229, 313

Méthode(s), voir aussi règles

- de dimensionnement, 274
- de prédimensionnement, 302ss
- de vérification, 311
- des éléments finis, 330
- directe, 303, 304
- indirecte, 304ss
- numérique, 330, 401
- semi-empirique, 308ss

Mode(s)

- de ruine, 154, 259, 333, 335
- vibratoires, 358, 367, 377, 380, 381

Module

- d'élasticité, 212
- d'engrenage, 40, 399, 461

Moteur(s), 70ss

- à piston, 71, 74, 104, 139
- à turbine, 75
- à vapeur, 74
- (choix du), voir dimensionnement d'actionneurs
- d'asservissement, 132
- électriques, 70ss, 102ss, 132, 425, 439
- hydrauliques, 71, 74, 104
- optimal, 128
- pneumatiques, 71

Mouvement, 426, 429

- apériodique, 357
- cycloidal, 123
- énergétiquement optimal, 134
- harmonique, 357
- le plus bref, 121, 124, 126
- (lois du) 120ss, 135
- périodique, 356

Moyeu, 51, 309, 339, 341, 362ss, 370, 412, 415, 421

## N

Nombre

- de cycles, 227, 228, 277
- de Fourier, **22**
- de Péclet, **26**
- de Reynolds, 196
- de Sommerfeld, 160, **390**, 391, 392, 458, 460, 467
- limite de démarrages successifs, 93

Normes, 310, 311

## O

Optimisation, 273

- d'un tube comprimé, 154

- d'un tube en torsion, 333, 334
- de l'accélération, 126, 143
- de l'énergie dissipée au cours d'un mouvement, 133
- de l'épaisseur d'un tube, 61, 155
- de la durée d'un mouvement, 121, 129
- des coûts, 300
- du couple moteur, 128
- du facteur de sécurité, 300

## P

- Palier(s), 412, 416, 421, 464
- à roulements, 46, 53ss, 58, 161ss, 343, 344, 413, 466, 467
  - de butée, voir butée
  - hydrodynamique, 46, 53, 159ss, 390ss, 416, 467, 468, 481
  - lisse à frottement sec ou mixte, 44, 53, 63, 331, 387
  - magnétique, 479
- Paroi étanche, 202ss, 479
- Performance(s), 247ss, 388, 449, 487, 488
- (indice de), voir indice de performance
- Période, 357, 370
- Perte, voir dissipation d'énergie, puissance dissipée
- Perturbation, voir effort perturbateur
- Plastification, 155, 222, 282
- Point de fonctionnement, 80, 140, 487
- Polygone limite, 233, 234, 239, 315, 317
- Positionnement, 118ss
- Poutre(s), 51, 62, 150, 155, 248, 250, 255ss, 377, 380, 455, 459
- Power rate*, 132, 135
- Précharge, voir précontrainte
- Précision, 356, 358, 361, 366, 431
- Précontrainte, 52, 57, 161ss, 165, 183
- Prédimensionnement, 44, 302ss
- direct, 303
  - indirect, 304ss
  - semi-empirique, 308ss
- Presse-étoupe, 192, 193, 205
- Pression
- de contact, 287, 309
  - de déformation de joints, 180, 181, 187
  - moyenne de paliers, 45, 387, 388ss
  - superficielle admissible, 41
- Principe(s)
- d'égale résistance, voir égale résistance
  - d'équilongévit, 336
  - *damage-tolerant design*, 480
  - de conception, 409ss
  - *fail safe*, 476ss
  - *safe live*, 475, 476
- Probabilité de ruine, 298, 299ss
- Produit caractéristique *p<sub>v</sub>*, 45, 310, 388ss
- Proportions harmonieuses, 341, 363ss, 458, 465
- Protection (organes de), 482
- Puissance, 419, 488, 489
- d'entraînement, 68ss, 87, 89, 91, 99, 136
  - de refroidissement, 11
  - dissipée, perdue, 33ss, 42, 45, 69, 83, 107, 118, 163, 391, 392

- limite, 33, 34
  - maximale, 33, 74, 76, 89, 139, 140, 489
  - nominale corrigée, 72
  - nominale d'un moteur, 71, 72, 88, 90, 91, 131
  - thermique, 5, 6ss, 10
  - utile, 37, 69
- Pulsation(s)
- propre(s), 356, 357, 369, 370
  - propre(s) de poutres, 248, 259, 366, 377, 380ss, 455
  - propre en torsion, 358, 370, 386, 394, 430, 455
  - relative, 358, 366, 369, 371, 382, 431

## R

- Ralentissement, voir durée d'arrêt
- Rapport
- de similitude, voir similitude
  - de transmission, voir rapport de vitesses
  - de vitesses optimal, 126, 128, 143
  - de vitesses, 99, 100, 119, 135, 139ss
- Rayonnement, 7
- Réactivité dynamique, 217
- Récepteur, 70
- Réducteur, voir transmission à engrenage
- Refroidissement, 12, 163
- auxiliaire, 9, 39, 82, 392
  - d'engrenages, 39, 42ss
  - de paliers, 163
- Régime
- continu, 72, 83
  - intermittent, 13, 14, 24, 48, 83ss
  - permanent, 12, 33, 42, 48
  - sous-critique, 370, 373, 374, 377, 382
  - surcritique, 370, 373, 382, 488
  - temporaire, 36, 86
  - thermique transitoire, 62
  - thermique, 12
- Réglage de la vitesse, 101ss
- de moteurs, 79, 102ss
  - par coupleur, 107ss
  - par variateur, 104ss
  - par viscocoupleur, 114
- Règlement(s), 302, 311, 472
- Règles ou méthodes pour
- abaisser le coût d'une machine, 484
  - accroître la fiabilité, 470
  - accroître la limitation de puissance par l'échauffement, 37ss
  - accroître la longévité à la fatigue, 330
  - accroître la vitesse d'un arbre portant un embrayage ou un frein, 398
  - apprécier la valeur du facteur de sécurité, 322
  - atténuer les concentrations de contraintes, 285ss
  - choisir entre un moteur à vitesse variable ou un variateur, 105, 106
  - choisir la valeur du facteur de sécurité, 298ss
  - choisir la vitesse d'un arbre de transmission, 431
  - choisir la vitesse d'un embrayage, 438
  - choisir la vitesse d'un frein, 434

- choisir la vitesse d'un volant, 439
- choisir un matériaux, 249
- choisir une loi de mouvement de positionnement, 125
- concevoir le refroidissement des paliers hydrodynamiques, 239
- concevoir un réducteur, 468, 469
- concevoir une machine sûre, 476, 480, 481
- conduire une étude, 400, 483
- construire en vue de grandes vitesses, 453
- créer un mécanisme de positionnement rapide, 134, 135
- dimensionner un actionneur, 132, 133
- dimensionner un arbre oscillant, 362
- dimensionner un élément, 274, 275
- diminuer les contraintes thermiques, 57
- diminuer les contraintes thermiques, 57ss
- diminuer les dilatations des bâtis, 64
- élever la vitesse périphérique, 356
- éviter l'instabilité thermique de roulements, 165ss
- éviter le broutement, 169
- la conception générale, 489ss
- prédimensionner un élément, 302ss
- rechercher les sources d'accidents, 473, 474
- vérifier la résistance d'un élément, 309
- Relation(s)
  - d'aptitude au service, **272**, 322
  - de sécurité, **272**, 273, 274, 299, 307
  - entre charge, vitesse et taille de paliers lisses, 389
  - entre taille et effort transmissible, 451
  - entre taille, matériaux et pulsation propre, 455
  - entre taille, vitesse et puissance transmissible, 454
- Rendement, 33, 39, 69, 98, 107, 138, 420
- Réponse
  - harmonique du couple moteur, 82
  - indicielle du couple moteur, 81
  - indicielle thermique, 12, 16
- Résilience, 214, 221
- Résistance
  - à l'avancement d'un véhicule, 135ss
  - à la fatigue, 228ss, 234ss, 331, 366, 367
  - à la traction, 211
  - au choc, 321, 322
  - au fluage, **240**, 241
  - de prédimensionnement à la torsion, **307**
  - (dimensionnement à la), voir dimensionnement
  - limite, 296, 299, 314
  - moyenne, 297
  - statique, 209ss, 217, 239, 315
- Ressort, 158, 159, 250, 333, 422, 478
- Revêtement de surface, 238
- Rigidité, 56, 135, 165, 386, 421, 442
  - d'une caractéristique de moteur, 81
- Risque, **471**
- Rotor(s), 350ss, 353ss, 385ss, 459, 461, 484
- Roulement(s), 46, 52, 53ss, 161ss, 165, 166, 338, 343, 345, 392ss, 412, 413, 421, 460, 466, 467
  - (longévité des), voir longévité des roulements
- Rupture
  - au choc, 209, 322
  - de fatigue, 208, 225ss, 294, 478

- de pièces avec défauts, 218, 224, 328ss
- ductile, 208, 214, 221ss, 291, 315
- fragile, 208, 214, 221ss, 226, 244, 292, 315
- par corrosion sous tension, 209
- statique, 208, 291

## S

Section dangereuse, **313**, 314, 332

### Sécurité

- de surcharge, 295, 319
- optimale, 300, 301
- (organe de), 441, 480ss
- structurale, 269, 299, 317

Segment d'étanchéité, 197

### Sensibilité

- d'optimisation, 127, 273
- du réglage, **101**

Serrage, 51, 52, 365

Similitude, 449ss, 452ss

- d'arbres, 430, 458, 464ss
- d'embrayages, 435ss
- de bielles, 456ss
- de freins, 432ss
- de paliers lisses, 389, 438ss
- de poutres, 455
- de roulements, 460, 461, 466
- de vitesse critique, 461
- de volants, 438, 439
- (rapport de), 432, **449**, 465

Simulation, 402ss

Soufflet, 57, 205, 479

Soupape de sûreté, 147, 148, 481

Souplesse, 421

### Source

- d'énergie, 70, 71
- de chaleur, 2, 3
- de chaleur mobile, 26ss
- de chaleur volumique, 17

Sous-marin, 197, 259ss, 335

Stabilité, voir équilibre

Striction, 211, 227

Surcharge, 36, 82, 84, 86, 294, 426, 439ss, 443, 481

Sûreté, 416, 422, 434, **469**, 472

### Surface

- de carters, 41
- de refroidissement, 7, 38, 392
- (état de), voir état de surface
- (traitement de) voir traitement de surface

Suppression critique, **179**

Système thermique 3

## T

### Taille

- d'un embrayage, 435, 436
- d'un frein, 432, 433
- des éléments de machines, 336ss, 420
- (effet de), voir épaisseur

Tambour, voir rotor

### Taux

- d'utilisation, voir facteur de charge
- de défaillance, **471**

- de propagation d’une fissure, 328, 329
- de variation de contrainte, voir facteur d’ondulation
- Température, 11ss, 42, 99, 184, 185, 312
  - admissible, **32**, 35, 37, 49, 82, 86
  - ambiante, 6, 37
  - d’embrayages, 23, 49, 396
  - d’engrenages, 40ss
  - de limiteurs d’efforts, 441
  - de moteurs, 72, 82, 84, 86, 87, 93, 440
  - de paliers, 45, 481
  - de roulements, 46, 164
  - de surface, 28, 31, 331
  - de transition, 221, 223
  - éclair, 18
  - (effets sur la résistance), 216, 221, 238, 312
  - (facteur de), voir facteur de température
  - instantanée, **29**
  - intérieure, 16ss
  - limite, 32
  - moyenne, 44
  - NDT, 224, 244, 313
- Ténacité, 214, 221ss, 222, 245
- Théorie(s)
  - de l’énergie de distorsion maximale, 289, 315, 317
  - de la rupture, 288, 311ss
  - du cisaillement maximal, 290
- Traitement de surface, 237
- Transition élastique-plastique, voir état limite
- Transmission(s), 430
  - à chaîne, 338, 423
  - à courroie, 338, 416, 419, 423
  - à engrenage, 40ss, 414, 415, 420, 423ss, 440, 444, 455, 461ss
  - à vis sans fin, 40, 44, 337, 398ss
  - de la chaleur, 2, 4ss, 39
  - de mouvement, 429

Tribologie des joints, 189  
 Tube, 60, 61, 153ss, 158, 333, 334

## U

Usure, 99, 387, 388, 391

## V

Valeur

- effective, 271
- limite, 271

Variateurs de vitesse, 104ss, 117

Véhicules, 114, 135ss

Vérification de la résistance, 274, 311, 312, 320

Vérin à moteur, 149

Vibrations

- auto-excitées, **167**
- (dimensionnement aux), 369ss, 394
- paramétriques, 156, 379

Vis

- d’assemblage, 287, 335, 339
- de mouvement, 129
- sans fin, voir transmission à vis sans fin

Viscocoupleur, 113ss

Vitesse

- admissible, 310, 389
- (choix de la), 99
- critique, 382, 383, 385ss, 394, 431, 459
- d’écoulement d’un fluide, 175
- de sollicitation, **216**, 223
- maximale, 74, 105, 120, 127, 139ss, 352, 355, 356, 388, 389, 395, 397
- synchrone, 76
- (variation de la), voir réglage de la vitesse

Voilement, 150, 153, 333

Volant, 93ss, 96, 438

## Noms propres

Seuls sont cités les noms d’auteurs dont les travaux sont présentés ou utilisés.

Archard, 27  
 Ashby, 242ss  
 Beitz, 410, 444  
 Blok, 27, 43, 331  
 Bollenrath, 283, 284  
 Brauen, 264  
 Cauchy (nombre de), **453**  
 Erdogen (loi de), 328  
 Faisandier, 425  
 Flügge, 153  
 Fourier (nombre de), **22**  
 Gauss (loi de), 229  
 Goodman (droite de), 233  
 Haigh (diagramme de), 232ss, 317  
 Hencky (théorie de), 289, 315  
 Hill (critère de rupture de), 332  
 Hoenow, 448  
 Hooke (loi de), 58, 212  
 Klotter, 156

Kwami, 237  
 Ludwick, 216  
 Mathieu (équation de), 157  
 Miner (loi de), 325  
 Mohr, 291, 292, 293  
 Newton (loi de), 452  
 Oedekoven, 47  
 Pahl, 47, 410, 444  
 Paris (loi de), 328  
 Péclet (nombre de), **26**  
 Pellini (diagramme de), 224  
 Petersen, 283  
 Philipp, 129  
 Poiseuille (loi de), 174  
 Poisson (coefficient de), 59, 212, 261  
 Pruvot, 164, 166  
 Reynolds (nombre de), 196  
 Siebel, 283  
 Soderberg (droite de), 233

Sommerfeld (nombre de) 160, 390, 458, 467  
Suh, 410  
Thum, 283, 286  
Timoshenko, 153  
Traupel, 350  
Tresca (théorie de), 290  
Troost, 283  
Tsai (critère de rupture de), 332

Tückmantel, 181  
Védy, 264  
Vogel, 160  
Von Mises (théorie de), 289, 315  
Watt, 447  
Whyte, 484  
Wöhler (courbe de), 228, 326  
Zbinden, 197



## LISTE DES SYMBOLES

Les symboles n'apparaissant que de manière fugitive ne sont pas mentionnés. Les nombres entre parenthèses désignent la formule de définition de la grandeur.

### Alphabet latin

$a$	diffusivité thermique	(19.41)
$a$	longueur d'une fissure	
$a_c$	longueur de fissure critique	
$A$	aire, aire d'une section	
$b$	coefficient de pénétration de la chaleur	(19.43)
$b$	largeur, longueur d'un moyeu	
$b_j$	largeur d'un joint	
$B$	coefficient spécifique de calcul de dimensions	
$B$	longueur d'un coussinet	
$c$	chaleur volumique	
$c$	coefficient de taille de roulements	(24.115)
$c$	facteur de correction de résistance	(23.25)
$c_a$	facteur de confiance statistique	
$c_e$	facteur d'échelle	(23.20)
$c_p$	indice de fiabilité	
$c_R$	facteur d'état de surface	(23.21)
$c_S$	facteur de traitement de surface	(23.23)
$c_T$	facteur de température	(23.24)
$C$	capacité de charge dynamique de base d'un roulement	
$C$	capacité thermique	(19.5)
$C$	coût	
$Ca$	nombre de Cauchy	(26.32)
$C_x$	facteur de résistance aérodynamique frontal	
$d$	diamètre	
$d_j$	diamètre moyen d'un joint	
$D$	diamètre, alésage	

$e$	épaisseur	
$e$	erreur relative	
$E$	module d'élasticité	
$ED$	taux d'utilisation, facteur de charge	(20.27)
$f$	déformation	
$f$	facteur de résistance à l'avancement	
$f$	fréquence	
$f(g)$	facteur de géométrie (mécanique de la rupture)	
$F$	force, charge radiale	
$\hat{F}_a$	amplitude d'une force alternée	
$F_c$	charge critique	
$F_c$	force centrifuge	
$F_m$	force moyenne	
$Fo$	paramètre fonctionnel	
$F_E$	force d'étanchéité	
$g$	accélération de gravitation	
$g$	glissement	(20.62)
$g$	glissement (de moteurs)	(20.16)
$g_N$	glissement nominal	
$G$	module d'élasticité de cisaillement	
$G$	poids	
$Ge$	paramètre géométrique	
$h$	coefficient de transmission de chaleur	
$h$	distance, hauteur	
$h_0$	épaisseur minimale d'un film lubrifiant	
$i$	rapport de vitesses, rapport de transmission (si adimensionnel)	(10.52)
$i$	rayon de giration	(21.4)
$I$	inertie généralisée (masse, moment d'inertie)	
$I$	intensité d'un courant électrique	
$I$	moment quadratique de surface (traditionnel moment d'inertie)	
$I_n$	indice de vitesse d'un roulement	(25.113)
$I_p$	moment quadratique polaire de surface	
$I_t$	moment quadratique de surface en torsion	
$j$	jeu	
$J$	moment d'inertie	
$J_c$	moment d'inertie des éléments entraînés	
$J_m$	moment d'inertie des éléments moteurs	
$k$	coefficient de conductibilité thermique	
$k$	ordre d'un mode vibratoire	
$k$	rigidité, rigidité tangente	(6.3)

$k_h$	facteur de correction d'altitude	
$k_i$	rigidité intérieure	(7.2)
$k_T$	facteur de correction de température	
$k_w$	rigidité d'une caractéristique de couple	(20.18)
$K_f$	facteur d'entaille pour la fatigue	(24.20)
$K_t$	facteur de concentration de contraintes théorique	(24.17)
$K_I$	facteur d'intensité des contraintes en mode I	(23.5)
$K_{Ic}$	facteur critique d'intensité des contraintes	
$K_{Id}$	facteur critique d'intensité des contraintes dynamiques	
$\ell$	longueur	
$\ell$	portée entre appuis	
$L$	longévité	
$L$	longueur	
$L_h$	longévité temporelle	
$L_0$	longévité de référence	
$m$	exposant d'alésage	(24.115)
$m$	masse	
$m$	module de denture	
$m$	rang d'une harmonique	
$m_n$	module normal de denture	
$M$	moment, couple	
$M_e$	couple ou moment d'entraînement	
$M_f$	couple ou moment de freinage, de frottement	
$M_p$	couple ou moment perturbateur	
$M_t$	couple de torsion	
$M_E$	couple d'embrayage ou de coupleur	
$M_N$	couple nominal	
$Ma$	paramètre de matériau	
$M_0$	couple de régime permanent	
$n$	facteur d'anticipation de contraintes	
$n$	nombre d'éléments	
$n$	vitesse de rotation [t/min]	
$N$	nombre de cycles	
$N$	nombre de démarrages horaire	
$N_D$	nombre de cycles à la limite de fatigue	
$p$	exposant de fatigue	
$p$	nombre de paires de pôles	
$p$	pente	
$p$	pression	
$p$	probabilité	
$\bar{p}$	pression moyenne de référence, pour paliers	(2.41)
$p_e$	facteur de surcharge d'entraînement	(20.7)
$p_M$	facteur de surcharge mécanique	(20.26)
$p_Q$	facteur de surcharge thermique	(19.77)

$P$	puissance	
$P_e$	puissance d'entraînement	
$P_p$	puissance perdue (perte)	
$P_s$	puissance stockée	
$P_u$	puissance utile	
$P_N$	puissance nominale	
$P'_N$	puissance nominale corrigée	
$P_0$	puissance de régime permanent	
$Pe$	nombre de Péclet ou chiffre de vitesse	(19.58)
$Pe$	performance	
$PR$	power rate	(20.98)
$q$	mouvement généralisé (translation, rotation)	
$\dot{q}$	flux de chaleur	
$q_a$	espace d'arrêt	
$q_d$	espace de démarrage	
$q_p$	espace parcouru en régime permanent	
$Q$	effort généralisé (force, moment, couple)	
$\underline{Q}$	quantité de chaleur	
$\dot{Q}$	puissance thermique	
$Q_u$	effort utile	
$r$	rayon	
$R$	facteur d'ondulation	(23.16)
$R$	gamme de réglage	(20.57)
$R$	gamme de variation de vitesse	(20.55)
$R$	rayon	
$R$	résistance électrique	
$R_a$	rugosité arithmétique moyenne	
$R_e$	limite élastique d'un matériau	
$R_{lim}$	résistance limite généralisée	
$R_m$	résistance à la traction	
$R_{mc}$	résistance à la compression	
$R_{m/L/T}$	résistance au fluage	
$R_p$	limite de proportionnalité	
$R_{p,0.2}$	limite conventionnelle d'élasticité	
$R_r$	contrainte de rupture	
$R_M$	gamme de variation de couple	
$R_T$	résistance thermique	
$s$	demi-largeur d'une zone de frottement	
$s$	déplacement curviligne	
$s_R$	écart type de résistance	
$s_\sigma$	écart type de contrainte effective	
$S$	facteur de sécurité	(24.7)
$S_d$	facteur de dimensionnement	(24.51)
$S_s$	facteur de sécurité de surcharge extérieure	(24.39)

$S_R$	facteur de résistance	(24.52)
$So$	nombre de Sommerfeld	(25.99)
$t$	temps	
$t_a$	temps d'arrêt	
$t_d$	temps de démarrage	
$t_s$	temps de synchronisation	
$T$	durée d'un mouvement, d'une perturbation	
$T$	période	
$T$	température	
$T_0$	période propre d'un oscillateur non amorti	
$T_1$	période propre la plus longue d'un oscillateur à plusieurs degrés de liberté	
$u$	rapport d'engrenage	
$v$	vitesse	
$V$	volume	
$w_v$	énergie volumique	
$W$	travail mécanique	
$W_p$	énergie perdue	
$y$	flèche	
$z$	nombre de dents	
$Z_E$	coefficient de matériau (engrenage)	

### Alphabet grec

$\alpha$	coefficient de dilatation thermique linéaire	
$\alpha$	coefficient de piézo-viscosité	
$\beta$	angle d'hélice	
$\beta$	longueur relative d'un coussinet	
$\beta$	pulsation relative	(13.48), (15.43)
$\delta$	dilatation thermique	
$\varepsilon$	allongement relatif	
$\varepsilon$	excentricité	
$\zeta$	facteur d'échauffement intérieur	
$\eta$	rendement énergétique	(12.3)
$\eta$	viscosité dynamique	

$\lambda$	élancement	(21.5)
$\lambda$	rapport de similitude	(26.29)
$\lambda_5$	allongement à la rupture ( $\ell_0 = 5d$ )	
$\mu$	coefficient de frottement	(2.20)
$\mu$	coefficient de Poisson	
$\mu'$	coefficient de frottement apparent ou équivalent	
$\mu_0$	coefficient de frottement statique, au repos	
$\mu_2$	facteur d'amplification dynamique	(15.45)
$\rho$	masse volumique	
$\sigma$	contrainte normale	
$\sigma_a$	contrainte alternée	
$\sigma_c$	contrainte critique	
$\sigma_f$	contrainte de flexion	
$\sigma_g$	contrainte de comparaison	
$\sigma_m$	contrainte moyenne	
$\sigma_D$	limite de fatigue alternée	
$\sigma_{Df}$	limite de fatigue alternée en flexion	
$\sigma_{D0}$	limite de fatigue en charge répétée	
$\sigma_E$	pression de serrage d'étanchéité	
$\sigma_F$	contrainte de flexion d'une denture	
$\sigma_H$	pression de contact de dentures	
$\sigma_J$	pression de serrage d'un joint	
$\sigma_N$	contrainte alternée pour $N$ cycles	
$\sigma_0$	contrainte nominale	
$\tau$	constante de temps thermique	(19.22)
$\tau$	contrainte de cisaillement	
$\tau_t$	contrainte de torsion	
$\tau_{t\text{pd}}$	contrainte de torsion de prédimensionnement	
$\tau_{Dt}$	limite de fatigue alternée en torsion	
$\tau_M$	constante de temps électromagnétique	(20.20)
$\varphi$	angle de rotation	
$\Phi$	fraction de détérioration	(24.93)
$\Phi_f$	facteur de forme	(23.41)
$\Phi_{rf}$	facteur de forme pour la résistance en flexion	(23.43)
$\Phi_{rt}$	facteur de forme pour la résistance en torsion	(23.44)
$\Phi_t$	facteur de forme en torsion	(23.42)
$\chi$	exposant adiabatique	
$\chi$	facteur de plasticité	
$\chi$	facteur d'inertie	(17.26)
$\psi$	jeu relatif de paliers	(2.40)
$\psi_d$	facteur de démarrage	(14.86)

$\psi_d$	largeur relative au diamètre d'une denture
$\psi_m$	largeur relative au module d'une denture
$\omega$	vitesse angulaire
$\omega_c$	vitesse critique
$\omega_k$	pulsation propre du mode $k$
$\omega_N$	vitesse nominale
$\omega_0$	pulsation propre d'un oscillateur élémentaire non amorti (13.41), (15.38)
$\omega_0$	vitesse de régime permanent
$\omega_1$	pulsation propre la plus basse d'un système non amorti à plusieurs degrés de liberté
$\Omega$	pulsation d'excitation, pulsation fondamentale

## Indices

a	air, ambiant
a	arbre
a	arrêt
adm	valeur admissible
c	carter
c	centrifuge
c	convection
c	valeur critique
e	équivalent
e	extérieur
f	frottement
f	flexion
f	fuite
i	intérieur
i	valeur i-ème
$\ell$	lent
lim	valeur limite
m	marche
m	valeur moyenne
max	valeur maximale
min	valeur minimale
n	composante normale
opt	valeur optimale
p	perte
p	pression
p	proportionnalité
r	rapide
r	rayonnement
s	surface
t	torsion
t	transition
v	à vide

E	étanchéité
J	joint
N	nominal
S	surcharge
T	thermique
U	usure

$\sigma$	dimensionnement à la résistance
$\Omega$	dimensionnement pour la précision

0	valeur initiale, au repos, en régime permanent
$\infty$	valeur d'équilibre au temps infini

### Caractères spéciaux supérieurs

$\square$	valeur moyenne
$\circ$	fonction périodique
$\wedge$	amplitude d'une fonction harmonique
$\bar{()}$	réaction à la grandeur $()$
$()^*$	grandeur réduite
$()'$	valeur corrigée d'une caractéristique d'un matériau

### Dérivations

$(\dot{\phantom{a}})$	un point signifie la dérivation d'une grandeur par rapport au temps
-----------------------	---



## REMERCIEMENTS AUX ÉDITEURS

Nous remercions les éditeurs qui nous ont autorisés à prendre dans leurs ouvrages les figures suivantes:

Fig. 23.48, 23.49, 23.53; ASHBY, M. F., *Materials Selection in Mechanical Design*, Pergamon Press, Oxford, 1992.

Fig. 26.23, 26.24, 26.25; BAGH, P., BRIEHL, G., «Ueber die Entwicklung der Drehmomente- Gewichtsrelation von Hochbelasteten Industriegetriebenen und die zugehörigen Herstellkosten», *VDI-Bericht*, N° 332, pp. 191-195, 1979.

Fig. 19.39; DECKER, K.-H., *Maschinenelemente*, 11<sup>e</sup> éd., Carl Hanser, Munich, 1992.

Fig. 26.76; EHRENSPIEL, K., *Kostengünstig Konstruieren*, Springer, Berlin, 1985.

Fig. 21.6; ERNST, H., *Die Hebezeuge*, Vieweg, Braunschweig, 1973.

Fig. 21.25, 22.50; ESCHMANN, P., HASBARGEN, WEIGAND, *Die Wälzlagerpraxis*, 2<sup>e</sup> éd., Oldenbourg, München, 1978.

Fig. 22.10, 22.11; LEYER, A., *Maschinenkonstruktionslehre*, 7 cahiers, Birkhäuser, Bâle, 1963 à 1973.

Fig. 26.8; LOOMANN, J., *Zahnradgetriebe*, 2<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1988.

Fig. 19.34, 20.45; NIEMANN, G., WINTER, H., *Maschinenelemente*, 3 vol., 2<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1981 et 1983.

Fig. 26.6, 26.7, 26.9, 26.13, 26.75; PAHL, G., BEITZ, W., *Konstruktionslehre, Methoden und Anwendung*, 3<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1993.

Fig. 22.54; REVUE TECHNIQUE SULZER, Winterthur, 2/1973.

Fig. 20.39, 20.43, 26.38; ROLOFF, H., MATEK, W., *Maschinenelemente*, 11<sup>e</sup> éd., Vieweg, Braunschweig, 1987.

Fig. 22.22; TOCHTERMAN, W., BODENSTEIN, F., *Konstruktionselemente des Maschinenbaues*, 2 vol., 9<sup>e</sup> éd., Springer, Berlin, 1979.

Fig. 26.29; COUTTER, J.-P., DUCLOS, T.-G., «Application of Electrorheological Materials in Vibration Control», *Electrorheological Fluids*, J.-D. Carlson, A. F. Sprecher and H. Conrad (Eds.), Technomic, pp. 300-325, 1990.

Fig. 26.42, 26.43; WHYTE, R. R., *Engineering Progress through Development*, Mechanical Engineering Publications, London, 1978.